8

AVIZAT Ministerul Educației

Gabriel Popa, Adrian Zanoschi,
Gheorghe Iurea, Dorel Luchian

EVALUAREA NAȚIONALĂ

matematică

2024

- Memorator cu **cele mai importante noțiuni și definiții** din programă
- **Teme recapitulative** conținute de programa de examen
- **80 de variante de subiecte**, cu indicații de rezolvare, după modelul M.E.

EDITURA PARALELA 45
EDUCAȚIONAL

EVALUAREA NAȚIONALĂ

matematică

2024

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin OMEC nr. 6250/21.12.2020.

Lucrarea este elaborată în conformitate cu programa școlară pentru susținerea Evaluării Naționale pentru absolvenții clasei a VIII-a și cu modelul de structură de subiect și baremul de evaluare și notare în vigoare.

Redactare: Iuliana Ene, Roxana Pietreanu, Ionuț Burcioiu
Tehnoredactare: Adriana Vlădescu, Carmen Rădulescu, Mioara Benza
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie
Credite foto: shutterstock.com

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Evaluarea Națională – Matematică 8 – 2024 / Gabriel Popa, Adrian Zanoschi, Gheorghe Iurea, Dorel Luchian. –
Pitești : Paralela 45, 2023
ISBN 978-973-47-3954-7

I. Popa, Gabriel
II. Zanoschi, Adrian
III. Iurea, Gheorghe
IV. Luchian, Dorel

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2023
Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.
www.edituraparalela45.ro

Editura Paralela 45

8

Gabriel Popa, Adrian Zanoschi,
Gheorghe Iurea, Dorel Luchian

EVALUAREA NAȚIONALĂ

matematică

2024

Editura Paralela 45

CUVÂNT-ÎNAINTE

Lucrarea *Matematică. Evaluarea Națională 2024* vine în întâmpinarea așteptărilor elevilor și profesorilor care se află pe traseul pregătirii Evaluării Naționale 2024.

Având în vedere competențele vizate prin programa de examen, precum și exigențele firești ale studiului matematicii, am gândit o structură complexă și eficientă a cărții, care implică un memorator, 14 teme/lecții recapitulative din materia pentru examen a claselor V-VIII și 80 de teste pregătitoare. Testele sunt elaborate în conformitate cu programa școlară, cu modelul de structură de subiect și cu baremul de evaluare și notare în vigoare începând cu anul 2021, luând în considerare schimbările de nuanță observate în testele de antrenament și în subiectele de examen din fiecare an de examinare.

La primele teste, elevul poate completa răspunsul în spațiul alocat, ca un exercițiu de redactare necesar în perspectiva evaluărilor, care impune viitorilor candidați un ritm de lucru și niște obiective precise. De asemenea, copiii și antrenorii lor au posibilitatea de a studia metodic baremele specifice acestui tip de subiect, întrucât testele beneficiază de răspunsuri și sugestii de rezolvare care le oferă un feedback necesar și imediat. Astfel, nivelul de pregătire de la un anumit moment se poate verifica prin autoevaluare.

Problemele au, în general, un caracter aplicativ, dar și unul ludic, iar reperele teoretice reprezintă o formă utilă de sistematizare a aparatului conceptual necesar rezolvării subiectelor, precum și lucrului de zi cu zi, în clasă și acasă.

Să fie un exercițiu cu sens, aducător de succes!

Autorii

MEMORATOR DE MATEMATICĂ

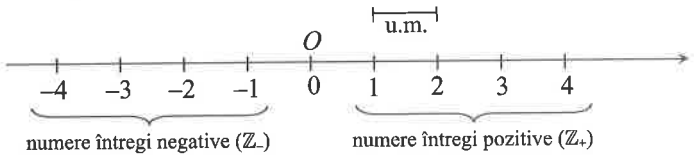
ALGEBRĂ

MULȚIMI NUMERICE

$\mathbb{N}$ – mulțimea numerelor naturale; $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$\mathbb{Z}$ – mulțimea numerelor întregi; $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

$\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$; $\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$.



$\mathbb{Q}$ – mulțimea numerelor raționale; $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z} \text{ și } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$. $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$; $\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$; $\mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$.

$\mathbb{R}$ – mulțimea numerelor reale, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ = mulțimea numerelor iraționale.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

OPERAȚII CU MULȚIMI

Reuniunea: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$. Intersecția: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$.

Diferența: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$.

OPERAȚII CU NUMERE

Factor comun: $f \cdot a \pm f \cdot b = f \cdot (a \pm b)$, $\forall\, a, b, f \in \mathbb{R}$.

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(1+n) \cdot n}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ (citim: „n factorial"); $0! = 1$.

Opusul numărului real r este numărul real $-r$.

Inversul numărului real nenul r este numărul real $r^{-1} = \frac{1}{r}$.

TEOREMA ÎMPĂRȚIRII CU REST

În $\mathbb{N}$: $\forall\, a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, $\exists!\, c, r \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = b \cdot c + r$, $0 \leq r < b$.

În $\mathbb{Z}$: $\forall\, a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $\exists!\, c \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = b \cdot c + r$, $0 \leq r < |b|$.

DIVIZIBILITATE ÎN $\mathbb{N}$

Pentru $d, m \in \mathbb{N}$ spunem că $d \mid m$ dacă există $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $m = d \cdot x$.

Proprietăți:

P_1: $1 \mid n$; $n \mid 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$;

P_2: Dacă $a, d \in \mathbb{N}$ și $d \mid a$, atunci $d \mid a \cdot n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$;

P_3: Dacă $a, b, d \in \mathbb{N}$, $d \mid a$ și $d \mid b$, atunci $d \mid (a \pm b)$.

Criterii de divizibilitate:

I. Folosind ultima cifră a numărului: $2 \mid n \Leftrightarrow u(n) \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$; $5 \mid n \Leftrightarrow u(n) \in \{0, 5\}$; $10 \mid n \Leftrightarrow u(n) = 0$.

II. Folosind suma cifrelor numărului: $3 \mid n \Leftrightarrow 3 \mid S(n)$; $9 \mid n \Leftrightarrow 9 \mid S(n)$.

III. Folosind ultimele două cifre ale numărului: $4 \mid \overline{a\ldots xy} \Leftrightarrow 4 \mid \overline{xy}$; $25 \mid \overline{a\ldots xy} \Leftrightarrow 25 \mid \overline{xy}$.

Număr prim: număr natural care are exact doi divizori.

C.m.m.d.c.: $d = (a, b)$ dacă: i) $d \mid a$ şi $d \mid b$;
ii) dacă $d' \mid a$ şi $d' \mid b$, atunci $d' \mid d$.

Pentru a calcula (a, b) procedăm astfel:
- descompunem numerele a şi b în factori primi;
- luăm factorii primi comuni, o singură dată, la exponentul cel mai mic şi îi înmulţim.

Numerele a şi b sunt relativ prime (prime între ele) dacă $(a, b) = 1$.

Dacă $d = (a, b)$, atunci $a = dx$, $b = dy$, cu $x, y \in \mathbb{N}$, $(x, y) = 1$.

Dacă $n \mid a$ şi $n \mid b$, atunci $n \mid (a, b)$.
Dacă $a \mid b \cdot c$ şi $(a, b) = 1$, atunci $a \mid c$.

C.m.m.m.c.: $m = [a, b]$ dacă: i) $a \mid m$ şi $b \mid m$;
ii) dacă $a \mid m'$ şi $b \mid m'$, atunci $m \mid m'$.

Pentru a calcula $[a, b]$ procedăm astfel:
- descompunem numerele a şi b în factori primi;
- luăm factorii primi comuni şi necomuni, o singură dată, la exponentul cel mai mare şi îi înmulţim.

Dacă $a \mid n$ şi $b \mid n$, atunci $[a, b] \mid n$.

Oricare ar fi $a, b \in \mathbb{N}$, are loc egalitatea $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$.

PUTERI

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori}}$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$; $\qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$.

$a^0 = 1$, $\forall\, a \in \mathbb{R}^*$; $a^1 = a$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$; $1^n = 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$; 0^0 nu are sens.

OPERAŢII CU PUTERI

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $\forall\, a \in \mathbb{R}^*$, $m, n \in \mathbb{Z}$.
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$, $\forall\, a \in \mathbb{R}^*$, $m, n \in \mathbb{Z}$.
3. $(a^m)^n = a^{mn}$, $\forall\, a \in \mathbb{R}^*$, $m, n \in \mathbb{Z}$.
4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{Z}$.
5. $(a : b)^n = a^n : b^n$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{Z}$.
6. $(-1)^n = \begin{cases} 1, \text{ dacă } n \text{ este număr par;} \\ -1, \text{ dacă } n \text{ este număr impar.} \end{cases}$

FRACŢII ORDINARE, FRACŢII ZECIMALE

Fracţie ireductibilă: $\frac{a}{b}$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $(a, b) = 1$. $\qquad$ Fracţii echivalente: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ dacă $a \cdot d = b \cdot c$.

Dacă $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$, atunci $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow b \mid a$.

Transformarea fracţiilor zecimale în fracţii ordinare:

Tipul fracţiei zecimale	Mod de transformare	Exemplu
zecimală finită	$\overline{a,b_1b_2\ldots b_k} = a\frac{\overline{b_1b_2\ldots b_k}}{10^k}$	$2,79 = 2\frac{79}{10^2} = \frac{279}{100}$
periodică simplă	$\overline{a,(b_1b_2\ldots b_k)} = a\frac{\overline{b_1b_2\ldots b_k}}{\underbrace{99\ldots9}_{k \text{ ori}}}$	$13,(24) = 13\frac{24}{99}$
periodică mixtă	$\overline{a,b_1b_2\ldots b_k(c_1c_2\ldots c_p)} = a\frac{\overline{b_1b_2\ldots c_p} - \overline{b_1b_2\ldots b_k}}{\underbrace{99\ldots9}_{p \text{ ori}}\underbrace{00\ldots0}_{k \text{ ori}}}$	$3,61(754) = 3\frac{61754-61}{99900}$

MEDIA ARITMETICĂ

$m_a = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $m_a = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_k}{k}$, $\forall\, x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$.

Dacă $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sunt respectiv ponderile numerelor $x_1, x_2, \ldots, x_k$, atunci:

$$m_p = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_k p_k}{p_1 + p_2 + ... + p_k}$$ (media aritmetică ponderată).

MODULUL UNUI NUMĂR REAL

$|x|$ – modulul (sau valoarea absolută) a unui număr real; $|x| = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \geq 0 \\ -x, \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$.

Proprietăți ale modulului:

P_1: $|x| \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

P_2: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$;

P_3: $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^*$;

P_4: $|x + y| \leq |x| + |y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

PARTEA ÎNTREAGĂ A UNUI NUMĂR REAL: $[x]$

$[x] \leq x < [x] + 1$; $[x] \in \mathbb{Z}$.

PARTEA FRACȚIONARĂ A UNUI NUMĂR REAL: $\{x\}$

$\{x\} = x - [x]$; $0 \leq \{x\} < 1$.

RĂDĂCINA PĂTRATĂ (RADICALUL)

$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a$, unde $a, x \in \mathbb{R}$, $a, x \geq 0$.

REGULI DE CALCUL CU RADICALI

1. Dacă $a \geq 0$, $b \geq 0$, atunci $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$.
2. Dacă $a \geq 0$, $b > 0$, atunci $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.
3. $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$.
4. $\sqrt{a^2} = |a|$, $a \in \mathbb{R}$; $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a$, dacă $a \in \mathbb{R}_+$; $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$.

RAȚIONALIZAREA NUMITORULUI

1. $\frac{\sqrt{b})c}{a\sqrt{b}} = \frac{c\sqrt{b}}{a \cdot b}$, $b > 0$, $a \neq 0$.
2. $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b})c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$, $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b})c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$.
3. $\frac{n}{a\sqrt{b} \pm c\sqrt{d}} = \frac{n(a\sqrt{b} \mp c\sqrt{d})}{a^2 \cdot b - c^2 \cdot d}$, $b > 0$, $d > 0$, $a \neq 0$, $c \neq 0$ și $a^2 b \neq c^2 d$.

FORMULA RADICALILOR COMPUȘI

$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$, unde $c = \sqrt{a^2 - b}$.

INTERVALE ÎN $\mathbb{R}$

$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$; $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$; $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$; $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.

$[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$; $(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$; $(-\infty; a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$; $(-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$.

$\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq a\} = [-a; a]$. $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq a\} = (-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$.

FORMULE DE CALCUL PRESCURTAT

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. 2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. 3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

MEDIA GEOMETRICĂ (PROPORȚIONALĂ)

$m_g = \sqrt{a \cdot b}$, $a \geq 0, b \geq 0$; $a \leq m_g \leq m_a \leq b$, pentru $0 \leq a \leq b$ (inegalitatea mediilor).

PRODUSUL CARTEZIAN

$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ și } y \in B\}$.

Dacă alegem în plan un sistem de coordonate xOy, putem identifica elementele produsului cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cu punctele planului. Oricărei perechi ordonate de numere reale (x_A, y_A) îi corespunde un unic punct $A(x_A, y_A)$; x_A se numește *abscisa* punctului A, iar y_A se numește *ordonata* punctului A.

Distanța dintre două puncte $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$ se calculează după formula: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Coordonatele mijlocului segmentului AB sunt: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$; $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

FUNCȚII

Fie A și B două mulțimi nevide. Dacă printr-un procedeu oarecare facem ca *fiecărui* element din mulțimea A să-i corespundă *un singur* element din mulțimea B, atunci spunem că am definit o funcție de la A la B.

$f: A \to B$; A – domeniul de definiție; B – codomeniul.

Graficul unei funcții: $G_f = \{(x, y) \in A \times B \mid x \in A, y = f(x)\}$.

$M(x, y) \in G_f \Leftrightarrow f(x) = y$, cu $x \in A, y \in B$.

Funcțiile $f: A \to B$ și $g: C \to D$ sunt egale dacă $A = C$, $B = D$ și $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$.

FUNCȚIA DE GRADUL I

Este o funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Graficul unei asemenea funcții este o dreaptă oblică.

$G_f \cap O_y = \{A(0; b)\}$

$G_f \cap O_x = \left\{B\left(-\frac{b}{a}; 0\right)\right\}$ } Punctele de intersecție a graficului cu axele de coordonate.

Dacă $a = 0$, atunci $f(x) = b$ (funcția este constantă); graficul este o dreaptă orizontală.

ECUAȚIA DE GRADUL AL II-LEA

Forma generală: $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$. Discriminantul ecuației: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Dacă $\Delta > 0$, ecuația are două soluții reale distincte: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Dacă $\Delta = 0$, cele două soluții sunt egale: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

Dacă $\Delta < 0$, ecuația nu are soluții reale.

Pentru $\Delta \geq 0$, expresia $ax^2 + bx + c$ se descompune în factori astfel: $a(x - x_1)(x - x_2)$.

GEOMETRIE

UNITĂȚI DE MĂSURĂ

Unitatea de exprimare / Tipul măsurătorii	Submultiplii	Unitatea principală	Multiplii
Lungime	mm $\xrightarrow{:10}$ cm $\xrightarrow{:10}$ dm $\xrightarrow{:10}$ m $\xrightarrow{:10}$ dam $\xrightarrow{:10}$ hm $\xrightarrow{:10}$ km mm $\xleftarrow{\times 10}$ cm $\xleftarrow{\times 10}$ dm $\xleftarrow{\times 10}$ m $\xleftarrow{\times 10}$ dam $\xleftarrow{\times 10}$ hm $\xleftarrow{\times 10}$ km		
Suprafață	$mm^2 \xrightarrow{:10^2} cm^2 \xrightarrow{:10^2} dm^2 \xrightarrow{:10^2} m^2 \xrightarrow{:10^2} dam^2 \xrightarrow{:10^2} hm^2 \xrightarrow{:10^2} km^2$ $mm^2 \xleftarrow{\times 10^2} cm^2 \xleftarrow{\times 10^2} dm^2 \xleftarrow{\times 10^2} m^2 \xleftarrow{\times 10^2} dam^2 \xleftarrow{\times 10^2} hm^2 \xleftarrow{\times 10^2} km^2$		
Volum	$mm^3 \xrightarrow{:10^3} cm^3 \xrightarrow{:10^3} dm^3 \xrightarrow{:10^3} m^3 \xrightarrow{:10^3} dam^3 \xrightarrow{:10^3} hm^3 \xrightarrow{:10^3} km^3$ $mm^3 \xleftarrow{\times 10^3} cm^3 \xleftarrow{\times 10^3} dm^3 \xleftarrow{\times 10^3} m^3 \xleftarrow{\times 10^3} dam^3 \xleftarrow{\times 10^3} hm^3 \xleftarrow{\times 10^3} km^3$		

Pentru suprafețe:

1 ha = 100 ari = 10 000 m^2; 1 ar = 100 m^2.

Pentru capacitate, unitatea principală este litrul (ℓ).

1 dm^3 = 1 ℓ; 1 cm^3 = 1 mℓ; 1 m^3 = 1000 ℓ.

Unitatea principală pentru masă este kilogramul (kg).

1 kg = 1000 g; 1 t = 1000 kg; 1 q = 100 kg.

Unitatea principală pentru măsurarea timpului este secunda (s).

1 min = 60 s; 1 h = 60 min; 1 zi = 24 h.

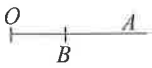
UNGHIUL

Unghi = reuniunea a două semidrepte având aceeași origine.

Unghiurile se măsoară în grade, minute și secunde: 1° = 60'; 1' = 60".

Clasificarea unghiurilor:

Unghi nul

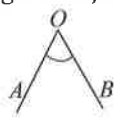


$\sphericalangle AOB = 0°$

Unghi alungit

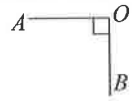
$\sphericalangle AOB = 180°$

Unghi ascuțit



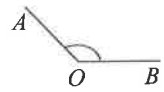
$\sphericalangle AOB < 90°$

Unghi drept



$\sphericalangle AOB = 90°$

Unghi obtuz



$\sphericalangle AOB > 90°$

Unghiuri congruente = unghiuri care au aceeași măsură.

Bisectoarea unui unghi = semidreapta cu originea în vârful unghiului, situată în interiorul acestuia, care îl împarte în două unghiuri congruente.

Unghiuri adiacente: au același vârf, o latură comună și nu au puncte interioare comune.

Unghiuri complementare: două unghiuri care au suma măsurilor de 90°.

Unghiuri suplementare: două unghiuri care au suma măsurilor de 180°.

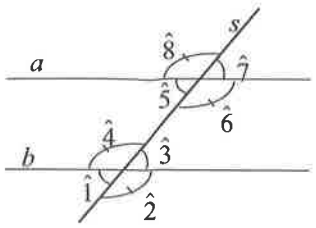
Unghiuri opuse la vârf: două unghiuri cu vârful comun și laturile în prelungire.

Două unghiuri opuse la vârf sunt congruente.

Drepte paralele: două drepte coplanare, fără puncte comune.

Drepte perpendiculare: două drepte concurente care formează un unghi drept.

Unghiuri congruente formate de două drepte paralele cu o secantă:

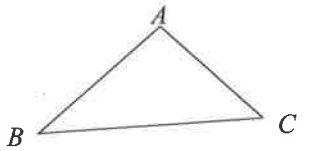


$\hat{3} \equiv \hat{5}$, $\hat{4} \equiv \hat{6}$ — **alterne interne**

$\hat{1} \equiv \hat{7}$, $\hat{2} \equiv \hat{8}$ — **alterne externe**

$\hat{1} \equiv \hat{5}$, $\hat{4} \equiv \hat{8}$, $\hat{2} \equiv \hat{6}$, $\hat{3} \equiv \hat{7}$ — **corespondente**

TRIUNGHIUL



Notație: ΔABC

Elemente:

- vârfuri: A, B, C
- laturi: AB, BC, AC
- unghiuri: $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$

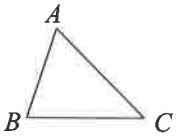
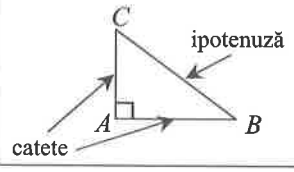
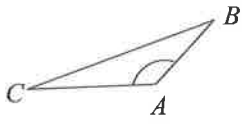
$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$

Inegalitatea triunghiului:

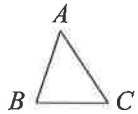
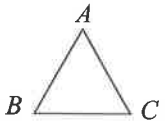
$|AB - AC| < BC < AB + AC$

Clasificare:

I. După unghiuri

Ascuțitunghic	Dreptunghic	Obtuzunghic
		

II. După laturi

Oarecare	Isoscel	Echilateral
		

$AB = AC$

$AB = BC = CA$

Triunghiuri congruente: au laturile omoloage congruente și unghiurile omoloage congruente.

Cazuri de congruență:

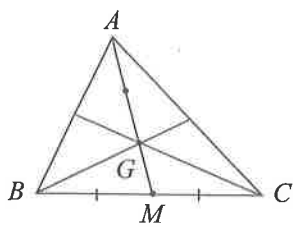
Triunghiuri oarecare	Triunghiuri dreptunghice
1. L.U.L.	1. C.C.
2. U.L.U.	2. C.U.
3. L.L.L.	3. I.U.
	4. I.C.

LINII IMPORTANTE ÎN TRIUNGHI

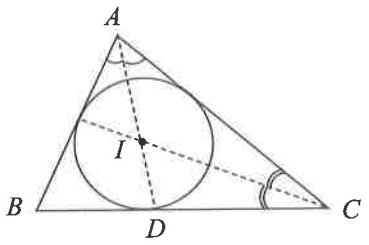
Mediana: segmentul care unește un vârf al triunghiului cu mijlocul laturii opuse.

Centrul de greutate (G) = punctul de intersecție a medianelor.

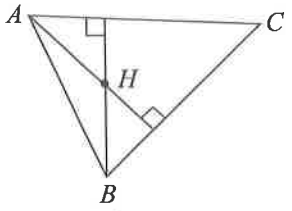
$AG = \frac{2}{3} AM$; $GM = \frac{1}{3} AM$.



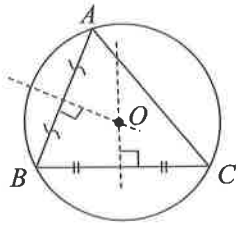
Bisectoarea: semidreapta cu originea în vârful unghiului, interioară unghiului, ce formează cu laturile unghiului două unghiuri congruente.
Centrul cercului înscris (I) = punctul de intersecție a bisectoarelor.
$d(I, AB) = d(I, AC) = d(I, BC) = r$.



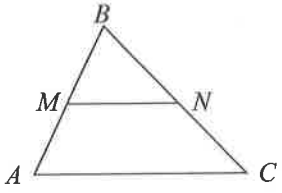
Înălțimea: segmentul ce trece printr-un vârf al triunghiului și este perpendicular pe latura opusă.
Ortocentrul triunghiului (H) = punctul de intersecție a înălțimilor.



Mediatoarea: dreapta perpendiculară pe o latură a triunghiului, ce trece prin mijlocul acesteia.
Centrul cercului circumscris (O) = punctul de intersecție a mediatoarelor.
$OA = OB = OC = R$.



Linia mijlocie în triunghi: segment care unește mijloacele a două laturi ale triunghiului.
Linia mijlocie este paralelă cu a treia latură și egală cu jumătate din lungimea acesteia.



TRIUNGHIURI SPECIALE

Triunghiul isoscel:
- are două laturi congruente (a treia se numește bază);
- unghiurile alăturate bazei sunt congruente;
- bisectoarea unghiului din vârf este mediană, înălțime și mediatoare corespunzătoare bazei.

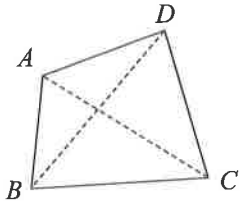
Triunghiul echilateral:
- are toate laturile congruente;
- are toate unghiurile congruente (fiecare având măsura de 60°);
- bisectoarea oricărui unghi este mediană, înălțime și mediatoare corespunzătoare laturii opuse.

Triunghiul dreptunghic:
- are un unghi drept, iar celelalte două sunt ascuțite și complementare;
- mediana corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei;
- cateta opusă unui unghi de 30° este egală cu jumătate din ipotenuză (teorema 30°-60°-90°).

PATRULATERE

Elemente:
- vârfuri: A, B, C, D;
- laturi: AB, BC, CD, AD;
- unghiuri: $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C, \sphericalangle D$;
- diagonale: AC, BD.

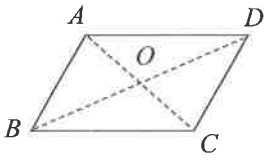
$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360°$



patrulater convex

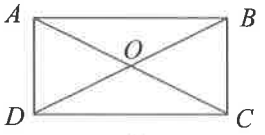
Paralelogramul = patrulaterul cu laturile opuse paralele.

- laturile opuse sunt congruente;
- unghiurile opuse sunt congruente;
- unghiurile alăturate sunt suplementare;
- diagonalele se înjumătățesc.



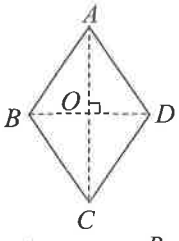
Dreptunghiul = paralelogramul cu un unghi drept.

- are toate proprietățile paralelogramului;
- are toate unghiurile drepte;
- diagonalele sunt congruente.



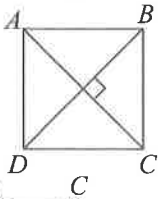
Rombul = paralelogramul cu două laturi consecutive congruente.

- are toate proprietățile paralelogramului;
- toate laturile sunt congruente;
- diagonalele sunt perpendiculare și sunt bisectoarele unghiurilor rombului.

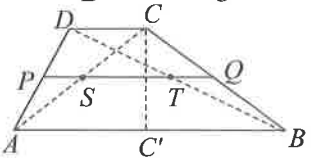


Pătratul = rombul cu un unghi drept.

- are toate proprietățile rombului;
- are toate proprietățile dreptunghiului.

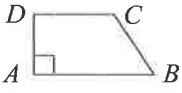


Trapezul = patrulaterul cu două laturi paralele și celelalte două laturi neparalele.
Dacă $CC' \perp AB$, atunci CC' = înălțimea trapezului.
Linia mijlocie (PQ) = segmentul ce unește mijloacele laturilor neparalele.



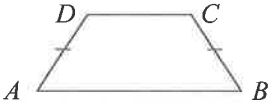
$PQ = \dfrac{(AB+CD)}{2}$ și $ST = \dfrac{|AB-CD|}{2}$, unde $\{T\} = PQ \cap BD$, $\{S\} = PQ \cap AC$.

Trapez dreptunghic = trapezul având un unghi drept.



Trapez isoscel = trapezul având laturile neparalele congruente.

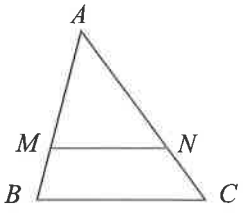
- unghiurile alăturate bazelor sunt congruente;
- unghiurile opuse sunt suplementare;
- diagonalele sunt congruente.



RELAȚII METRICE

Teorema lui Thales:

$MN \parallel BC \Leftrightarrow \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{NC}$

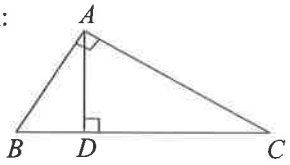


Triunghiuri asemenea:

$\Delta ABC \sim \Delta MNP$ dacă $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{AC}{MP} = \dfrac{BC}{NP}$ și $\measuredangle A \equiv \measuredangle M$, $\measuredangle B \equiv \measuredangle N$, $\measuredangle C \equiv \measuredangle P$.

- Dacă ΔABC este dreptunghic în A și $D = \text{pr}_{BC} A$, atunci:

Teorema catetei:
$AC^2 = BC \cdot CD$; $AB^2 = BC \cdot BD$.
Teorema înălțimii:
$AD^2 = BD \cdot DC$.

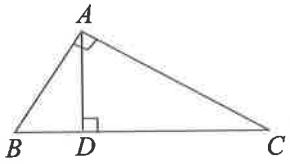


Teorema lui Pitagora:

$BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Reciproca teoremei lui Pitagora:

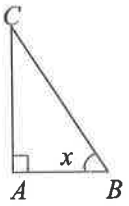
Dacă $BC^2 = AB^2 + AC^2$, atunci $m(\sphericalangle BAC) = 90°$.



Elemente de trigonometrie

Dacă ABC este triunghi dreptunghic în A și $x \in (0°, 90°)$ este măsura unui unghi ascuțit, atunci:

$\sin x = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuză}}$; $\cos x = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{ipotenuză}}$; $\operatorname{tg} x = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{cateta alăturată}}$; $\operatorname{ctg} x = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{cateta opusă}}$.

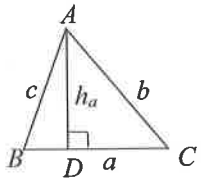


Funcția trigonometrică \ Unghiul	30°	45°	60°
sin *t*	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos *t*	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg *t*	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg *t*	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

ARII

Triunghi oarecare:

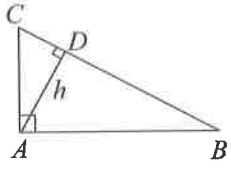
$$\mathcal{A} = \frac{BC \cdot AD}{2} \left(= \frac{a \cdot h_a}{2} \right) = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin(\sphericalangle BAC)}{2}$$



Triunghi dreptunghic:

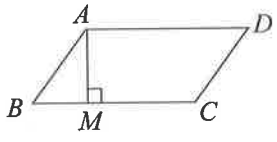
$$\mathcal{A} = \frac{AB \cdot AC}{2} \left(= \frac{c_1 \cdot c_2}{2} \right) = \frac{h \cdot ip}{2};$$

$$h = \frac{c_1 \cdot c_2}{ip}$$



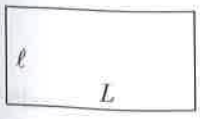
Paralelogram:

$$\mathcal{A} = BC \cdot AM = AB \cdot BC \cdot \sin(\sphericalangle ABC)$$



Dreptunghi:

$\mathcal{A} = L \cdot \ell$

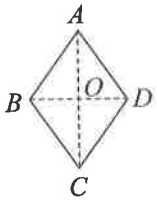


Pătrat:

$\mathcal{A} = a^2$

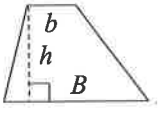
Romb:

$$\mathcal{A} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \ell^2 \sin(\sphericalangle A)$$



Trapez:

$$\mathcal{A} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

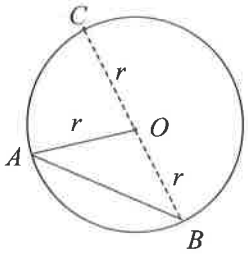


Raportul ariilor a două figuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.

CERCUL

Cerc = mulțimea punctelor din plan situate la distanța r ($r > 0$) față de un punct fix O; notăm $\mathcal{C}(O, r)$.

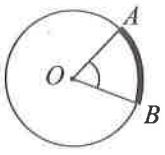
- centrul cercului: punctul O;
- raza cercului: segmentul OA sau numărul care reprezintă lungimea acestuia;
- coardă: segmentul AB;
- diametrul: segmentul BC sau numărul care reprezintă lungimea acestuia;
- arc de cerc: $\overset{\frown}{AB}$.



Unghiuri relative la cerc:

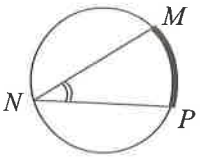
- unghi la centru: $\sphericalangle AOB$

$m(\overset{\frown}{AB}) = \sphericalangle AOB$



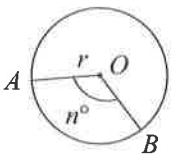
- unghi înscris în cerc: $\sphericalangle MNP$

$\sphericalangle MNP = \dfrac{m(\overset{\frown}{MP})}{2}$



$L_{cerc} = 2\pi r$; $\mathcal{A}_{disc} = \pi r^2$;

$L_{\overset{\frown}{AB}} = \dfrac{\pi r n}{180}$; $\mathcal{A}_{sector(AOB)} = \dfrac{\pi r^2 n}{360}$.



POLIGOANE REGULATE

Poligon regulat = poligonul având toate laturile congruente și toate unghiurile congruente.
Orice poligon regulat poate fi înscris într-un cerc și poate fi circumscris unui cerc, cele două cercuri fiind concentrice.
Apotema poligonului regulat = distanța de la centrul cercului circumscris la o latură.

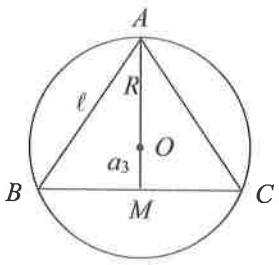
Triunghiul echilateral:

$h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$;

$R = AO = \dfrac{2}{3}h$;

$a_3 = OM = \dfrac{1}{3}h$;

$\mathcal{A} = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$.



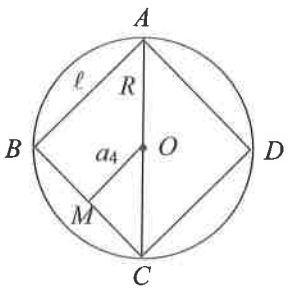
Pătratul:

$AC = d = 2R = \ell\sqrt{2}$;

$R = AO = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$;

$a_4 = OM = \dfrac{\ell}{2}$;

$\mathcal{A} = \ell^2$.



Hexagonul regulat:

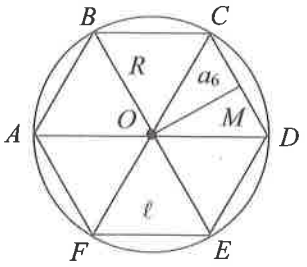
$AD = 2R$;

$AC = R\sqrt{3}$;

ΔAOB echilateral, deci $R = AO = \ell$;

$a_6 = OM = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$;

$\mathcal{A} = 6 \cdot \mathcal{A}_{AOB} = 6 \cdot \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$.



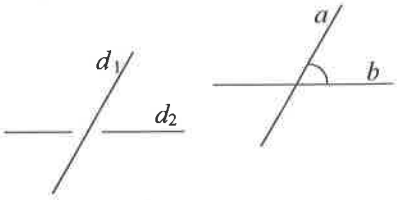
Unghiul a două drepte în spațiu

• Dacă d_1 și d_2 sunt coplanare și concurente, atunci $\sphericalangle(d_1, d_2)$ reprezintă măsura unuia dintre unghiurile neobtuze care se obțin în jurul punctului lor comun.

• Dacă $d_1 = d_2$ sau $d_1 \parallel d_2$, atunci $\sphericalangle(d_1, d_2) = 0°$.

• Dacă d_1 și d_2 sunt necoplanare, atunci $m(\sphericalangle(d_1, d_2))$ este măsura unghiului dintre dreptele coplanare obținute construind, prin același punct, paralele la d_1 și d_2.

$$\left.\begin{array}{l} a \parallel d_1 \\ b \parallel d_2 \\ a \cap b = \{O\} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle(d_1, d_2) = \sphericalangle(a, b).$$

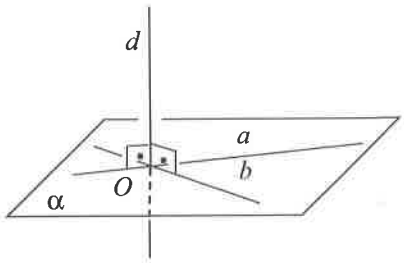


Dreaptă perpendiculară pe plan

• $a \perp b$ dacă $\sphericalangle(a, b) = 90°$;

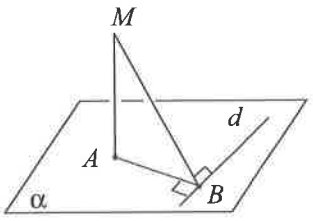
• $d \perp \alpha$ dacă d este perpendiculară pe orice dreaptă din α.

Teoremă: Dacă $d \perp a$, $d \perp b$, $a \cap b = \{O\}$, $a, b \subset \alpha$, atunci $d \perp \alpha$.



Teorema celor trei perpendiculare

$$\left.\begin{array}{l} MA \perp \alpha \\ AB,\ d \subset \alpha \\ AB \perp d \end{array}\right\} \overset{T3\perp}{\Rightarrow} MB \perp d.$$



Reciproca 1:

Dacă $MA \perp \alpha$, $d \subset \alpha$, $MB \perp d$, atunci $AB \perp d$.

Reciproca 2:

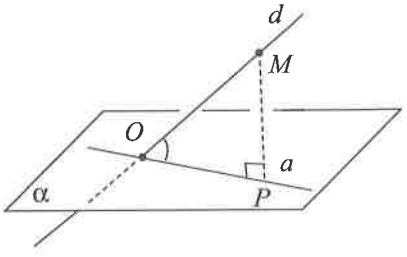
Dacă $MA \perp AB$, $AB \perp d$, $MB \perp d$, $AB, d \subset \alpha$, atunci $MA \perp \alpha$.

Unghiul dintre o dreaptă și un plan

• Dacă $d \parallel \alpha$, atunci $\sphericalangle(d, \alpha) = 0°$.

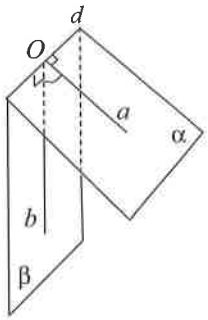
• Dacă $d \perp \alpha$, atunci $\sphericalangle(d, \alpha) = 90°$.

• În celelalte situații, $\sphericalangle(d, \alpha) = \sphericalangle(d, a) = \sphericalangle MOP$, unde $a = \text{pr}_\alpha d$.



Unghi diedru

• Dacă $\alpha \cap \beta = d$, $a \perp d$, $a \subset \alpha$, $b \perp d$, $b \subset \beta$, atunci $\sphericalangle(\alpha, \beta) \overset{\text{def.}}{=} \sphericalangle(a, b)$.

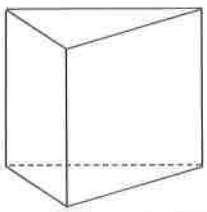
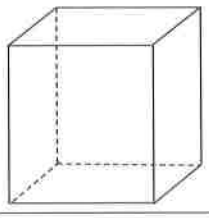
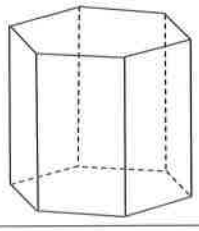


Plane perpendiculare

• $\alpha \perp \beta$ dacă $\sphericalangle(\alpha, \beta) = 90°$.

Dacă $d \perp \alpha$ și $d \subset \beta$, atunci $\alpha \perp \beta$.

Prisma regulată = prisma dreaptă cu baza poligon regulat.

Prisma triunghiulară regulată	Prisma patrulateră regulată	Prisma hexagonală regulată
		

Pentru orice prismă regulată:

$\mathcal{A}_{lat} = \mathcal{P}_{bazei} \cdot h$; $\quad \mathcal{A}_{tot} = \mathcal{A}_{lat} + 2\mathcal{A}_{bazei}$; $\quad \mathcal{V} = \mathcal{A}_{bazei} \cdot h$.

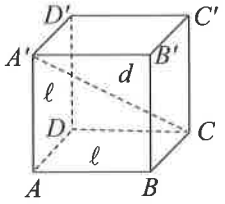
Cubul = prisma patrulateră regulată cu înălțimea egală cu muchia bazei.

$\mathcal{A}_{lat} = 4\ell^2$;

$\mathcal{A}_{tot} = 6\ell^2$;

$\mathcal{V} = \ell^3$;

$d = \ell\sqrt{3}$.

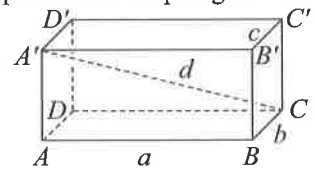


Paralelipipedul dreptunghic = prisma dreaptă cu baza dreptunghi.

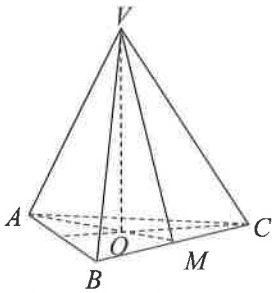
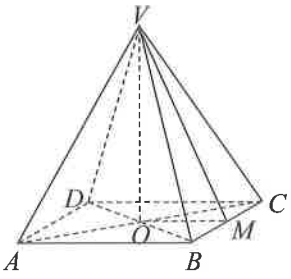
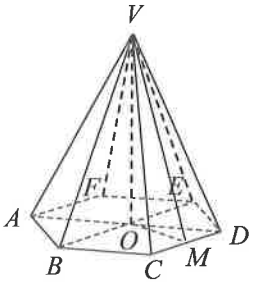
$\mathcal{A}_{tot} = 2(ab + ac + bc)$;

$\mathcal{V} = a \cdot b \cdot c$;

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.



Piramida regulată = piramida cu baza poligon regulat și cu muchiile laterale egale.
Într-o piramidă regulată, înălțimea cade în centrul bazei.
Apotema piramidei = înălțimea unei fețe laterale.

Piramida triunghiulară regulată	Piramida patrulateră regulată	Piramida hexagonală regulată
 $\sphericalangle$(m. lat., bază) = $\sphericalangle VAO$ $\sphericalangle$(f. lat., bază) = $\sphericalangle VMO$	 $\sphericalangle$(m. lat., bază) = $\sphericalangle VAO$ $\sphericalangle$(f. lat., bază) = $\sphericalangle VMO$	 $\sphericalangle$(m. lat., bază) = $\sphericalangle VAO$ $\sphericalangle$(f. lat., bază) = $\sphericalangle VMO$

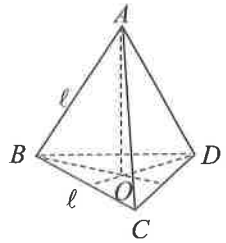
Pentru orice piramidă regulată:

$\mathcal{A}_{lat} = \dfrac{\mathcal{P}_{bazei} \cdot a_{pir.}}{2}$; $\quad \mathcal{A}_{tot} = \mathcal{A}_{lat} + \mathcal{A}_{bazei}$; $\quad \mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{A}_{bazei} \cdot h}{3}$.

Tetraedrul regulat = piramida triunghiulară cu toate muchiile egale.

$\mathcal{A}_{lat} = 3 \cdot \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$; $\quad \mathcal{A}_{tot} = \ell^2\sqrt{3}$;

$\mathcal{V} = \dfrac{\ell^3\sqrt{2}}{12}$; $\quad h = AO = \dfrac{\ell\sqrt{6}}{3}$.



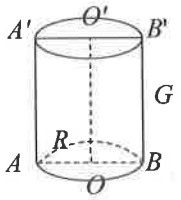
Trunchiul de piramidă regulată = poliedrul obținut în urma secționării unei piramide regulate cu un plan paralel cu baza, eliminând piramida ce se formează la vârf.

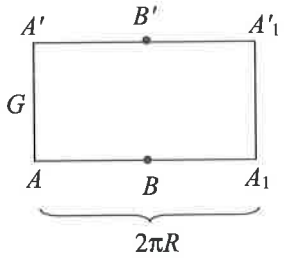
$\mathcal{A}_{lat} = \dfrac{(\mathcal{P}_{\text{bazei mari}} + \mathcal{P}_{\text{bazei mici}}) \cdot \text{apotema trunchi}}{2}$; $\mathcal{A}_{tot} = \mathcal{A}_{lat} + \mathcal{A}_{\text{bazei mari}} + \mathcal{A}_{\text{bazei mici}}$;

$\mathcal{V} = \dfrac{h}{3}(\mathcal{A}_{\text{bazei mari}} + \mathcal{A}_{\text{bazei mici}} + \sqrt{\mathcal{A}_{\text{bazei mari}} \cdot \mathcal{A}_{\text{bazei mici}}})$.

Cilindrul circular drept

$H = G$;
$\mathcal{A}_l = 2\pi RG$;
$\mathcal{A}_t = 2\pi R(G + R)$;
$\mathcal{V} = \pi R^2 H$.

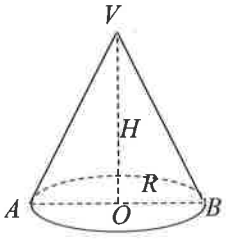


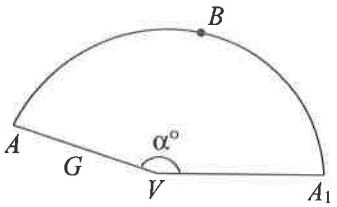


Conul circular drept

$G^2 = R^2 + H^2$; $\alpha° = \dfrac{360° \times R}{G}$;

$\mathcal{A}_l = \pi RG$; $\mathcal{A}_t = \pi R(G + R)$; $\mathcal{V} = \dfrac{\pi R^2 H}{3}$.

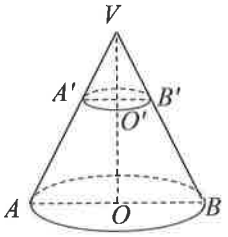




Secțiuni paralele cu baza în conul circular drept

$\dfrac{r}{R} = \dfrac{h}{H} = \dfrac{g}{G}$; $\dfrac{\mathcal{A}_{l\,con\,mic}}{\mathcal{A}_{l\,con\,mare}} = \left(\dfrac{r}{R}\right)^2$;

$\dfrac{\mathcal{A}_{t\,con\,mic}}{\mathcal{A}_{t\,con\,mare}} = \left(\dfrac{r}{R}\right)^2$; $\dfrac{\mathcal{V}_{con\,mic}}{\mathcal{V}_{con\,mare}} = \left(\dfrac{r}{R}\right)^3$;



Trunchiul de con circular drept

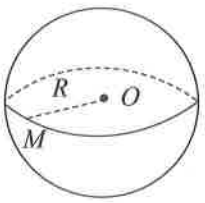
$G_1 = G - g$; $I = H - h$; $G_1^2 = I^2 + (R - r)^2$;

$\mathcal{A}_l = \pi G_1(R + r)$; $\mathcal{A}_t = \pi G_1(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$;

$\mathcal{V} = \dfrac{\pi \cdot I}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$.

Sfera

$\mathcal{A}_{sferă} = 4\pi R^2$; $\mathcal{V}_{sferă} = \dfrac{4\pi R^3}{3}$.



TEME RECAPITULATIVE

TEMA 1. Numere naturale. Numere întregi

1. Calculați:
a) $60 - 40 : 4$; b) $25 - 20 : (13 - 8)$; c) $142 : (1 + 2 \cdot 35)$; d) $12 + 60 : [14 - 2 \cdot (3 + 2)]$.

2. Aflați numărul natural de două cifre care adunat cu suma cifrelor sale dă 54.

3. Suma a două numere naturale este 11. Care este valoarea minimă și valoarea maximă a produsului lor?

4. Determinați toate numerele naturale n, știind că n împărțit la 12 dă câtul 5 și restul un pătrat perfect.

5. Determinați toate numerele naturale care, împărțite la un număr de două cifre, dau câtul 10 și restul 97.

6. Aflați numerele naturale a și b, știind că suma lor este egală cu 19, iar a împărțit la b dă câtul și restul 3.

7. Suma a trei numere naturale este 502. Aflați cele trei numere, știind că al doilea este triplul primului și că, împărțind pe al treilea la al doilea, obținem câtul 7 și restul 2.

8. Determinați numărul $\overline{abc}$, știind că $b = a + 2c$ și $\overline{abc}$ împărțit la 112 dă câtul a și restul 59.

9. Calculați:
a) $2^3 + 3^2 - 4^0$; b) $0^7 + 3^{10} : 3^8 - 9$;
c) $(2^5)^{12} : 2^{56} - 3^{20} : 3^{18}$; d) $25^7 : 5^{14} + 3^{90} : 27^{29}$;
e) $(2 \cdot 2^2 \cdot 2^5)^{10} : 2^{75}$; f) $(2^3 \cdot 3^4)^{12} : (2^{35} \cdot 3^{45})$;
g) $(2^{10} + 2^{11} + 2^{12}) : 2^{10}$; h) $2^5 - 3 \cdot [3 \cdot 7 - 2 \cdot (6^2 - 2^3) : 4] + 1^{123}$.

10. Fie numerele naturale $a = 2^{29} + 2^{40} : 2^{11}$ și $b = 12^{20} : 2^{40}$.
a) Arătați că $a = 2^{30}$. b) Comparați numerele a și b.

11. a) Arătați că numărul natural $a = 5 \cdot 3^{42} + 9^{20} - 10 \cdot 3^{40}$ este pătrat perfect.
b) Demonstrați că numărul natural $b = 3^{42} + 2^{43}$ nu este pătrat perfect.

12. Fie numărul natural $a = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{10} + 3^{11}$.
a) Arătați că a este număr par. b) Arătați că numărul a este divizibil cu 10.

13. Demonstrați că numărul natural $a = 2^{n+3} \cdot 7^n + 7^{n+1} \cdot 2^n - 3 \cdot 14^n$ se divide cu 12, pentru orice număr natural n.

14. Demonstrați că, dacă $\overline{ab} = 3 \cdot \overline{cd}$, atunci numărul natural $\overline{abcd}$ se divide cu 7.

15. Determinați toate numerele prime p, q, r, știind că $p + 4q + 54r = 392$.

16. a) Descompuneți în factori primi fiecare dintre numerele: 56, 72, 144 și 2700.
b) Câți divizori naturali are numărul 48?

17. Determinați toate valorile posibile ale numărului natural n în fiecare dintre următoarele cazuri:
a) $n = \overline{7x}$ și $2 \mid n$; b) $n = \overline{6xy}$, $2 \mid n$ și $9 \mid n$;
c) $n = \overline{x5y}$, $4 \mid n$ și $3 \mid n$; d) $n = \overline{1xy}$, $5 \mid n$ și suma cifrelor lui n este 8.

18. Calculați cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun pentru următoarele numere:
a) 48, 60; b) 12, 15, 18.

19. Elevii unei clase au cumpărat 168 de mere, 96 de portocale și 72 de banane. Ei vor să facă pachete cu fructe pentru a le oferi unui cămin de bătrâni. Toate pachetele trebuie să fie la fel și să conțină și mere și portocale și banane. Care este cel mai mare număr de pachete pe care pot să le facă elevii?

20. La o florărie, vânzătoarea observă că, dacă grupează toate florile câte 18 și toate florile câte 24, rămân de fiecare dată câte trei flori. Aflați câte flori sunt în florărie, știind că numărul lor este cuprins între 450 și 570.

21. La o ședință de pregătire, antrenorul împarte sportivii în grupe numeric egale (cu cel puțin 2 sportivi) pentru diverse exerciții. Dacă face grupele de câte 6 sportivi, rămân 3 sportivi în afară, dacă face grupele de câte 4, rămâne unul în afară, iar dacă face grupele de câte 9, atunci 6 dintre sportivi nu sunt folosiți. Aflați câți sportivi are antrenorul, știind că numărul lor este mai mic decât 50. Cum ar trebui să facă grupele antrenorul, pentru ca să nu rămână sportivi pe dinafară și numărul grupelor să fie cât mai mare?

22. Sanda a cumpărat CD-uri în valoare de 486 de lei. Unele CD-uri au costat 54 de lei, iar celelalte au costat 90 de lei. Aflați câte CD-uri a cumpărat Sanda.

23. a) Ordonați crescător numerele întregi: 1, –3, 0, –2, –7, 9, 4.
b) Ordonați descrescător numerele întregi: –4, 1, 3, –2, 7, –1, –5.

24. Produsul a trei numere întregi a, b și c este egal cu 8. Aflați cea mai mică valoare posibilă a sumei $a + b + c$.

25. Calculați:

a) $3 \cdot (-5) - (-12)$;
b) $(1 - 2 + 3 - 4) : (-2)$;
c) $(-45) : (3 - 8) + (-2) \cdot 2$;
d) $13 + 24 : (-2)$;
e) $(-1)^4 + 2 \cdot (-1)^3$;
f) $(-2)^2 - (-2)^3 + 3^2$;
g) $2^8 : (-2)^6 - (-5)^0$;
h) $2 - (-3)^4 \cdot 3^5 : (-3)^7$.

26. Un meteorolog a urmărit temperatura medie în șase zile consecutive. În prima zi, temperatura medie a fost de $-22°C$, iar în fiecare din zilele următoare, temperatura medie a crescut cu câte două grade față de ziua precedentă. Calculați media temperaturilor medii din cele șase zile.

27. Calculați suma tuturor divizorilor întregi ai numărului 288.

28. Determinați toate numerele întregi x cu proprietatea că $x + 1$ divide $2x + 5$.

29. Determinați toate numerele întregi x cu proprietatea că $|x| > 3$ și $|x + 1| \leq 6$.

30. Determinați toate perechile ordonate de numere întregi (x, y) cu proprietatea că $xy + x + y = 4$.

TEMA 2. Numere raționale

1. Calculați:

a) $2{,}25 + 3{,}75 - 5$;
b) $4 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot (-0{,}2)$;
c) $1{,}4 \cdot 1{,}5 - 4{,}1$;
d) $4{,}35 : 0{,}15 - 140 \cdot 0{,}2$;
e) $\frac{1}{12} - \frac{1}{18} - \frac{1}{9}$;
f) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{12}{5}$;
g) $15 \cdot \left(0{,}5 - \frac{1}{6} + 0{,}6\right)$;
h) $[0{,}5 + 0{,}(3)] : \left[1{,}1(6) - \frac{1}{6}\right]$.

2. Determinați numărul natural n în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) fracția $\frac{2n+1}{n+4}$ este subunitară; b) fracția $\frac{2n}{n+3}$ este echiunitară; c) fracția $\frac{n+13}{3n+1}$ este supraunitară.

3. Determinați opusul, inversul și modulul numărului rațional $a = -1{,}25$.

4. Stabiliți care dintre următoarele numere raționale se pot reprezenta sub formă de fracție zecimală finită (cu un număr finit de zecimale nenule): $\frac{6}{15}, \frac{11}{2}, \frac{5}{7}, \frac{13}{24}, \frac{8}{15}, \frac{2}{3}, \frac{1}{625}$.

5. a) Ordonați crescător următoarele numere raționale: $-\frac{1}{2}; 1{,}1(3), -0{,}(4); 1{,}7; \frac{4}{3}; -\frac{5}{4}$.

b) Ordonați descrescător următoarele numere raționale: 0,33; 0,(3); 0,3(2); 0,(32); 0,2(3); 0,3.

6. Aflați partea întreagă și partea fracționară ale numerelor $a = \frac{23}{4}$ și $b = -\frac{9}{5}$.

7. Se consideră mulțimea $A = \left\{-\frac{23}{3}; -7; -3{,}4; 0{,}5; 1{,}(2); 2; 5\right\}$. Determinați mulțimile $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$.

8. Fie numerele raționale $a = 30 - 5 \cdot [40 : (-8) - 2 \cdot (5 - 10)]$ și $b = 3 + 6 \cdot \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{7}\right) : \left(-\frac{22}{7}\right)\right]$. Arătați că $a = 5b$.

9. Se consideră numărul $a = \frac{360}{59} \cdot \left(\frac{1}{45} + \frac{7}{60} + \frac{1}{40}\right)$. Calculați $(a - 2)^{10}$.

10. Fie $a = \left[\frac{1}{30} + \frac{1}{19} \cdot (0{,}(6) + 0{,}6)\right] : 0{,}01$. Arătați că a este un număr natural.

11. Se consideră numărul rațional $a = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10}$. Arătați că $0{,}8 < a < 1$.

12. Fie $a=\left(\frac{2}{3}\right)^n:\frac{2^{n+1}+6^{n+1}}{3^{n+1}+9^{n+1}}$, unde $n\in\mathbb{N}$. Calculați $\left(\frac{2a}{3}\right)^{100}$.

13. Media armonică a unor numere nenule este inversul mediei aritmetice a inverselor numerelor considerate. Calculați media armonică a numerelor 1, 2 și 4.

14. Fie numărul rațional $a=(-1)^n\cdot\frac{2}{3}+(-1)^{n+1}\cdot\frac{3}{4}+(-1)^{n+2}\cdot\frac{5}{6}$, unde $n\in\mathbb{N}$. Calculați $|a|$.

15. Se consideră numărul rațional $x=\frac{\overline{a,b(c)}+\overline{b,c(a)}+\overline{c,a(b)}}{a+b+c}$, unde $a, b, c\in\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ și $a\neq b\neq c\neq a$. Arătați că $9x$ este un număr natural.

16. Aflați cea mai mică fracție ireductibilă $\frac{a}{b}$ ($a, b\in\mathbb{N}^*$, $(a, b)=1$) cu proprietatea că înmulțită cu $\frac{48}{5}$ și cu $\frac{36}{7}$ dă, de fiecare dată, un număr natural.

17. În clasa de 28 de elevi a doamnei învățătoare Sofia sunt cu 4 băieți mai mulți decât fete. Determinați raportul dintre numărul fetelor și cel al băieților din clasa doamnei Sofia.

18. Într-o școală, numărul fetelor este egal cu cel al băieților. Într-o zi, $\frac{3}{4}$ dintre fete și $\frac{2}{3}$ dintre băieți au plecat în excursie. Aflați raportul dintre numărul fetelor care au mers în excursie și cel al elevilor care au mers în excursie.

19. a) Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr de două cifre, acesta să fie format din cifre consecutive.

b) Determinați probabilitatea ca, aruncând două zaruri, suma numerelor obținute să fie 6.

20. Patru studente și șase studenți au plecat într-o expediție. Media vârstelor studentelor este 22,5 ani, iar media vârstelor studenților este 25 ani. Calculați vârsta medie a grupului expedițional.

21. În tabelul de mai jos sunt înregistrate notele obținute de elevii unei clase la un test. Aflați media clasei la acest test.

Nota	6	7	8	9	10
Nr. elevi	6	1	5	5	11

22. Dacă se amestecă 20 kg de bomboane de 20 de lei kilogramul cu 5 kg de bomboane de 24 de lei kilogramul și cu 15 kg de bomboane de 16 lei kilogramul, care va fi prețul unui kilogram de amestec?

23. Se știe că media semestrială la matematică a unui elev este egală cu media aritmetică ponderată dintre media aritmetică a notelor din timpul semestrului, cu ponderea 3 și nota de la teză, cu ponderea 1; rezultatul se rotunjește la cel mai apropiat întreg (6,50 se rotunjește la 7; 7,50 se rotunjește la 8 etc.). Calculați media la matematică a unui elev din clasa a VIII-a care are într-un semestru notele: 6, 7, 8, 8, 9 și a obținut 8 la teză.

24. O grădină în formă de dreptunghi se împrejmuiește cu un gard. Lungimea grădinii este de 153 de metri, iar lățimea este egală cu $\frac{7}{9}$ din lungime. Aflați lungimea totală a gardului.

25. Andrei are 100 de lei. Cu trei sferturi din suma pe care o are, el cumpără 6 caiete de același fel. Aflați prețul unui caiet.

26. Aurel are cu 10 lei și 50 de bani mai mult decât Bogdan, iar cei doi au, împreună, 90 de lei și 50 de bani. Aflați câți lei are Aurel și câți lei are Bogdan.

27. Fiecare dintre fetele înscrise la un club de echitație ar vrea să aibă calul ei, dar, din păcate, la club sunt cai doar pentru $\frac{10}{13}$ dintre fete. Se știe că numărul de picioare ale cailor și fetelor este 990. Aflați numărul fetelor care trebuie să aștepte pe margine la începerea unei lecții de echitație.

28. Un drumeț a parcurs o distanță în trei zile. În prima zi a mers $\frac{3}{8}$ din distanță. A doua zi a mers $\frac{2}{5}$ din rest și încă 8 km. A treia zi a parcurs restul de 28 km. Aflați ce distanță a parcurs drumețul în cele trei zile.

29. Iulia citește într-o zi 0,(3) din numărul total de pagini ale unei cărți, a doua zi ea citește 0,6 din numărul de pagini rămase, iar a treia zi Iulia citește ultimele 108 pagini. Aflați câte pagini are cartea citită de Iulia.

30. Andrei are două pâini, Barbu are trei pâini și Călin nu are nicio pâine. La ora prânzului, cei trei colegi se așază la masă și împart în mod egal cele 5 pâini. La sfârșit, Călin plătește 10 lei colegilor săi pentru ceea ce a mâncat. Stabiliți cum trebuie împărțiți banii primiți între Andrei și Barbu.

TEMA 3. Rapoarte. Proporții. Procente

1. Într-o clasă cu 30 de elevi, raportul dintre numărul fetelor și numărul băieților este egal cu $\frac{3}{7}$. Aflați câți băieți sunt în clasă.
2. Raportul dintre lățimea și lungimea unui dreptunghi este $\frac{2}{3}$, iar perimetrul dreptunghiului este egal cu 20 cm. Calculați aria dreptunghiului.
3. Triunghiurile asemenea ABC și DEF au laturile omoloage $AB = 3$ m și $DE = 5$ m. Determinați valoarea raportului dintre aria lui ABC și aria lui DEF.
4. Aflați scara unei hărți, știind că unei distanțe de 250 km în teren îi corespunde o distanță de 2 cm pe hartă.
5. Fie x, y două numere raționale pozitive. Arătați că $\frac{2x+3y}{3x+5y}=\frac{13}{21}$ dacă și numai dacă $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$.
6. a) Împărțiți numărul 68 în trei părți direct proporționale cu numerele 4, 5 și 8.
   b) Împărțiți numărul 77 în trei părți invers proporționale cu numerele 2, 4 și 6.
7. Ana a cumpărat patru cadouri pentru părinții și frații săi. Prețurile acestor cadouri, exprimate în lei, sunt direct proporționale cu 3, 4, 5, și 6, iar suma cheltuită de Ana a fost 360 de lei. Aflați prețul fiecărui cadou.
8. Ariile a două pătrate, măsurate în m^2, se exprimă prin numere direct proporționale cu 9 și 25. Aflați cele două arii, știind că suma perimetrelor pătratelor considerate este egală cu 160 m.
9. Numerele raționale x, y, z sunt direct proporționale cu 2, 3, respectiv 4.
   a) Ce procent reprezintă y din z?
   b) Determinați numerele x, y, z, știind că $2x + 3y + 4z = 261$.
10. Fie x, y, z trei numere raționale astfel încât $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$ și $\frac{y}{4}=\frac{z}{5}$. Determinați cele trei numere, știind că $xy + yz + zx = 396$.
11. Trei colegi colecționează timbre. Aflați numărul minim de timbre pe care le-ar putea avea fiecare dintre cei trei colegi dacă numerele respective ar fi direct proporționale cu $\frac{16}{3}$, $\frac{15}{4}$ și $\frac{11}{7}$.
12. Primii trei elevi clasați la un concurs de gramatică primesc, împreună, 30 de cărți. Acestea sunt împărțite invers proporțional cu numărul de greșeli făcute în concurs. Aflați câte cărți a primit fiecare dintre cei trei premianți, știind că ei au făcut 2, 3, respectiv 6 greșeli.
13. Bunicul împarte 52 de caise, culese din livadă, celor trei nepoți ai săi, în părți invers proporționale cu vârstele lor. Aflați câte caise primește fiecare nepot, știind că ei au 6 ani, 9 ani, respectiv 12 ani.
14. Doi piloți participă la o cursă pe un circuit. Primul a terminat cursa în t_1 ore, conducând cu viteza medie $v_1 = 200$ km/h, iar al doilea a terminat cursa în t_2 ore, conducând cu viteza medie $v_2 = 160$ km/h. Aflați lungimea circuitului, știind că $t_1 + t_2 = 9$.
15. Numerele raționale nenule x, y, z sunt invers proporționale cu 0,(3), 0,25, respectiv 0,2.
   a) Demonstrați că $\frac{2x+2z}{5y+z}$ este pătratul unui număr rațional.
   b) Determinați cele trei numere, știind că $\frac{3}{x}+\frac{4}{y}+\frac{5}{z}=1$.
16. Fie x, y, z trei numere raționale astfel încât x și y sunt direct proporționale cu 5, respectiv 6, iar y și z sunt invers proporționale cu $\frac{1}{2}$, respectiv $\frac{1}{7}$.
   a) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\frac{x}{10}=\frac{y}{12}=\frac{z}{n}$.
   b) Calculați $3x + y - z$.
17. Fie a, b, c numere raționale astfel încât numerele $a + b$, $b + c$, $c + a$ sunt direct proporționale cu 7, 8, respectiv 9.
   a) Ce procent reprezintă a din $b + c$?
   c) Găsiți numerele a, b, c, știind că media lor aritmetică este 80.

18. a) Prețul unei cărți este de 30 de lei. Aflați prețul cărții după o ieftinire cu 10%.
b) Prețul unui stilou este de 25 de lei. Cât va deveni prețul stiloului dacă acesta se majorează cu 20%?

19. Într-o clasă sunt 21 de băieți. Aflați câți elevi sunt în clasă, știind că fetele reprezintă 30% din numărul tuturor elevilor.

20. Câtă faianță trebuie cumpărată pentru a acoperi o suprafață de 76 m^2, știind că 5% din cantitatea de faianță cumpărată se pierde la montaj.

21. Un telefon se ieftinește cu 20% din prețul pe care îl are. După un timp, telefonul se scumpește cu 20% din noul preț, ajungând astfel să coste 2304 lei.
a) Aflați prețul telefonului după ieftinire.
b) Determinați prețul inițial al telefonului.

22. Prețul unui costum se mărește cu 20%. După un timp, costumul se scumpește din nou cu 10% din noul preț, ajungând astfel să coste 792 de lei.
a) Aflați prețul inițial al costumului.
b) Determinați cu ce procent din prețul inițial s-a mărit prețul costumului după cele două scumpiri.

23. Într-o clasă, numărul fetelor reprezintă 75% din numărul băieților. Aflați câte fete și câți băieți sunt în clasă, știind că, dacă pleacă 2 fete și vin 4 băieți, numărul fetelor va fi egal cu 50% din numărul băieților.

24. Într-o clasă, numărul băieților este 25% din numărul fetelor. Ce procent reprezintă numărul băieților din numărul tuturor elevilor clasei.

25. Suma a două numere naturale este 270, iar 40% din primul număr este cu 45 mai mare decât 30% din celălalt număr. Aflați cele două numere.

26. Într-un coș sunt 36 de prune și câteva mere. Dacă alegem la întâmplare un fruct din coș, probabilitatea ca acesta să fie un măr este de 40%. Aflați câte mere sunt în coș.

27. Gina are o pungă plină cu bomboane. Ea a dat colegei de bancă 20% din bomboane, apoi 10% din rest surorii ei și 25% din noul rest, bunicii. Cu ce procent din numărul inițial de bomboane a rămas Gina?

28. O persoană investește o sumă de bani în două companii. Prima companie, în care a investit $\frac{3}{8}$ din sumă, îi aduce un profit anual de 15% din suma investită, iar a doua companie, în care a investit restul sumei, îi aduce un profit anual de 32% din suma investită. Aflați suma investită, știind că profitul lunar a fost de 410 lei.

29. Jumătate din cantitatea de cireșe dintr-un magazin s-a vândut cu un profit de 30%, iar cealaltă jumătate s-a vândut cu 20% în pierdere. Calculați profitul, în procente, obținut din vânzarea întregii cantități de cireșe.

30. Prețul unui bilet la operă a crescut cu 40%, dar încasările au crescut numai cu 26%. Aflați cu ce procent a scăzut numărul spectatorilor în urma scumpirii biletelor.

TEMA 4. Numere reale

1. Calculați:
a) $\sqrt{64}$; b) $\sqrt{(-35)^2}$; c) $\sqrt{4}+\sqrt{121}$; d) $\sqrt{0,49}+\sqrt{1,69}$;
e) $\sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{1}{9}}+\sqrt{\frac{49}{36}}$; f) $\sqrt{8^2+15^2}$; g) $\sqrt{3^2+3^3}$; h) $\sqrt{2^4\cdot 3^2\cdot 5^2}$.

2. Calculați:
a) $|3-\sqrt{5}|+|\sqrt{5}+\sqrt{3}|+|\sqrt{3}-2|$; b) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}-(3+\sqrt{5})$.

3. Calculați:
a) $\sqrt{27}+\sqrt{12}-\sqrt{75}$; b) $2\sqrt{8}+3\sqrt{18}-13\sqrt{2}$;
c) $\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{3}(2\sqrt{3}+\sqrt{2})$; d) $(\sqrt{2}-\sqrt{12})(\sqrt{8}+\sqrt{3})$.

4. Calculați:
a) $\frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{10}}$; b) $\left(\sqrt{2}+\frac{3}{\sqrt{2}}\right):(\sqrt{2})^{-1}$;
c) $3\cdot\left(3\frac{1}{2}-1,25\cdot 2\right)-\left(\sqrt{5}-\frac{2,5}{\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt{5}$; d) $(-1)^{21}+2\frac{1}{2}:\sqrt{0,25}-\frac{20}{\sqrt{300}}+\frac{\sqrt{48}}{6}$.

5. Calculați:

a) $(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})$;

b) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{2})$;

c) $(3+2\sqrt{2})^2-(3-\sqrt{8})^2$;

d) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

6. Calculați:

a) $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\cdot(\sqrt{10})^{-1}$;

b) $\left(\frac{2}{5\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{12}}+\frac{3}{\sqrt{75}}\right)\cdot 2\sqrt{3}$;

c) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$;

d) $\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$.

7. Determinați $x\in\mathbb{Z}$, știind că $4\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{75}=x\sqrt{3}$.

8. Determinați $x\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x-1<-\sqrt{3}<x$.

9. Determinați $x\in\mathbb{R}$ în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $|x|=\sqrt{3}$;

b) $|x-\sqrt{2}|=\sqrt{8}$.

10. Determinați numărul real x, în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $\frac{x}{2\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{x}$;

b) $\frac{x}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

11. a) Ordonați descrescător numerele: $a=5\sqrt{2}$, $b=2\sqrt{13}$, $c=4\sqrt{3}$.

b) Ordonați crescător numerele $a=\sqrt{8}-\sqrt{50}-\sqrt{18}$, $b=-\sqrt{12}-\sqrt{27}$ și $c=-\sqrt{74}$.

12. a) Care dintre numerele 12, $-\frac{5}{7}$, $\sqrt{18}$, 2,(4) este irațional?

b) Care dintre numerele π, $\sqrt{72}$, $-\sqrt{36}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{8}{81}}$ este rațional?

13. Care dintre următoarele propoziții este adevărată?

P_1: Suma oricăror două numere iraționale este un număr irațional.

P_2: Suma oricăror două numere raționale este un număr rațional.

14. a) Scrieți un număr rațional din intervalul (2, 3).

b) Scrieți un număr irațional din intervalul (1, 2).

c) Scrieți numărul real 2 ca o sumă și apoi ca un produs de două numere raționale.

d) Scrieți numărul real 2 ca o sumă și apoi ca un produs de două numere iraționale.

15. Se consideră mulțimea $A=\{\sqrt{1};\sqrt{2};\sqrt{3};...;\sqrt{99};\sqrt{100}\}$.

a) Calculați suma numerelor raționale din mulțimea A.

b) Câte numere din mulțimea A sunt mai mici decât 5,1?

16. Scrieți sub formă de interval fiecare dintre următoarele mulțimi: $A=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\le x\le 3\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\mid x<-2\}$, $C=$ $=\{x\in\mathbb{R}\mid -1<5-2x\le 7\}$, $D=\{x\in\mathbb{R}\mid |1-x|<3\}$.

17. Se consideră mulțimile $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -3<1-2x<11\}$ și $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\frac{1}{2}\le\frac{x+2}{6}\le\frac{5}{3}\right\}$.

a) Scrieți mulțimile A și B sub formă de intervale.

b) Determinați $A\cup B$, $A\cap B$ și $A\setminus B$.

18. Determinați $A\cup B$ în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $A=\mathbb{Q}$, $B=\mathbb{R}$;

b) $A=(0,+\infty)$, $B=\mathbb{N}$;

c) $A=(-\infty,2)$, $B=(-1,3]$;

d) $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -1\le x\le 4\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\mid |x+2|<2\}$.

19. Determinați $A \cap B$ în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $A = (-\infty, 3)$, $B = \mathbb{N}$;

b) $A = (-5, +\infty)$, $B = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$;

c) $A = (-2, 5]$, $B = [-1, 7]$;

d) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 6\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = x\}$.

20. a) Calculați $\left(x + \sqrt{x^2}\right)^{10}$, știind că $x \in \mathbb{R}$, $x \leq 0$.

b) Calculați $|x - \sqrt{3}| + |x + \sqrt{3}|$, știind că $x \in \mathbb{R}$ și $|x| \leq \sqrt{3}$.

21. Fie numerele reale $a = \sqrt{2} - 1$ și $b = \sqrt{2} + 1$.

a) Calculați $a \cdot b$ și $a^2 + b^2$.

b) Determinați media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b.

22. Se consideră numerele reale $a = \left(\sqrt{75} + 3\sqrt{12} - \frac{9}{\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ și $b = [0,(3)]^{-1}$.

a) Determinați numerele a și b.

b) Calculați diferența dintre media aritmetică și cea geometrică a numerelor a și b.

23. Se consideră numerele reale $a = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}}$ și $b = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{4}}{\sqrt{12}}$.

a) Demonstrați că a și b sunt numere raționale.

b) Arătați că $m_p = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ este mai mare decât aritmetică a numerelor a și b.

24. Se consideră numerele reale $a = \left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{4} - \sqrt{3}\right)$ și $b = \left(\sqrt{2} + 1\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{4} + \sqrt{3}\right)$.

a) Calculați media geometrică a numerelor a și b.

b) Comparați numerele a și b.

25. a) Arătați că $\left(2\sqrt{2} - 3\right)^2 = 17 - 12\sqrt{2}$.

b) Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $x^2 = 17 - 12\sqrt{2}$.

26. Fie numerele reale $a = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ și $b = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

a) Calculați $(a + b)^2$.

b) Arătați că numărul $\frac{b}{a} - \sqrt{2}$ este rațional.

27. Fie $a = 2\left(\sqrt{2} + 3\right)^2 - \left(2 + \sqrt{2}\right)\left(2 - \sqrt{2}\right) - 2\left(\sqrt{50} + 5\right)$. Demonstrați că numărul a aparține intervalului $(12, 13)$.

28. Se consideră expresia $E(x) = |x - 1| + |x + 1|$, unde $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(x) = 2$, oricare ar fi numărul real x din intervalul $[-1, 1]$.

b) Demonstrați că $E(x) \geq 2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

29. Fie x și y două numere reale astfel încât $x \in [-2, 1]$ și $y \in [-1, 3]$.

a) Determinați valoarea cea mai mică și valoarea cea mai mare pe care o poate lua expresia $3 - 2x$.

b) Demonstrați că $2x + 3y \in [-7, 11]$.

30. Fie x și y două numere raționale.

a) Arătați că, dacă $x + y\sqrt{2} = 0$, atunci $x = y = 0$.

b) Determinați x și y, știind că $x\left(1 + 2\sqrt{2}\right) + y\left(1 + \sqrt{2}\right) = 2 + 4\sqrt{2}$.

TEMA 5. Calcul algebric

1. Fie $a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

a) Arătați că $a^2-a-1=0$.

b) Calculați $(3a^2-3a-4)^{2021}$.

2. Fie a, b, x numere reale astfel încât $2a-x=-5$ și $x-3b=7$.

a) Găsiți trei numere a, b, x care verifică condițiile date.

b) Calculați $E=x^2-x(2a+3b)+6ab$.

3. Considerăm numerele naturale a, b, c, astfel încât $a-3b+9c=0$.

a) Determinați a și c, știind că $b=8$.

b) Arătați că numărul $n=b^2-4ac$ este pătrat perfect.

4. Fie $a=1-\sqrt{2}$ și $E(x)=x^4-5x^3+2x^2+9x+4$.

a) Arătați că $a^2-2a-1=0$.

b) Arătați că $E(a)$ este număr întreg.

5. Considerăm $E(x)=(2x+1)^2-(x-1)^2+(x-2)(x+2)-3x^2+13$.

a) Calculați $E(-5)$.

b) Arătați că $E(n)$ este număr natural pătrat perfect, pentru orice număr întreg.

6. Fie a și b două numere reale astfel încât $25a^2-9b^2=175$ și $3b-5a=5$.

a) Determinați b, știind că $a=-4$.

b) Calculați $15a+9b+100$.

7. Fie $n=x^2+2x-35$, $x\in\mathbb{R}$.

a) Verificați că $n=(x-5)(x+7)$.

b) Determinați numerele întregi x pentru care n este număr prim.

8. Fie a cifră nenulă și numărul $E=\sqrt{\overline{a6}\cdot\overline{a8}+1}-\sqrt{\overline{a2}\cdot\overline{a6}+4}$.

a) Verificați că $\overline{a6}\cdot\overline{a8}+1$ este pătrat perfect.

b) Arătați că numărul E nu depinde de a.

9. Considerăm expresia $E(a,b)=-a^2-5b^2-6ab+6b-6a+9$, $a,b\in\mathbb{R}$.

a) Dacă $a+b=3$, arătați că $E(a,b)$ nu depinde de a și b.

b) Calculați suma $S=E(-10,13)+E(-9,12)+E(-8,11)+\ldots+E(-1,4)+E(0,3)$.

10. Fie x, y numere reale și expresia $E(x,y)=6xy+4x-3y-19$.

a) Arătați că $E(x,y)=(2x-1)(3y+2)-17$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Dați un exemplu de două numere iraționale a și b, pentru care numărul $E(a,b)$ este natural.

11. Considerăm $E(x)=x^2-x-2$, $x\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că $4E(x)=(2x-1)^2-9$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați minimul expresiei $E(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

12. Pentru fiecare număr întreg n considerăm numărul $a(n)=\frac{n^3}{6}-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}$.

a) Calculați $a(-5)$.

b) Arătați că $a(n)$ este număr întreg, pentru orice n număr întreg.

13. a) Dacă $a,b\in\mathbb{Q}$ și $a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$, arătați că $b=0$.

b) Determinați numerele naturale n pentru care $\frac{n}{10}(\sqrt{2}+1)^2+(-1)^n(\sqrt{2}-1)\in\mathbb{Q}$.

14. Considerăm expresia $E(x)=x^2+4x+5$, $x\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(x)\geq 1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați numerele reale a, b, c, știind că $E(a)+E(b)+E(c)=3$.

15. a) Verificați că $x^2 - x\sqrt{8} + 2 = (x - \sqrt{2})^2$.

b) Determinați numerele reale x, y, știind că $x^2 + 9y^2 - 2x\sqrt{2} + 6y + 3 = 0$.

16. Fie $\overline{ab}$ un număr cu proprietatea că $\overline{ab} = \dfrac{b^2 + 1320}{\overline{ab}}$.

a) Numărul 24 are proprietatea din enunț?

b) Determinați $\overline{ab}$.

17. Considerăm expresia $E(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 6x + 9}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(-2) = -2$.

b) Arătați că pentru orice $x \in [3, +\infty)$, $E(x)$ are o valoare constantă.

18. Considerăm expresia $E(x) = \dfrac{(x^2 + 2x + 3)^2 - 5(x^2 + 2x) - 9}{x^3 + 3x^2 + 2x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0\}$.

a) Arătați că $E(x) = x + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0\}$.

b) Calculați $n = [E(2021)]^2 - E(2020) \cdot E(2022)$.

19. Considerăm expresia $E(x) = \left[\left(\dfrac{1}{1+x} - 1\right) : \left(1 - \dfrac{1 - 2x^2}{1+x}\right)\right] \cdot \dfrac{4x^2 + 4x + 1}{4x^2 - 1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right\}$.

a) Arătați că $E(x) = \dfrac{1}{1 - 2x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right\}$.

b) Calculați suma $S = \dfrac{1}{E(1)} + \dfrac{1}{E(2)} + \ldots + \dfrac{1}{E(10)}$.

20. Considerăm expresia $E(x) = \left[\dfrac{x-6}{x^2 - 25} + \dfrac{x^2}{x^2 - 5x} - \dfrac{2x - 2}{x + 5} : (x - 1)\right] : \dfrac{2x^2 + x - 6}{x^2 - 25}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-5, -2, 0, 1, \dfrac{3}{2}, 5\right\}$.

a) Arătați că $2x^2 + x - 6 = (x + 2)(2x - 3)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că $E(x) = \dfrac{x+2}{2x-3}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-5, -2, 0, 1, \dfrac{3}{2}, 5\right\}$.

21. Considerăm expresia $E(x) = \dfrac{(x-3)^3 - x + 3}{(x-1)(x-5) + 3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$.

a) Arătați că $(x - 3)^3 - x + 3 = (x - 4)(x - 3)(x - 2)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că pentru orice n număr natural, $n \geq 5$, $E(n)$ este număr natural.

22. Considerăm expresia $E(x) = \left(\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{2}{x-3} - \dfrac{3}{x^2 - 9}\right) \cdot \dfrac{x^2 + 2x - 3}{3x - 3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1, 3\}$.

a) Arătați că $E(x) = \dfrac{x}{x-3}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1, 3\}$.

b) Determinați numerele întregi n pentru care $E(n)$ este număr natural.

23. Considerăm expresia $E(x) = \dfrac{x-1}{x-2} : (2x - 2) + \dfrac{x}{x^2 + 2x} + \dfrac{2}{4 - x^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1, 2\}$.

a) Arătați că $E(x) = \dfrac{3}{2(x+2)}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1, 2\}$.

b) Determinați $a \in \mathbb{R}$, dacă $4E(a) = 1$.

24. Considerăm expresia $E(x) = \left(\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{1}{x+4}\right) : \left(x + 6 - \dfrac{x-3}{x+1}\right)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -3, -1\}$.

a) Arătați că $E(x) = \dfrac{3}{(x+3)(x+4)}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -3, -1\}$.

b) Arătați că numărul $a = E(0) + E(1) + \ldots + E(5) + \dfrac{1}{3}$ este natural.

25. Considerăm expresia $E(x)=\left(\frac{2x}{x-1}-\frac{x}{x+1}\right):\frac{2x^2+6x}{x^2+2x+1}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-1,0,1\}$.

a) Arătați că $E(x)=\frac{x+1}{2(x-1)}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-1,0,1\}$.

b) Pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-1,0,1\}$, arătați că $E(x)\cdot E(-x)$ nu depinde de x.

26. Fie $E(x)=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right):\frac{2x+6}{x^2+3x}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-1,0\}$.

a) Arătați că $E(x)=\frac{1}{2(x+1)}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-1,0\}$.

b) Determinați numerele naturale nenule n pentru care $E(n)\geq\frac{1}{10}$.

27. Considerăm expresia $E(x)=\left[1-\frac{2x+2}{x+3}+\frac{(x+1)^2}{(x+3)^2}\right]\cdot\frac{x^2+4x+3}{4}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

a) Arătați că $E(x)=\frac{x+1}{x+3}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

b) Verificați că $a=E(0)\cdot E(1)\cdot E(2)\cdot\ldots\cdot E(12)<0{,}01$.

28. Considerăm expresia $E(x)=\left(\frac{x-2}{x+2}-\frac{2}{x-2}\right):\frac{x-6}{x^3-4x}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,0,2,6\}$.

a) Arătați că $E(x)=x^2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,0,2,6\}$.

b) Determinați numerele reale a, b, știind că $E(a+b+1)+E(a)-2b=0$.

29. Considerăm expresia $E(x)=\left(\frac{x^2-x}{x^2+1}-\frac{2x^2}{1-x+x^2-x^3}\right):\frac{x}{x+1}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$.

a) Arătați că $E(x)=\frac{x+1}{x-1}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$.

b) Dați un exemplu de număr $a\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ pentru care $E(a)$ este număr natural.

30. a) Simplificați fracția $F(x)=\frac{x^2+11x+24}{9x+27}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

b) Arătați că numărul $a=\frac{10^{2n}+11\cdot10^n+24}{9\cdot10^n+27}$ este natural, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

TEMA 6. Funcții

1. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-3, & x\in(-\infty,0)\\ -x+2, & x\in[0,2)\\ -x, & x\in[2,+\infty)\end{cases}$.

a) Calculați $f(3)$, $f(-3)$, $f(0)$ și $f(2)$.

b) Care dintre punctele $A(0,-3)$, $B(-1,1)$, $C(1,-1)$, $D(0,2)$ este situat pe graficul funcției f?

2. Considerăm funcțiile f, g, $h:\{-1,0,1\}\to[0,+\infty)$, $f(x)=x^4$, $g(x)=|x|$, $h(x)=x^3$.

a) Arătați că funcțiile f și g sunt egale.

b) Arătați că funcțiile f și h nu sunt egale.

3. Considerăm mulțimea $A=\left\{-\sqrt{3},-\sqrt{2},-2,-1,-\sqrt{3}-\sqrt{2}\right\}$ și funcția $f:A\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

a) Arătați că mulțimea valorilor funcției f este $\operatorname{Im}f=\left\{-3+\sqrt{6},0,-2\sqrt{3}+\sqrt{6},-\sqrt{3}+\sqrt{6},-3\right\}$.

b) Care este cel mai mic element din mulțimea $\operatorname{Im}f$? Dar cel mai mare?

4. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5x + 4$.

a) Calculați produsul $P = f\left(-\frac{9}{10}\right) \cdot f\left(-\frac{8}{9}\right) \cdot \ldots \cdot f\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

b) Determinați valorile întregi ale lui n pentru care $\frac{6}{f(n)}$ este număr întreg.

5. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$.

a) Calculați media geometrică a numerelor $a = f(\sqrt{2})$ și $b = f(1+\sqrt{2})$.

b) Demonstrați că numărul $A = f(1) + f(2) + \ldots + f(20)$ este pătrat perfect.

6. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ având proprietatea $f(x + 1) = 2x + 4 - f(2)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

a) Arată că $f(2) = 3$.

b) Determinați legea de corespondență a funcției.

7. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2x + 1$.

a) Determinați $a \in \mathbb{R}$, dacă punctul $A(2a - 1, a - 2)$ este situat pe graficul funcției f.

b) Calculați suma $S = f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(2021)$.

8. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{5}{2}x - 0,5$ și punctele $A(1, 2)$ și $B(7, 17)$.

a) Arătați că punctele A și B sunt situate pe graficul funcției f.

b) Determinați punctele de coordonate întregi situate pe segmentul închis AB.

9. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2x + 3$.

a) Calculați media geometrică a numerelor $a = f(\sqrt{2})$ și $b = f(-\sqrt{2})$.

b) Determinați punctele situate pe graficul funcției f situate la distanța 5 față de axa Ox.

10. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$.

a) Determinați coordonatele punctelor A și B situate pe graficul funcției f la distanța 3 față de Oy.

b) Calculați distanța dintre A și B.

11. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 5$.

a) Reprezentați grafic f într-un sistem de coordonate xOy.

b) Arătați că simetricul punctului $M(-2, 1)$ față de punctul O este situat pe graficul lui f.

12. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -3x + 4$ și punctele A, B situate pe graficul funcției f, A de abscisă -1, iar B de ordonată -5.

a) Determinați coordonatele punctelor A și B.

b) Calculați distanța dintre punctele A și B.

13. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2 - 3x$.

a) Calculați media geometrică a numerelor $a = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ și $b = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

b) Determinați punctul de pe graficul funcției f care are coordonate egale.

14. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (2a + 3)x - 3a + 2$, al cărei grafic conține punctul $M(-1, -6)$.

a) Arătați că $a = 1$.

b) Determinați punctul de pe graficul lui f care are abscisa egală cu un sfert din ordonată.

15. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 2$.

a) Arătați că expresia $E(x) = (f(x))^2 - f(x + 1) \cdot f(x - 1)$ nu depinde de numărul real x.

b) Determinați punctul de pe graficul funcției f care are coordonatele de module egale.

16. Pentru fiecare a număr real, definim funcția $f_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_a(x) = (2a - 1)x - 4a + 3$.

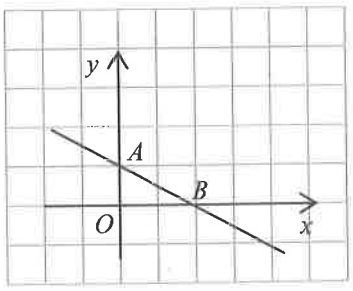
a) Arătați că punctul $A(2, 1)$ este situat pe graficul funcției f_a pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

b) Determinați a, știind că punctul $B(-1, 10)$ este situat pe graficul funcției f_a.

17. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 4$.

a) Reprezentați grafic funcția într-un sistem de axe de coordonate xOy.

b) Determinați distanța de la punctul $P(3, 0)$ la graficul funcției f.



18. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2-x}{2}$, având graficul din figura alăturată. Fie A și B punctele de intersecție a graficului funcției cu axele Oy, respectiv Ox.

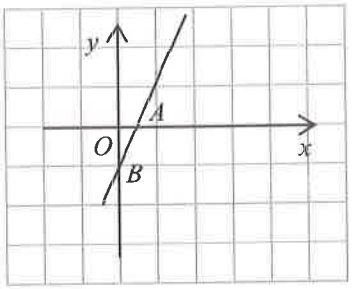
a) Arătați că $a = f(\sqrt{2}-1) - f(\sqrt{2}-3)$ este număr întreg.

b) Calculați perimetrul triunghiului determinat de graficul funcției f cu axele de coordonate.

19. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$, având graficul din figura alăturată.

a) Arătați că numărul $a = \frac{f(\sqrt{2}) - f(1)}{\sqrt{2}-1} + \frac{f(\sqrt{3}) - f(\sqrt{2})}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ este natural.

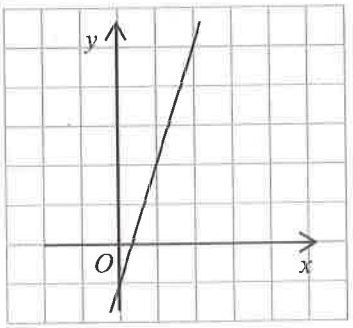
b) Aflați $\cos(\sphericalangle OAB)$, A și B fiind punctele de intersecție a graficului funcției f cu axele Ox, respectiv Oy.



20. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 1$, având graficul din figura alăturată, și punctele $A(1, 2)$, $B(2, 5)$.

a) Arătați că punctele A și B sunt situate pe graficul funcției f.

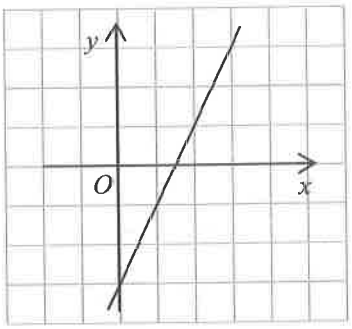
b) Notăm cu A' și B' proiecțiile punctelor A și B pe axa Ox. Calculați aria patrulaterului $AA'B'B$.



21. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$, având graficul din figura alăturată, și punctele $A(4, 0)$, $B(0, 2)$.

a) Arătați că punctele A și B nu sunt situate pe graficul funcției f.

b) Demonstrați că orice punct M situat pe graficul funcției f este egal depărtat de punctele A și B.



22. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (1-\sqrt{2})x + \sqrt{2}$.

a) Calculați media aritmetică a numerelor $a = f(0)$ și $b = f(2)$.

b) Determinați numerele raționale a și b, știind că punctul $A(a\sqrt{2}, b)$ este situat pe graficul funcției f.

23. Considerăm punctele $A(1, 3)$, $B(3, 7)$ și $C(-4, -7)$.

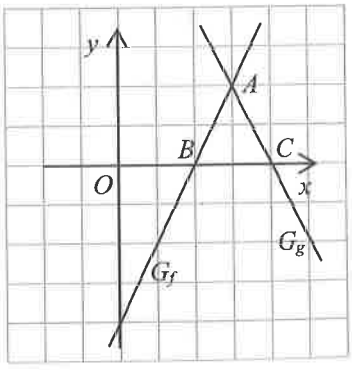
a) Determinați funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, știind că graficul funcției f conține punctele A și B.

b) Demonstrați că punctele A, B și C sunt coliniare.

24. Considerăm funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 4$, $g(x) = -2x + 8$ și punctele $\{A\} = G_f \cap G_g$, $\{B\} = G_f \cap Ox$, iar $\{C\} = G_g \cap Ox$. Reprezentarea grafică a funcțiilor este prezentată în figura alăturată.

a) Aflați coordonatele punctului A.

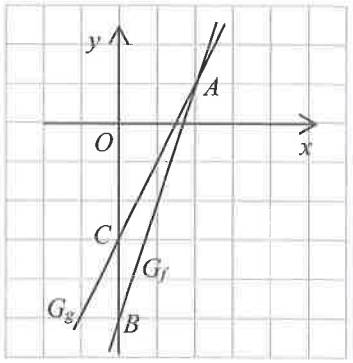
b) Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.



25. Considerăm funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 5$ și $g(x) = 2x - 3$, A punctul comun graficelor celor două funcții, B punctul de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy, iar C punctul de intersecție a graficului funcției g cu axa Oy.

a) Arătați că punctul A are coordonatele $(2, 1)$

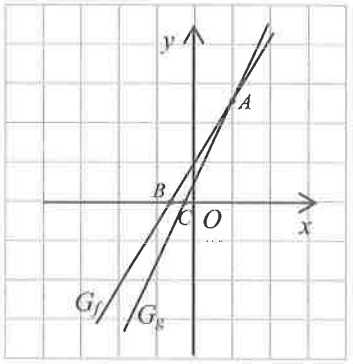
b) Calculați distanța de la punctul C la graficul funcției f.



26. Considerăm funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{3}{2}x + 1$ și $g(x) = 2x + \frac{1}{2}$. Notăm cu A punctul de intersecție dintre graficele celor două funcții, iar cu B și C punctele de intersecție a graficelor cu axa Ox. Graficele funcțiilor f și g sunt prezentate în figura alăturată.

a) Determinați coordonatele punctului A.

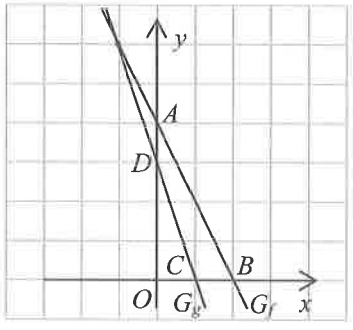
b) Calculați aria determinată de graficul funcției f, graficul funcției g și axa Ox.



27. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + 2, a \in \mathbb{R}^*$.

a) Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axele de coordonate.

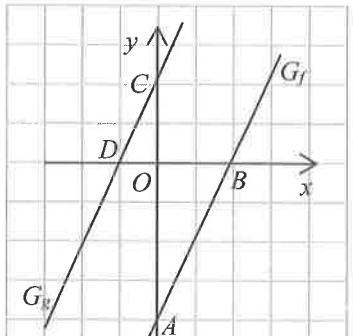
b) Determinați a, știind că distanța de la originea reperului xOy la graficul funcției f este egală cu $\sqrt{2}$.



28. Considerăm funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2x + 4$ și $g(x) = -3x + 3$. Graficele celor două funcții sunt trasate în figura alăturată.

a) Rezolvați ecuația $f(x) = g(x), x \in \mathbb{R}$.

b) Calculați aria determinată de graficele celor două funcții și axele de coordonate, adică aria patrulaterului $ABCD$.



29. Considerăm funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 4$ și $g(x) = 2x + 2$. Notăm cu A, B punctele de intersecție dintre graficul funcției f și axele de coordonate și cu C, D punctele de intersecție dintre graficul funcției g și axele de coordonate. Graficele celor două funcții sunt reprezentate în figura alăturată.

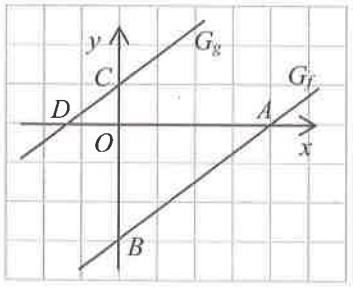
a) Arătați că graficele celor două funcții sunt drepte paralele.

b) Calculați aria trapezului $ABCD$.

30. Considerăm funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{3}{4}x - 3$ și $g(x) = \frac{3}{4}x + 1$. A, B sunt punctele de intersecție dintre G_f și axele de coordonate, iar C, D sunt punctele de intersecție dintre G_g și axele de coordonate.

a) Arătați că graficele celor două funcții sunt drepte paralele.

b) Calculați distanța dintre cele două drepte ce reprezintă graficul funcției f și graficul funcției g.



TEMA 7. Ecuații. Sisteme de ecuații. Inecuații

1. a) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției „3 este soluție a ecuației $6 - x = 1, x \in \mathbb{N}$".

b) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției „–2 este soluție a ecuației $x + 3 = 1, x \in \mathbb{N}$".

2. Rezolvați ecuațiile:

a) $x + 1 = 7, x \in \mathbb{N}$;

b) $x - 2 = -3, x \in \mathbb{Z}$;

c) $3{,}25 + x = 1{,}65, x \in \mathbb{Q}$;

d) $13{,}2 - x = 0{,}65, x \in \mathbb{Q}$;

e) $x \cdot 3 = -6, x \in \mathbb{Z}$;

f) $(-8) : x = -4, x \in \mathbb{Z}$;

g) $x : 1{,}1 = 3, x \in \mathbb{R}$;

h) $1{,}2 : x = 3, x \in \mathbb{Q}$.

3. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuațiile:

a) $\frac{3x-1}{4} - \frac{5x-2}{7} = \frac{3}{14}$;

b) $2(x+2)^2 - (x-1)^2 = x(x-3) - 6$;

c) $\frac{2x+1}{3x-2} = \frac{2x+5}{3x+1}$;

d) $\frac{2x-1}{6x-3} = \frac{4x+4}{12x-5}$;

e) $\frac{1}{2x-2} + \frac{1}{3x-3} + \frac{1}{6x-6} = \frac{1}{x-1}$;

f) $(x+2)^2 + \frac{x^2-9}{x+3} = (x-1)(x+1) - 13$.

4. Considerăm $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $\begin{cases}(a-1)x + (b+1)(y+1) = -5\\ 2a(x+1) - (2b-1)y = 22\end{cases}$.

a) Determinați x și y dacă $a = 2$, $b = -3$.

b) Determinați a și b dacă $x = 1$, $y = 2$.

5. a) Care dintre elementele mulțimii $\left\{-1, 1, \frac{3}{2}\right\}$ este soluție a inecuației $x - 1{,}25 > 0, x \in \mathbb{R}$?

b) Care dintre elementele mulțimii $\{-3, 1, 2, 3\}$ nu este soluție a inecuației $2x^2 - 1 < 17, x \in \mathbb{R}$?

6. Rezolvați inecuațiile:

a) $x - 1 < 3, x \in \mathbb{N}$;

b) $5x > 30{,}15, x \in \mathbb{Z}$;

c) $-1{,}2x + 0{,}8 < -1{,}6, x \in \mathbb{Z}$;

d) $2x - 3 > 1 + 3x, x \in \mathbb{R}$;

e) $6 - 2x < 4, x \in \mathbb{R}$;

e) $\frac{x}{3} + 1 > x + \frac{1}{2}, x \in \mathbb{N}$.

7. Fie a număr real și inecuația $\frac{2x-1}{3} + \frac{x}{2} \le \frac{a-1}{6}, x \in \mathbb{R}$.

a) Determinați valorile lui a pentru care $x = 1$ este soluție a inecuației.

b) Determinați numerele naturale x care verifică inecuația pentru $a = 6$.

8. a) Determinați valorile întregi ale lui x pentru care $\frac{4x}{3x+1}$ este număr întreg.

b) Arătați că există o infinitate de numere raționale x, pentru care numărul $\frac{4x}{3x+1}$ este întreg.

9. După trei note primite la matematică, media aritmetică a notelor unui elev este 7.

a) Dacă a patra notă este 5, care este media aritmetică a primelor patru note?

b) Dacă media primelor patru note este 7,50, care este a patra notă primită de elev?

10. Un televizor costă 1540 de lei. Prețul televizorului se mărește cu 25%.

a) Cât costă televizorul după mărirea de preț?

b) Cu ce procent trebuie micșorat noul preț pentru ca televizorul să aibă același preț ca înainte de mărire?

11. Andrei are o sumă de bani. În prima zi el cheltuiește 30% din sumă. A doua zi cheltuiește $\frac{2}{7}$ din rest, iar a treia zi 0,(6) din noul rest.
a) În care zi cheltuiește cel mai mult?
b) Dacă după cele trei zile îi mai rămân 100 de lei, care era suma inițială?

12. Pe un raft al unei biblioteci sunt de trei ori mai multe cărți decât pe un alt raft. Dacă mutăm 20 de cărți de pe primul raft pe al doilea, numărul cărților de pe al doilea raft devine de trei ori mai mare decât numărul cărților de pe primul raft.
a) Pot fi 36 de cărți pe cele două rafturi?
b) Câte cărți sunt pe primul raft?

13. Un autoturism parcurge un traseu în trei zile. În prima zi parcurge $\frac{1}{5}$ din drum, a doua zi $\frac{2}{5}$ din rest, iar a treia zi parcurge restul drumului.
a) Dacă traseul are 500 km, câți kilometri parcurge autoturismul a treia zi?
b) Dacă a treia zi autoturismul a parcurs 120 km, care este lungimea traseului?

14. Într-un depozit sunt 320 t de combustibil, iar în altul sunt 180 t de combustibil. Din primul depozit se livrează 15 t zilnic, iar din al doilea 10 t zilnic.
a) După câte zile cantitatea rămasă în primul depozit este de două ori mai mare decât cantitatea rămasă în cel de-al doilea depozit?
b) Este posibil ca, după un anumit număr de zile, cantitățile rămase în cele două depozite să fie egale?

15. Fie x, y numere reale pozitive, astfel încât 75% din x este egal cu $1\frac{1}{3}$ din y. Notăm cu d diferența dintre media aritmetică și media geometrică ale celor două numere.
a) Aflați d, știind că $x=\frac{2}{3}$.
b) Dacă $d=0{,}5$, aflați numerele x și y.

16. Un teren agricol a fost arat în trei zile, astfel: în prima zi 30% din suprafață, a doua zi $\frac{5}{14}$ din rest, iar a treia zi toată suprafața rămasă.
a) Dacă terenul are 200 ha, în ce zi s-a arat cea mai mare suprafață?
b) Dacă în ultima zi s-au arat 90 ha, câte hectare are terenul agricol?

17. Ionel are de rezolvat, într-un anumit număr de zile, mai multe probleme. Dacă ar rezolva câte 15 probleme pe zi, i-ar rămâne 10 probleme nerezolvate. Dacă ar rezolva câte 20 de probleme pe zi, ar termina cu trei zile mai devreme.
a) În câte zile și-a propus Ionel să rezolve toate problemele?
b) Câte probleme avea de rezolvat Ionel?

18. Mai mulți copii vor să cumpere un cadou. Dacă fiecare copil ar da câte 20 de lei, ar mai fi nevoie de 30 de lei, iar dacă fiecare copil ar da câte 30 de lei, unul dintre copii nu ar trebui să dea niciun leu.
a) Pot fi zece copii?
b) Care este prețul cadoului?

19. Elevii unei clase au obținut o sponsorizare pentru a pleca într-o excursie. Dacă transportul ar costa 150 de lei de persoană, atunci le-ar mai trebui încă 500 de lei. Dacă transportul ar costa 130 de lei de persoană, atunci le-ar rămâne 100 de lei din sponsorizarea primită.
a) Câți copii sunt în clasă?
b) Ce sumă au obținut din sponsorizare?

20. Cinci caiete și patru pixuri costă 62 de lei, iar patru caiete și cinci pixuri costă 64 de lei.
a) Cât costă împreună un pix și un caiet?
b) Cât costă un pix și cât costă un caiet?

21. Într-o clasă numărul băieților reprezintă 80% din numărul fetelor.
a) Pot fi 12 fete în clasă?
b) Cât la sută din numărul băieților reprezintă numărul fetelor?

22. Andrei și Vlad au împreună 100 de timbre. 40% din numărul timbrelor pe care le are Andrei este cu 12 mai mare decât 30% din numărul timbrelor lui Vlad.
a) Aflați câte timbre are fiecare copil.
b) De câte ori mai multe timbre are Vlad decât Andrei?

23. Trei frați au împreună 180 de lei. După ce primul a cheltuit $\frac{1}{2}$ din suma sa, al doilea $\frac{2}{3}$ din suma sa, iar al treilea $\frac{3}{4}$ din suma sa, cei trei au rămas cu sume egale de bani. Notăm cu a, b, c (lei) sumele de bani pe care le aveau, la început, primul, al doilea, respectiv al treilea copil.

a) Arătați că a, b, c sunt direct proporționale cu 2, 3 și 4.

b) Ce sumă de bani avea fiecare copil la început?

24. Numerele 319, 945 și 333, împărțite la un număr natural n, dau resturile 7, 9 și, respectiv, 8.

a) Stabiliți dacă n poate fi egal cu 12.

b) Determinați numărul n.

25. Împărțind numărul natural n la numerele 18, 30 și 24, se obțin câturi nenule și de fiecare dată restul 2.

a) Aflați cel mai mic număr n cu această proprietate.

b) Aflați toate numerele n cu această proprietate, astfel încât $1500 < n < 2500$.

26. Într-un coș se află nuci. Dacă le grupăm câte 2, câte 3 sau câte 5, de fiecare dată rămâne o nucă, iar dacă le grupăm câte 7, nu mai rămâne nicio nucă.

a) Pot fi în coș 301 nuci?

b) Care este numărul minim de nuci din coș?

27. Într-o clasă sunt băieți și fete. Dacă ar mai veni 8 fete, numărul lor ar fi $\frac{2}{3}$ din numărul băieților. Dacă ar pleca n băieți, numărul fetelor ar fi tot $\frac{2}{3}$ din numărul băieților.

a) Determinați numărul n.

b) Arătați că sunt cel puțin 12 băieți în clasă.

28. Un amestec de apă și sare cântărește 10 kg și are concentrația de 5%.

a) Ce cantitate de sare conține amestecul?

b) Ce cantitate de sare trebuie adăugată pentru a obține un amestec cu concentrația de 20%?

c) Dacă s-ar adăuga 30 kg de amestec de apă cu sare, cu concentrația de 10%, care ar fi concentrația noului amestec?

29. La o disciplină, Ionuț are trei note: 5, 7 și 8.

a) Care este media aritmetică a notelor lui Ionuț?

b) Ce notă ar trebui să mai primească Ionuț pentru ca media să fie cel puțin 7?

30. Un test-grilă conține 100 de întrebări. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 5 puncte și pentru fiecare răspuns greșit se scad 3 puncte. Se consideră admis un elev care obține cel puțin 200 de puncte.

a) Este admis un elev care răspunde corect la 50 de întrebări?

b) Care este numărul minim de răspunsuri corecte pe care trebuie să le dea un elev pentru a fi admis?

TEMA 8. Unghiuri. Triunghiuri. Patrulatere

1. În figura 1, punctele A, B și C sunt coliniare în această ordine. Se știe că $7AB = 2BC$, iar $AC = 27$ cm. Aflați lungimea segmentului AB.

2. În figura 2, M este un punct situat pe segmentul AB, iar N și P sunt mijloacele segmentelor AM, respectiv MB. Segmentul NP are lungimea de 17 cm. Aflați lungimea segmentului AB.

Figura 1

Figura 2

3. În figura 3, semidreptele AM și AN sunt bisectoarele unghiurilor BAC, respectiv MAC. Unghiul MAN are măsura de 20°. Aflați măsura unghiului BAN.

4. În figura 4, $\sphericalangle BAC$ și $\sphericalangle CAD$ sunt unghiuri adiacente complementare, cu $\sphericalangle BAC = \frac{5}{4} \cdot \sphericalangle CAD$. Aflați măsura unghiului CAD.

5. În figura 5 sunt date măsurile a două dintre unghiurile formate în jurul punctului de intersecție a dreptelor d_1 și d_2. Aflați valoarea lui x.
6. În figura 6 sunt date măsurile a două dintre unghiurile formate în jurul punctului de intersecție a dreptelor d_1 și d_2. Aflați valoarea lui x.

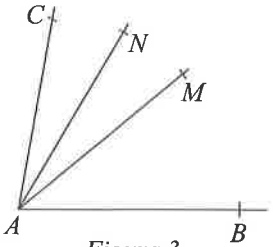


Figura 3

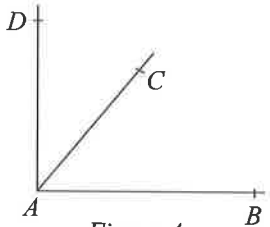


Figura 4

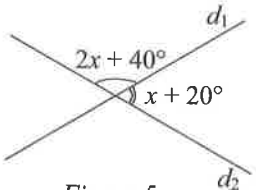


Figura 5

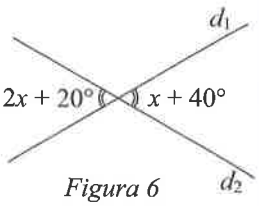


Figura 6

7. În figura 7 sunt date măsurile a două dintre unghiurile pe care dreapta d_3 le formează cu dreptele paralele d_1 și d_2. Aflați valoarea lui x.
8. În figura 8, punctele A, B, C sunt necoliniare, iar punctele B, C și D sunt coliniare. Măsurile unghiurilor A și C sunt 60°, respectiv 50°. Determinați măsura unghiului ABD.
9. În figura 9, BD este înălțime a triunghiului ABC. Măsurile unghiurilor ABD și CBD sunt 25°, respectiv 40°. Determinați diferența dintre măsurile unghiurilor A și C.
10. În figura 10, AI și BI sunt bisectoarele unghiurilor A, respectiv B ale triunghiului ABC. Măsura unghiului C este 40°. Determinați măsura unghiului AIB.

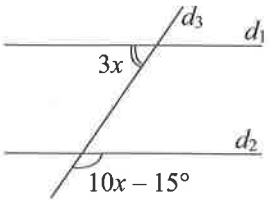


Figura 7

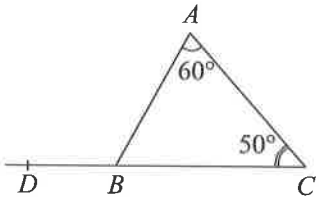


Figura 8

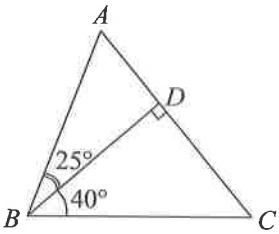


Figura 9

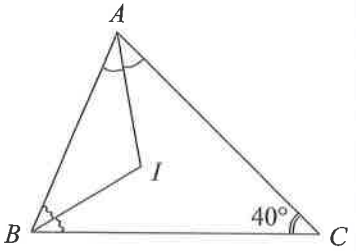


Figura 10

11. În figura 11 este reprezentat un triunghi isoscel ABC. Două dintre laturile triunghiului au lungimile de 3 cm, respectiv 6 cm. Calculați perimetrul triunghiului.
12. În figura 12 este reprezentat un triunghi ABC cu $AB = AC = 9$ cm și $\measuredangle B = 60°$. Punctele M și N sunt mijloacele laturilor BC, respectiv AC. Calculați $BM + MN + NC$.
13. În figura 13 este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC cu $\measuredangle A = 90°$, $\measuredangle B = 30°$ și $BC = 10$ cm. Punctul D este piciorul înălțimii din A. Aflați lungimea segmentului CD.
14. În figura 14 este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC cu $\measuredangle A = 90°$ și $BC = 18$ cm. Medianele BN și CM se intersectează în punctul G. Determinați lungimea segmentului AG.

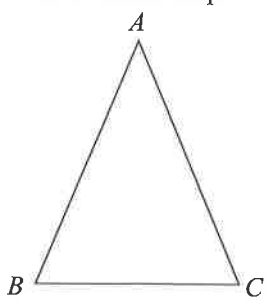


Figura 11

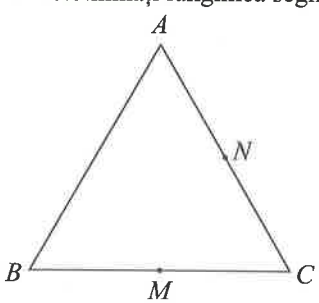


Figura 12

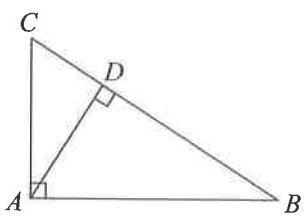


Figura 13

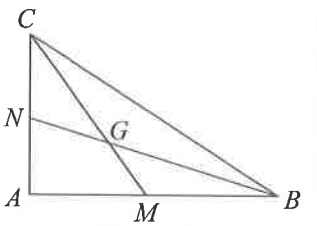


Figura 14

15. Măsurile unghiurilor A, B, C și D ale patrulaterului $ABCD$ din figura 15 sunt direct proporționale cu numerele 2, 3, 4 și, respectiv, 3. Aflați măsura unghiului C.

16. În figura 16 este reprezentat un paralelogram $ABCD$. Diagonalele AC și BD se intersectează în O. Calculați suma $S = \frac{BO}{BD} + \frac{AD}{BC} + \frac{AO}{OC}$.

17. Fie dreptunghiul $ABCD$ din figura 17, cu $AD = 5$ cm și $\measuredangle BAC = 30°$. Aflați distanța dintre punctele B și D.

18. Fie $ABCD$ un romb cu $\measuredangle CAD = 25°$ (figura 18). Determinați măsura unghiului CBD.

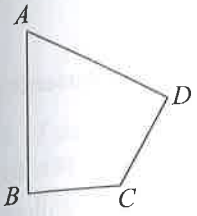


Figura 15

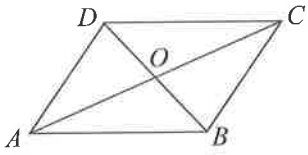


Figura 16

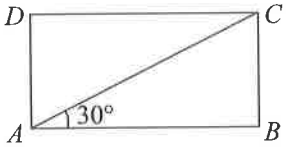


Figura 17

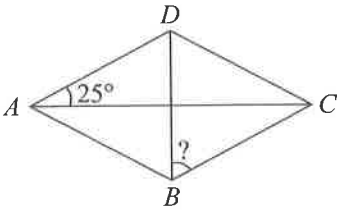


Figura 18

19. Pătratul $ABCD$ are latura $AB = 7$ cm (figura 19). Aflați distanța dintre simetricul punctului A față de dreapta BD și simetricul punctului D față de dreapta AC.

20. În trapezul isoscel $ABCD$, unghiul C are măsura 115° (figura 20). Calculați $\measuredangle A + \measuredangle B - \measuredangle D$.

21. Patrulaterul $ABCD$ este un trapez dreptunghic cu $\measuredangle A = \measuredangle D = 90°$, $\measuredangle B = 45°$, $AD = 8$ cm și $CD = 6$ cm (figura 21). Aflați lungimea segmentului AB.

22. Linia mijlocie MN a trapezului $ABCD$ intersectează diagonalele AC și BD în punctele P, respectiv Q (figura 22). Determinați lungimile bazelor AB și CD, dacă $AB > CD$, $MN = 10$ cm și $PQ = 4$ cm.

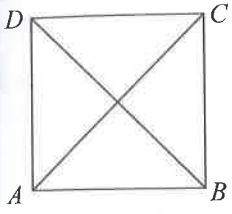


Figura 19

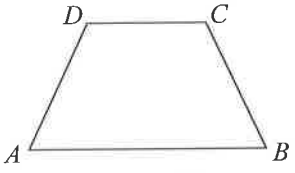


Figura 20

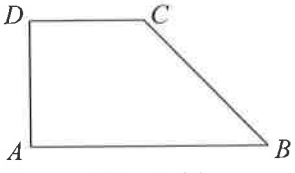


Figura 21

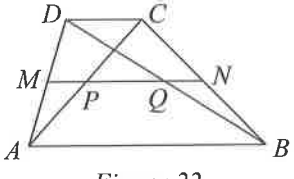


Figura 22

23. Fie ABC un triunghi cu $BC = 9$ cm. Notăm cu P simetricul punctului B față de mijlocul M al laturii AC (figura 23).

a) Arătați că $AP = 9$ cm.

b) Dacă Q este simetricul lui C față de mijlocul N al laturii AB, demonstrați că punctul A este mijlocul segmentului PQ.

24. În triunghiul ABC, unghiurile B și C au măsurile 50°, respectiv 70°. Pe laturile BC și AB se consideră punctele M, respectiv N, astfel încât $\measuredangle BMA = 100°$ și $\measuredangle BNC = 120°$ (figura 24).

a) Arătați că $\measuredangle ACN = 60°$.

b) Demonstrați că dreapta AM este mediatoarea segmentului CN.

25. Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB = AC$ și $\measuredangle B = 2 \cdot \measuredangle A$. Pe latura AC se consideră punctul M astfel încât BM să fie bisectoare în triunghiul ABC (figura 25).

a) Arătați că unghiul ABM are măsura 36°.

b) Demonstrați că segmentele AM și BC sunt congruente.

26. Se consideră triunghiul ABC cu $\measuredangle A = 90°$ și $\measuredangle B = 5 \cdot \measuredangle C$, iar punctul D este proiecția punctului A pe BC (figura 26).

a) Arătați că unghiul CAD are măsura 75°.

b) Demonstrați că $BC = 4 \cdot AD$.

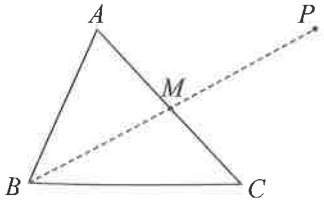


Figura 23

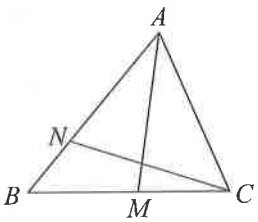


Figura 24

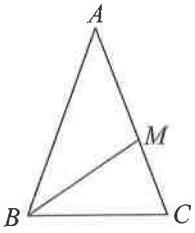


Figura 25

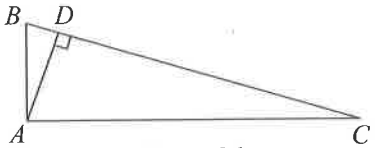


Figura 26

27. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC = 10$ cm, $BC = 7$ cm, iar D este piciorul bisectoarei din A. Pe laturile AC și AB se consideră punctele M, respectiv N, astfel încât $DM \parallel AB$ și $DN \parallel AC$ (figura 27).
a) Aflați lungimea segmentului BD.
b) Demonstrați că patrulaterul $AMDN$ este un romb și calculați perimetrul său.

28. Pe laturile AB și CD ale dreptunghiului $ABCD$ se consideră punctele M, respectiv N, astfel încât $AM = BC = CN$. Măsura unghiului BNM este $70°$ (figura 28).
a) Determinați măsura unghiului BMN.
b) Fie O mijlocul diagonalei BD. Demonstrați că punctele M, O și N sunt coliniare.

29. Pe latura CD a pătratului $ABCD$ se consideră punctul R astfel încât $\measuredangle DAR = 22°30'$. Fie S punctul de intersecție a dreptelor AR și BD (figura 29).
a) Arătați că unghiul DSR are măsura $67°30'$.
b) Demonstrați că $BD = AD + DR$.

30. Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu $AB \parallel CD$, $AB = 2CD$, $AD = BC = 12$ cm și $\measuredangle A = 60°$. Punctul M este mijlocul segmentului AB (figura 30).
a) Arătați că $AM = 12$ cm.
b) Demonstrați că AC este bisectoarea unghiului BAD.

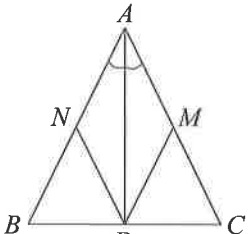


Figura 27

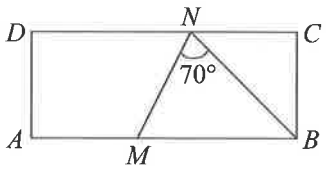


Figura 28

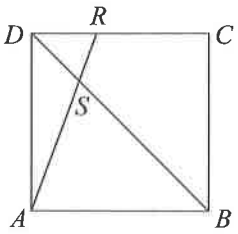


Figura 29

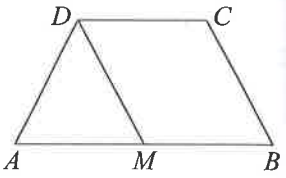


Figura 30

TEMA 9. Asemănare. Relații metrice

1. Pe laturile AB și BC ale triunghiului ABC se consideră punctele M, respectiv N, astfel încât $MN \parallel AC$ (figura 1). Știind că $\frac{AM}{AB} = \frac{5}{8}$, aflați valoarea raportului $\frac{BN}{BC}$.

2. Figura 2 reprezintă o hartă, punctele A, B și C corespunzând unor localități. Se știe că $AB = 3$ cm și $BC = 5$ cm. În realitate, distanța dintre localitățile A și B este de 7,5 km. Aflați distanța reală dintre localitățile B și C.

3. Fie trapez isoscel $ABCD$ are $AB = 12$ cm, $BC = AD = 5$ cm și $CD = 8$ cm. Laturile neparalele AD și BC se întâlnesc în punctul P (figura 3). Aflați lungimea segmentului AP.

4. În figura 4, G este centrul de greutate al triunghiului ABC, iar $GH \parallel AB$, cu $H \in BC$. Știind că $BH = 5$ cm, aflați lungimea segmentului BC.

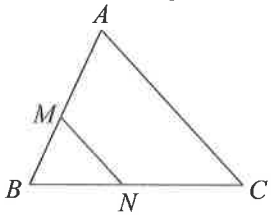


Figura 1

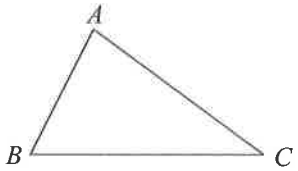


Figura 2

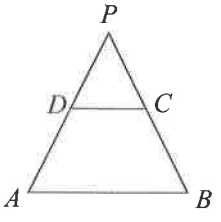


Figura 3

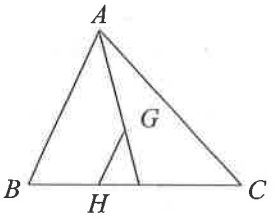


Figura 4

5. O curte are forma unui pătrat $ABCD$ cu diagonala $AC = 24\sqrt{2}$ m (figura 5). Aflați lungimea gardului care împrejmuiește curtea.

6. O grădină are forma unui triunghi echilateral ABC. O cărare pleacă din B și ajunge în punctul P al laturii AC, având lungime minimă posibilă (figura 6). Știind că $BP = 18$ m, aflați distanța dintre punctele P și C.

7. Ecranului unui televizor are forma unui dreptunghi $ABCD$ cu dimensiunile $AB = 120$ cm și $AD = 80$ cm (figura 7). Aflați lungimea diagonalei ecranului, rotunjind rezultatul la un număr întreg de centimetri.

8. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu $\measuredangle A = 90°$ și AD înălțimea corespunzătoare ipotenuzei. Proiecțiile catetelor AB și AC pe ipotenuză au lungimile 16 cm, respectiv 9 cm (figura 8). Aflați lungimea segmentului AD.

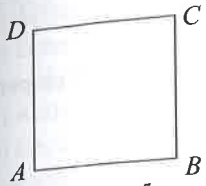


Figura 5

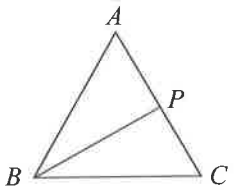


Figura 6

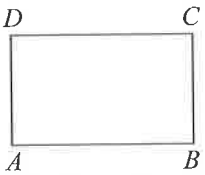


Figura 7

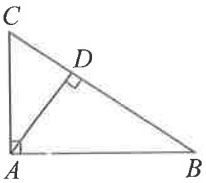


Figura 8

9. Triunghiul ABC are $AB = 6$ cm, $BC = 4\sqrt{3}$ cm și $AC = 2\sqrt{3}$ cm (figura 9). Determinați măsura unghiului C.

10. $ABCD$ este un romb cu perimetrul de 40 cm. Diagonala BD are lungimea 16 cm (figura 10). Calculați tangenta unghiului ABD.

11. $ABCD$ este un dreptunghi cu $BD = 26$ cm și $\sin(\measuredangle DBC) = \frac{12}{13}$ (figura 11). Determinați perimetrul dreptunghiului.

12. $ABCD$ este un trapez cu înălțimea de 8 cm, baza mare $AB = 20$ cm, baza mică $CD = 6$ cm și $\sin(\measuredangle A) = 0{,}8$ (figura 12). Aflați măsura unghiului B.

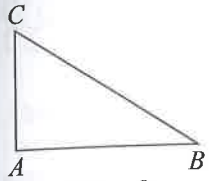


Figura 9

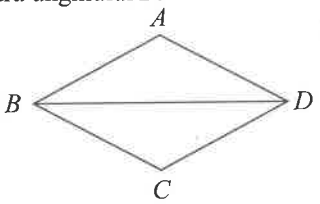


Figura 10

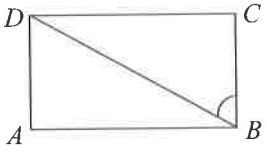


Figura 11

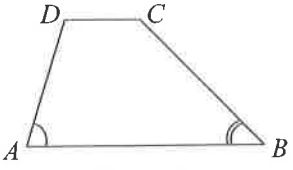


Figura 12

13. Fie ABC un triunghi cu $AB = 9$ cm, $BC = 10$ cm și $AC = 12$ cm. Pe laturile AB și AC se consideră punctele M, respectiv N astfel încât $AM = 5{,}4$ cm și $CN = 4{,}8$ cm (figura 13).

a) Determinați valoarea raportului $\frac{AN}{AC}$.

b) Calculați perimetrul patrulaterului $BCNM$.

14. Un trapez isoscel $ABCD$ are $\measuredangle D = 135°$, $AD = 4\sqrt{2}$ cm și baza mică $CD = 4$ cm (figura 14).

a) Arătați că lungimea bazei mari este $AB = 12$ cm.

b) Dacă $\{O\} = AC \cap BD$, determinați valoarea raportului $\frac{AO}{OC}$.

15. Fie $ABCD$ un romb cu perimetrul de 24 cm. Perimetrul triunghiului ABC este 18 cm. Punctul M este mijlocul segmentului AB, iar $\{N\} = AC \cap MD$ (figura 15).

a) Arătați că unghiul BAD are măsura 120°.

b) Determinați lungimea segmentului CN.

16. $ABCD$ este un pătrat cu $AB = 24$ cm. Pe latura BC se consideră punctele M și N astfel încât $BC = 3BM = 2BN$; notăm $\{P\} = DM \cap AB$ și $\{Q\} = PN \cap CD$.

a) Determinați lungimea segmentului BP.

b) Arătați că unghiul CQP are măsura 45°.

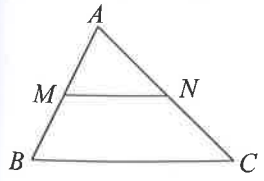


Figura 13

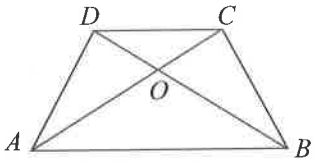


Figura 14

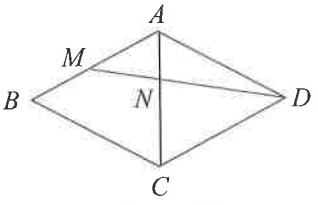


Figura 15

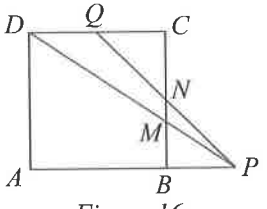


Figura 16

17. În figura 17 este schița unei mese de biliard $ABCD$: un dreptunghi cu $AB = 24$ dm și $AD = 16$ dm. Din punctul E (mijlocul segmentului AD) este lansată o bilă care atinge manta AB în F, apoi ricoșează în C, astfel încât $\measuredangle AFE \equiv \measuredangle BFC$.

a) Arătați că $AF = 8$ dm.

b) Demonstrați că $\measuredangle EFC = 90°$ și calculați lungimea drumului parcurs de bilă.

18. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu $\measuredangle A = 90°$, $AB = 12$ cm și $AC = 9$ cm. Pe laturile AB și AC se consideră punctele D, respectiv E astfel încât $AD = 3$ cm și $AE = 4$ cm (figura 18).

a) Calculați perimetrul patrulaterului $BCED$.

b) Arătați că unghiurile AED și ABC sunt congruente.

19. ABC este un triunghi cu $AB = AC = 10$ cm și $BC = 12$ cm. Pe înălțimea AD a triunghiului se consideră un punct E situat la egală distanță de dreptele BC și AC (figura 19).

a) Arătați că $AD = 8$ cm

b) Determinați distanța de la E la dreapta BC.

20. Un teren are forma unui dreptunghi $ABCD$, cu $AC = 24$ dam, $\measuredangle(AC, BD) = 60°$ și $AB > BC$. În mijlocul F al laturii AB se află o fântână (figura 20).

a) Arătați că $BC = 12$ dam și $AB = 12\sqrt{3}$ dam.

b) Determinați lungimea minimă pe care trebuie să o aibă un furtun de irigat, astfel încât acesta să ajungă de la fântână la orice punct al terenului.

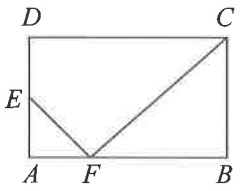


Figura 17

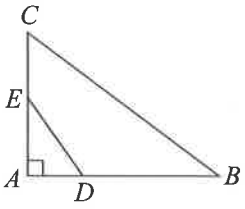


Figura 18

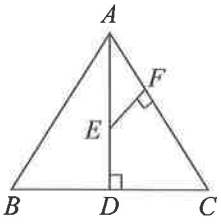


Figura 19

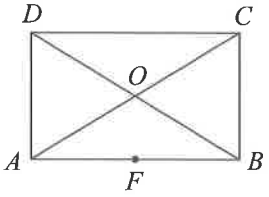


Figura 20

21. În figura 21 este schița unui teren dreptunghiular $ABCD$ având diagonala $AC = 100$ m și raportul dintre lungime și lățime $AB : BC = 4 : 3$. Terenul se împrejmuiește cu un gard de sârmă, oricare doi stâlpi consecutivi de susținere aflându-se la distanță de 4 m unul de altul; în punctul A se află un stâlp.

a) Arătați că lungimea terenului este 80 m.

b) Aflați numărul stâlpilor. Câți stâlpi se află de-a lungul lui AB?

22. Un topograf vrea să determine distanța dintre doi pomi, B și C, situați de o parte și de alta a unui iaz. Topograful determină: $AB = 300$ m, $\measuredangle BAC = \measuredangle ADB = \measuredangle ADC = 90°$ și $\measuredangle CAD = 60°$ (figura 22).

a) Arătați că punctele B, C și D sunt coliniare.

b) Determinați distanța dintre pomii B și C.

23. $ABCD$ este un romb cu $AB = 6$ cm și $\measuredangle A = 60°$ (figura 23).

a) Aflați lungimea diagonalei BD.

b) Arătați că distanța dintre oricare două puncte situate în interiorul rombului este mai mică decât 10,5 cm.

24. Fie $ABCD$ un paralelogram cu $AB = 8$ cm, $AD = 6$ cm și $\measuredangle BAD = 60°$. Segmentul DE, $E \in AB$, este înălțime a paralelogramului (figura 24).

a) Arătați că $DE = 3\sqrt{3}$ cm.

b) Determinați lungimile diagonalelor BD și AC ale paralelogramului.

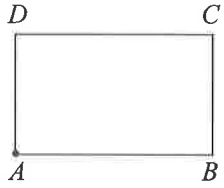


Figura 21

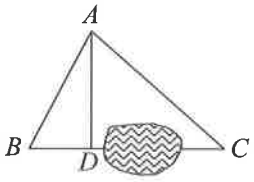


Figura 22

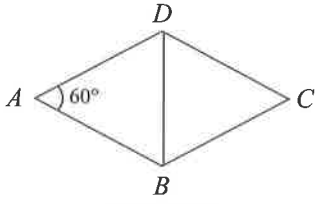


Figura 23

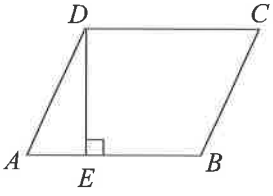


Figura 24

25. Andrei a construit un zmeu din hârtie $ABCD$ cu proprietățile: BCD este triunghi echilateral cu latura de 60 cm, iar BAD este triunghi dreptunghic isoscel cu ipotenuza BD (figura 25). Andrei a întărit zmeul cu baghetă de lemn lipită pe diagonalele AC și BD.

a) Arătați că lungimea lui AB este mai mică decât 45 cm.

b) Aflați lungimea totală a baghetei pe care o folosește Andrei.

26. În figura 26 este reprezentată o fereastră. Rama din lemn are forma dreptunghiului $ABCD$, cu $BC = 2$ m. Fereastra are niște lamele de susținere: $AE = EB = EF = FC = FD = 1$ m și $EF \parallel BC$.
a) Arătați că unghiul $\measuredangle DAE$ are măsura $60°$.
b) Determinați lungimea laturii AB.

27. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu $AB \parallel DC$, $AD \perp AB$, $AC \perp CB$, $AB = 12$ cm, $CD = 6$ cm (figura 27).
a) Arătați că unghiul B are măsura $45°$.
b) Dacă $\{O\} = AD \cap BC$, aflați lungimea segmentului OB.

28. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu $AB \parallel CD$, $AD \perp AB$, $AB = 6$ cm, $CD = 2$ cm și $AD = 2\sqrt{3}$ cm. Notăm cu O intersecția diagonalelor (figura 28).
a) Arătați că $AO = 3$ cm și $OC = 1$ cm.
b) Demonstrați că diagonale trapezului sunt perpendiculare.

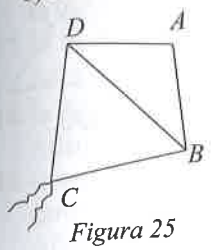


Figura 25

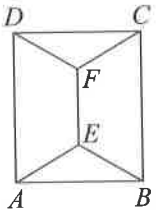


Figura 26

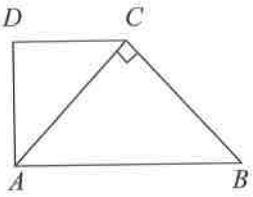


Figura 27

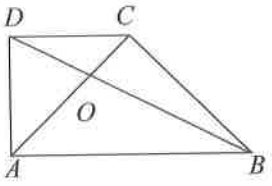


Figura 28

29. $ABCD$ este un dreptunghi cu $AB = 10$ cm și $AD = 4$ cm. Pe latura AB se consideră punctul E astfel încât $AE : BE = 4 : 1$, iar M și N sunt mijloacele segmentelor DE, respectiv CE (figura 29).
a) Arătați că dreptele DE și CE sunt perpendiculare.
b) Aflați lungimea drumului $A–M–N–B$.

30. $ABCD$ este un dreptunghi cu $AB = 4$ cm și $BC = 6$ cm. Punctul M este mijlocul laturii BC, iar E este un punct pe latura CD, astfel încât $DE = x$ cm (figura 30).
a) Aflați, în funcție de x, lungimea segmentului EM.
b) Determinați valoarea lui x pentru care dreptele AM și ME sunt perpendiculare.

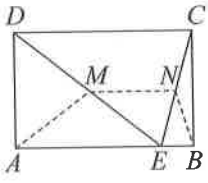


Figura 29

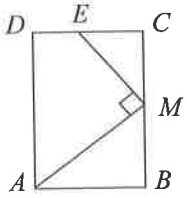


Figura 30

TEMA 10. Arii

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5, 4)$, $B(-3, 0)$ și $C(2, 0)$ (figura 1). Aflați aria triunghiului ABC.

2. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(4, 3)$ (figura 2). Punctul B este simetricul lui A față de axa Oy. Aflați aria triunghiului OAB.

3. Punctul M este mijlocul laturii BC a triunghiului echilateral ABC (figura 3). Știind că $AM = 3$ cm, aflați aria triunghiului ABC.

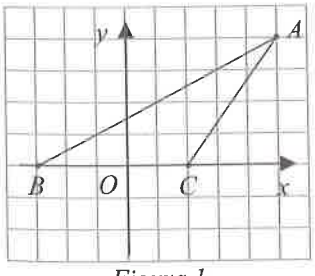


Figura 1

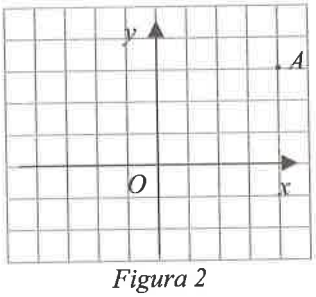


Figura 2

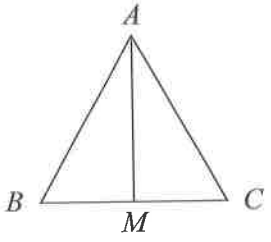


Figura 3

4. În figura 4 este reprezentat triunghiului echilateral ABC. Perimetrul său este x cm, iar aria sa este x cm^2. Determinați valoarea numărului real pozitiv x.

5. Triunghiul ABC este dreptunghic, cu $\measuredangle A = 90°$, $BC = 50$ cm și $\sin(\measuredangle B) = \frac{24}{25}$ (figura 5). Aflați aria triunghiului.

6. Triunghiul ABC este dreptunghic, cu $\measuredangle A = 90°$, $AB = 30$ cm și $BC = 50$ cm, iar M este un punct variabil pe latura BC (figura 6). Determinați lungimea minimă posibilă a segmentului AM.

7. Fie ABC un triunghi dreptunghic. Segmentele AM și AD sunt mediana, respectiv înălțimea corespunzătoare ipotenuzei BC, punctul D este între punctele B și M (figura 7). Se știe că $AM = 13$ cm și $AD = 12$ cm.

a) Calculați aria triunghiului ABC.

b) Arătați că lungimea catetei AB este $4\sqrt{13}$ cm.

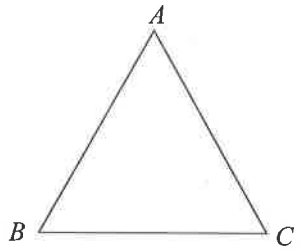


Figura 4

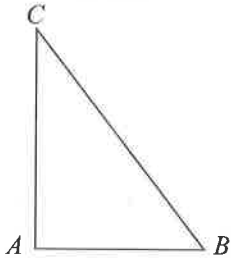


Figura 5

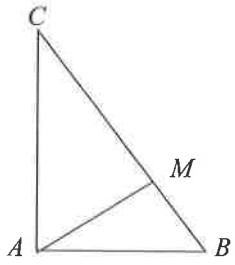


Figura 6

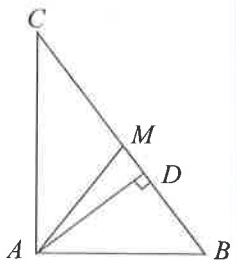


Figura 7

8. Triunghiul ABC este isoscel, cu $AB = AC = 10$ cm și $\measuredangle C = 75°$ (figura 8).

a) Aflați lungimea înălțimii BD.

b) Calculați aria triunghiului ABC.

9. ABC este un triunghi cu $AB = AC = 10$ cm, iar $BC = 12$ cm (figura 9).

a) Aflați aria triunghiului.

b) Determinați sinusul unghiului A.

10. Punctul P este mijlocul medianei BM a triunghiului ABC (figura 10). Aria triunghiului PBC este 17 cm^2. Determinați aria triunghiului ABC.

11. Triunghiul ABC are $AB = 5$ cm, iar aria sa este 20 cm^2. Punctul M este mijlocul laturii AC (figura 11). Aflați distanța de la M la dreapta AB.

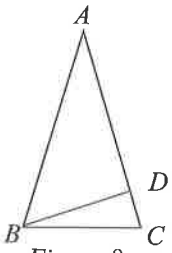


Figura 8

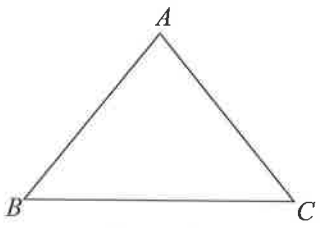


Figura 9

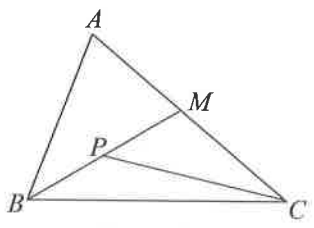


Figura 10

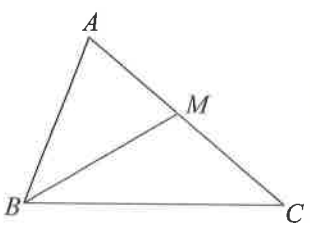


Figura 11

12. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, cu $AB = 9$ cm și $AC = 12$ cm. Pe cateta AC se consideră punctul M astfel încât $MC = 2AM$ (figura 12).

a) Calculați aria triunghiului BCM.

b) Arătați că distanța de la M la dreapta BC este 4,8 cm.

13. Medianele BM și CN ale triunghiului ABC se intersectează în punctul G (figura 13). Aria triunghiului BGN este 17 cm^2. Determinați aria patrulaterului $AMGN$.

14. Pe laturile BC și AC ale triunghiului ABC se consideră punctele M, respectiv N, astfel încât $MN \parallel AB$ (figura 14). Se știe că $AB = 10$ cm, $\mathcal{A}_{ABMN} = 42$ cm^2 și $\mathcal{A}_{CMN} = 8$ cm^2.

a) Aflați raportul dintre ariile triunghiurilor ABC și NMC.

b) Arătați că segmentul MN are lungimea 4 cm.

15. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, cu $AB = 2$ cm și $AC = 6$ cm. Pe latura BC se consideră punctul M astfel încât $CM = x$ cm. Perpendiculara în M pe BC intersectează dreapta AC în punctul N (figura 15).

a) Demonstrați că $MN = \frac{x}{3}$ cm.

b) Știind că $\mathcal{A}_{ABMN} = 3 \cdot \mathcal{A}_{CMN}$, determinați valoarea lui x.

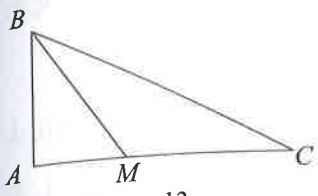


Figura 12

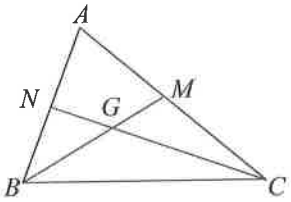


Figura 13

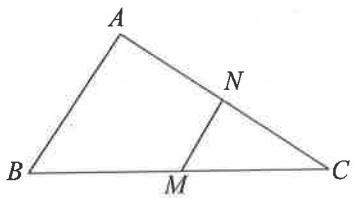


Figura 14

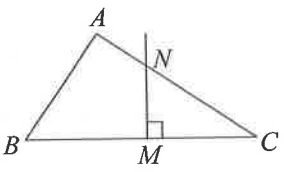


Figura 15

16. Fie ABC un triunghi cu $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm și $AC = 4\sqrt{2}$ cm. Punctul D este proiecția vârfului A pe latura BC (figura 16).

a) Arătați că $BD = 3$ cm.

b) Calculați aria triunghiului ABC.

17. În figura 17 este reprezentat un paralelogram $ABCD$ cu $AB = 16$ cm și $BC = 12$ cm. Știind că $\mathcal{A}_{ABCD} = 96$ cm^2, calculați $d(C, AB) + d(C, AD)$.

18. În figura 17 este reprezentat un paralelogram $ABCD$ de centru O, în care $AC = 28$ cm, $BD = 16$ cm și $\sphericalangle AOB = 120°$. Aflați aria paralelogramului.

19. O curte are forma dreptunghiului $ADFI$ și are perimetrul de 70 m. În punctele A, B, C, ..., J, situate de-a lungul gardului împrejmuitor, se plantează copăcei (figura 19). Distanța dintre oricare doi pomi consecutivi este aceeași. Aflați suprafața curții.

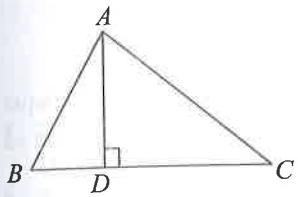


Figura 16

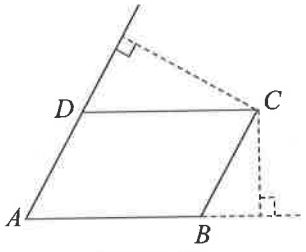


Figura 17

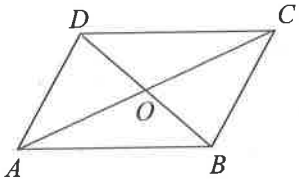


Figura 18

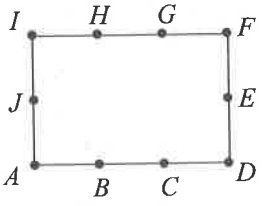


Figura 19

20. În figura 20, $ABCD$ este un dreptunghi cu $AB = 6$ cm și $BC = 5$ cm. Pe laturile BC și CD se consideră punctele P, respectiv Q astfel încât $BP = DQ = 2$ cm.

a) Calculați aria triunghiului APQ.

b) Arătați că distanța de la A la dreapta PQ este 5,2 cm.

21. Rombul $ABCD$ are diagonalele de 12 cm, respectiv 16 cm. Aflați distanța dintre laturile opuse AB și CD ale rombului (figura 21).

22. Rombul $ABCD$ are perimetrul 300 cm, iar diagonala BD are lungimea de 42 cm (figura 22).

a) Aflați aria rombului.

b) Determinați sinusul unghiului BAD.

23. Un pătrat de carton este împărțit în două bucăți, având ariile 31 cm^2, respectiv 33 cm^2 (figura 23). Aflați perimetrul pătratului.

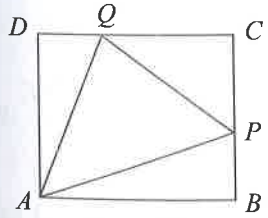


Figura 20

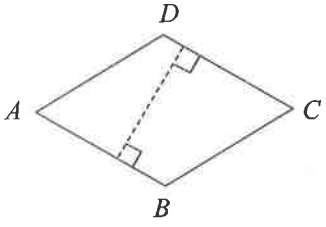


Figura 21

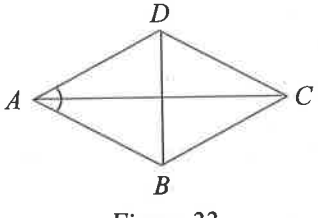


Figura 22

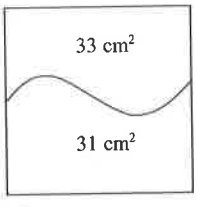


Figura 23

24. Pe latura BC a pătratului $ABCD$ se consideră punctul M astfel încât $\text{tg}(\sphericalangle BAM) = 0{,}5$. Fie $\{E\} = BD \cap AM$; se știe că $BE = 4$ cm (figura 24).

a) Arătați că $AD = 2BM$.

b) Determinați aria pătratului.

25. O grădină are forma pătratului $ABCD$ cu $AB = 300$ m. Pe laturile AB, BC, CD și DA se consideră punctele M, N, P, respectiv Q astfel încât $MB = NC = PD = QA = 100$ m (figura 25).

a) Arătați că $MNPQ$ este un pătrat.

b) Cât costă să acoperim cu gazon suprafața $MNPQ$, dacă 1 m^2 de gazon costă 22 de lei.

26. Figura 26 este obținută prin suprapunerea a două foi pătratice de hârtie, $ABCD$ și $MNPO$. Se știe că $AB = MN = 4$ cm, O este centrul pătratului $ABCD$, $OM \parallel AB$ și $OP \parallel AD$, iar $\{Q\} = OP \cap CD$ și $\{R\} = OM \cap BC$.

a) Demonstrați că $OQCR$ este un pătrat.

b) Calculați aria întregii suprafețe ($ADQPNMRB$).

27. În figura 27, $ABCD$ și $AEFG$ sunt dreptunghiuri cu $AB = AG = 2$ cm și $AD = AE = 4$ cm. Punctele A, B și E sunt coliniare, la fel și punctele A, D și G.

a) Demonstrați că $BDEG$ este trapez isoscel.

b) Calculați aria trapezului $BDEG$.

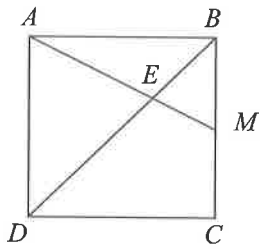


Figura 24

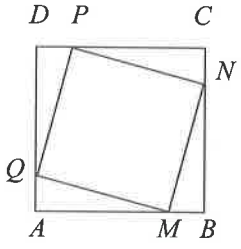


Figura 25

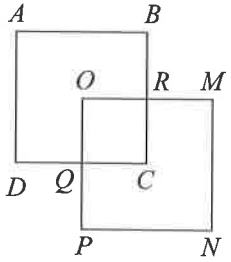


Figura 26

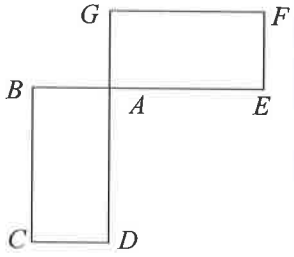


Figura 27

28. O terasă are forma unui trapez dreptunghic $ABCD$, cu $\measuredangle A = \measuredangle D = 90°$, $BC = 10$ m și $AD = 8$ m. Terasa este împărțită în două, ca în figura 28, astfel: dreptunghiul $AMND$ este un restaurant, iar trapezul $BMNC$ este o cofetărie. Știm că $AM = 6$ m, iar $NC = x$ m, cu $0 < x < 9$.

a) Arătați că $\mathcal{A}_{MBNC} = 8(3 + x)$ m^2.

b) Determinați x pentru care restaurantul și cofetăria au suprafețe egale.

29. Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu $AB \parallel CD$, $AD = BC$, $AB = 16$ cm și $CD = 12$ cm. Diagonalele AC și BD ale trapezului sunt perpendiculare (figura 29).

a) Arătați că aria trapezului este 196 cm^2.

b) Determinați perimetrul trapezului.

30. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu $\measuredangle A = 90°$, $AB = 15$ cm și $BC = 25$ cm. Notăm cu D proiecția punctului A pe BC și cu M, N, P mijloacele laturilor BC, AC, respectiv AB.

a) Demonstrați că $DMNP$ este trapez isoscel.

b) Calculați aria trapezului $DMNP$.

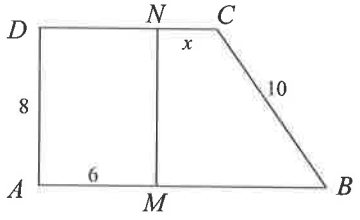


Figura 28

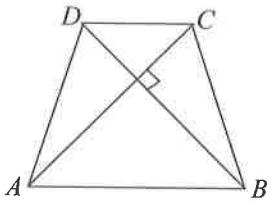


Figura 29

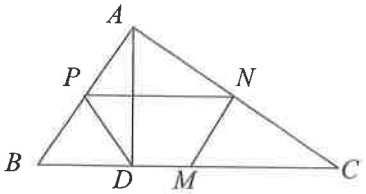


Figura 30

TEMA 11. Cercul

1. Fie OA și OB două raze perpendiculare ale cercului $\mathscr{C}(O, r)$, cu $r = 6$ cm, M este punct al arcului mic $\overset{\frown}{AB}$, iar C și D sunt proiecțiile lui M pe OA, respectiv OB (figura 1). Determinați lungimea segmentului CD.
2. Două cercuri $\mathscr{C}_1(O_1, 6\text{ cm})$ și $\mathscr{C}_2(O_2, 6\text{ cm})$ se intersectează în punctele A și B. Centrul O_2 al celui de-al doilea cerc se află pe cercul $\mathscr{C}_1$ (figura 2).
   a) Care este natura patrulaterului AO_1BO_2?
   b) Determinați aria patrulaterului AO_1BO_2.
3. Fie A, B, C trei puncte ale cercului $\mathscr{C}(O)$ astfel încât $\measuredangle AOB = 120°$ și $\measuredangle BOC = 140°$ (figura 3). Determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.
4. Fie A, B, C trei puncte pe cercul de centru O astfel încât $\measuredangle ABC = 90°$ și $\measuredangle BAC = 30°$ (figura 4).
   a) Aflați măsurile arcelor mici $\overset{\frown}{AB}$ și $\overset{\frown}{BC}$.
   b) Demonstrați că punctele A, O și C sunt coliniare.

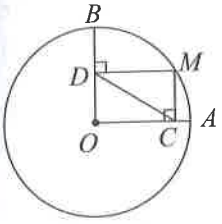


Figura 1

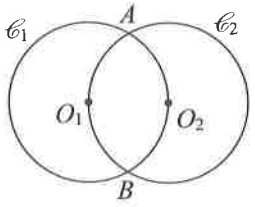


Figura 2

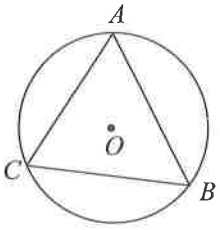


Figura 3

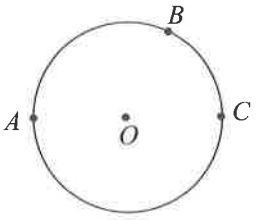


Figura 4

5. Pe un cerc se consideră punctele A, B, C, D, în această ordine, astfel încât $\measuredangle ADC = 100°$ și $\measuredangle ACB = 30°$ (figura 5). Determinați măsura unghiului BAC.
6. Fie AB și CD două diametre ale cercului $\mathscr{C}(O)$, astfel încât $\measuredangle BCD = 50°$ (figura 6). Determinați măsurile unghiurilor $\measuredangle AOD$ și $\measuredangle ACD$.
7. Coardele AB și CD ale cercului $\mathscr{C}$ se intersectează în punctul P (figura 7). Se știe că $\measuredangle BAC = 25°$ și $\measuredangle ABD = 20°$. Determinați măsura unghiului $\measuredangle BPC$.
8. În interiorul cercului $\mathscr{C}(O, r)$, cu $r = 5$ cm, se consideră punctul M astfel încât $OM = 3$ cm. Coarda AB are mijlocul în punctul M (figura 8).
   a) Demonstrați că $OM \perp AB$.
   b) Determinați lungimea coardei AB.

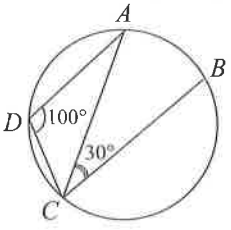


Figura 5

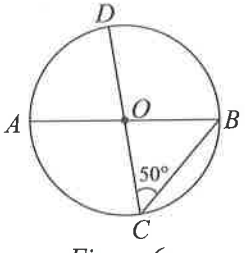


Figura 6

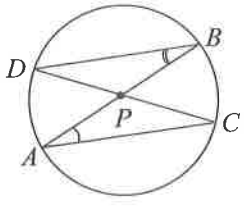


Figura 7

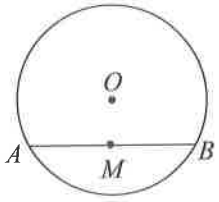


Figura 8

9. Fie AB o coardă a cercului $\mathscr{C}(O, r)$, cu $r = 4$ cm (figura 9). Lungimea coardei AB este $4\sqrt{3}$ cm.
   a) Aflați distanța de la centrul cercului la dreapta AB.
   b) Determinați măsura unghiului $\measuredangle AOB$.
10. În figura 10, AB și CD sunt două coarde paralele ale cercului $\mathscr{C}(O, r)$, astfel încât $O \in \text{Int}(ABCD)$. Se știe că $r = 8$ cm, $AB = 8$ cm și $CD = 4\sqrt{13}$ cm. Aflați distanța dintre dreptele AB și CD.
11. AB și AC sunt două coarde perpendiculare și congruente ale cercului $\mathscr{C}(O, r)$, cu $r = 4\sqrt{2}$ cm.
   a) Demonstrați că punctele B, O și C sunt coliniare (figura 11).
   b) Aflați lungimea coardei AB și distanța de la centrul cercului la coarda AB.

12. Pe cercul $\mathscr{C}(O, r)$, cu $r = 4$ cm, se consideră punctele A și B astfel încât unghiul $\sphericalangle AOB$ este ascuțit, iar $\mathcal{A}_{AOB} = 4\sqrt{3}$ cm^2 (figura 12). Determinați măsurile arcelor cu extremitățile în A și B.

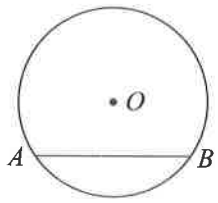


Figura 9

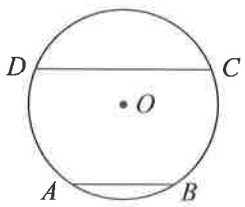


Figura 10

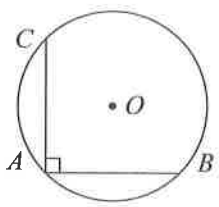


Figura 11

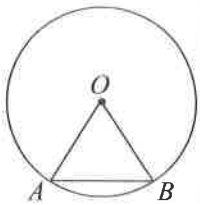


Figura 12

13. Fie M mijlocul coardei AB a cercului $\mathscr{C}(O, r)$, iar N punctul în care semidreapta OM intersectează cercul (figura 13). Dacă $MN = 2OM$ și $AB = 4\sqrt{2}$ cm, aflați lungimea razei r.

14. Punctele C și D se află pe unul dintre semicercurile de diametru AB, astfel încât arcele $\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{DC}$ și $\overset{\frown}{BC}$ au măsuri egale (figura 14). Se știe că $CD = 6$ cm.

a) Demonstrați că $ABCD$ este un trapez isoscel.

b) Aflați perimetrul acestui trapez.

15. În figura 15 este reprezentat un semicerc de diametru $AB = 12$ cm, împărțit în șase arce egale cu ajutorul punctelor C, D, E, F și G.

a) Determinați măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle FAB$ și $\sphericalangle BCG$.

b) Arătați că lungimea segmentului AC este mai mică decât 3,6 cm.

16. Fie $\mathscr{C}(O)$ cercul circumscris triunghiului isoscel ABC ($AB = AC = 10$ cm, $BC = 12$ cm). Notăm cu M mijlocul lui BC și cu D punctul de intersecție a semidreptei AM cu $\mathscr{C}$ (figura 16).

a) Arătați că punctele A, O și M sunt coliniare.

b) Demonstrați că raza cercului are lungimea 6,25 cm.

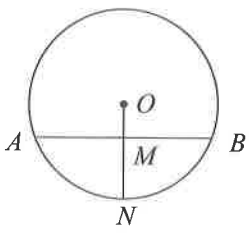


Figura 13

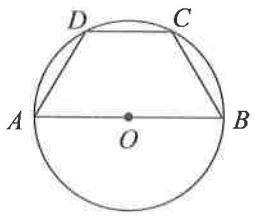


Figura 14

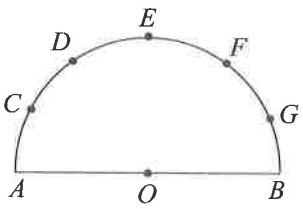


Figura 15

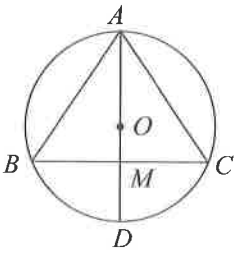


Figura 16

17. A este un punct exterior cercului $\mathscr{C}(O, r)$, iar $AO = 12$ cm. Dreapta AT este tangentă cercului ($T \in \mathscr{C}$), $\sphericalangle OAT = 30°$, iar M este punctul de intersecție dintre cerc și segmentul OA (figura 17).

a) Arătați că raza cercului are lungimea 6 cm.

b) Demonstrați că triunghiul AMT este isoscel.

18. Se consideră două cercuri $\mathscr{C}_1(O_1)$ și $\mathscr{C}_2(O_2)$, tangente exterior în T. AB este o tangentă exterioară comună ($A \in \mathscr{C}_1$, $B \in \mathscr{C}_2$), iar M este intersecția perpendicularei în T pe O_1O_2 cu AB (figura 18).

a) Arătați că M este mijlocul lui AB.

b) Demonstrați că dreptele MO_1 și MO_2 sunt perpendiculare.

19. O foaie de tablă are forma unui pătrat cu latura de 4 cm. Decupăm din foaie discul de rază maximă, iar din acesta decupăm un pătrat cu latura maximă (figura 19). Determinați latura noului pătrat.

20. Triunghiul echilateral ABC are apotema $OM = \sqrt{3}$ cm (figura 20).

a) Aflați raza cercului înscris și raza cercului circumscris triunghiului.

b) Determinați aria triunghiului.

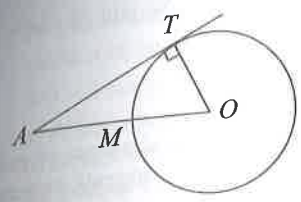


Figura 17

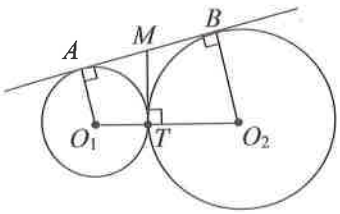


Figura 18

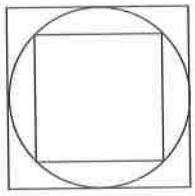


Figura 19

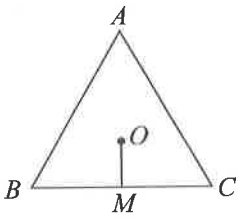


Figura 20

21. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r)$ (figura 21). Diagonala AC are lungimea $10\sqrt{3}$ cm.

a) Arătați că raza cercului este $r = 10$ cm.

b) Calculați valoarea raportului dintre ariile triunghiurilor ACD și ACE.

22. Se consideră cercul $\mathcal{C}(O, r)$, cu $r = 10$ cm și fie A, B două puncte ale sale. Aria sectorului OAB din figura 22 este 30% din aria întregului disc.

a) Arătați că unghiul AOB are măsura 108°.

b) Calculați lungimea arcului $\overset{\frown}{AB}$.

23. Pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$ se consideră punctele A, B, C, D, în această ordine, astfel încât arcele $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ și $\overset{\frown}{CD}$ au lungimile 2 cm, 5 cm, respectiv 6 cm, iar $\measuredangle AOB = 30°$ (figura 23).

a) Determinați măsurile unghiurilor BOC și COD.

b) Aflați lungimea razei cercului.

24. Un grădinar a împărțit terenul său, în formă de pătrat cu latura de 8 m, în patru pătrate egale. În fiecare din aceste pătrate a înscris un cerc și a sădit flori în interiorul fiecărui cerc (figura 24). Pe terenul rămas a însămânțat iarbă.

a) Aflați aria suprafeței pe care sunt flori.

b) Demonstrați că suprafața acoperită cu iarbă este mai mică decât o treime din cea cu flori.

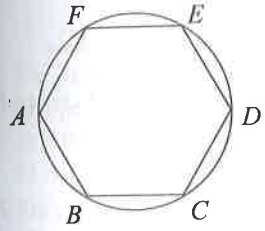


Figura 21

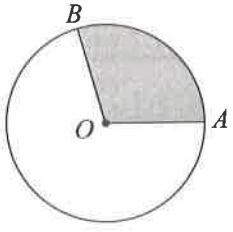


Figura 22

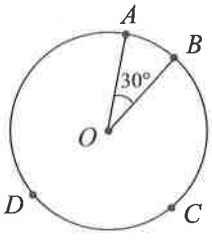


Figura 23

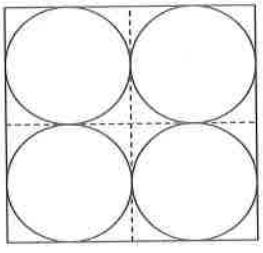


Figura 24

25. În figura 25, $ABCD$ este un dreptunghi cu aria de 48 cm^2. Cercurile $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$ sunt tangente exterior în T, $\mathcal{C}_1$ este tangent în D la AD, iar $\mathcal{C}_2$ este tangent în C la BC și în E la AB. Se știe că $AB = 3BC$.

a) Arătați că $r_1 + r_2 = \frac{1}{2} AB$.

b) Determinați aria sectorului colorat.

26. Triunghiul echilateral ABC, cu $AB = 12$ cm, are vârfurile situate pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$ (figura 26).

a) Determinați lungimea razei r.

b) Calculați aria porțiunii colorate din figură.

27. În figura 27, punctul C aparține unui semicerc de diametru AB, iar pe laturile AC și BC, ca diametre, sunt construite două semicercuri. Se știe că $AB = 10$ cm și $AC = 6$ cm.

a) Calculați lungimea segmentului BC.

b) Determinați aria suprafeței colorate.

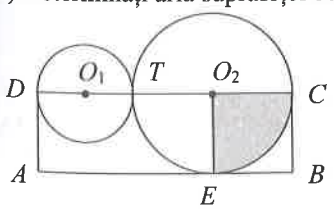


Figura 25

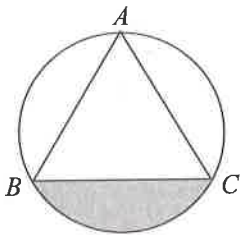


Figura 26

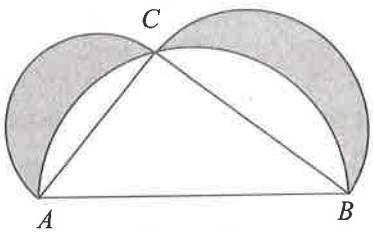


Figura 27

28. Cercurile $\mathcal{C}_1(O_1, r)$ și $\mathcal{C}_2(O_2, r)$, cu $r = 6$ cm, se intersectează în punctele A și B (figura 28). Se știe că $O_1O_2 = 6\sqrt{3}$ cm.

a) Demonstrați că $AB = 6$ cm.

b) Determinați aria suprafeței colorate.

29. În figura 29 este desenată o curea de transmisie între două roți dințate, prima cu raza $O_1A = 6$ dm și a doua cu raza $O_2B = 1$ dm, ale căror centre se află la distanța $O_1O_2 = 10$ dm unul față de celălalt. AB este o tangentă comună exterioară a celor două cercuri.

a) Arătați că măsura unghiului AO_1O_2 este $60°$.

b) Determinați lungimea curelei de transmisie.

30. O pistă de atletism are forma și dimensiunile din figura 30: la capete, pista este mărginită de semicercuri cu centrele în A și B, cu diametrele de 32 m și 40 m, iar porțiunile în linie dreaptă au câte 100 m.

a) Determinați suprafața pistei.

b) În câte secunde parcurge un sportiv un tur complet de pistă, alergând la coardă (pe drumul cel mai scurt), cu viteza 4 m/s? (Aproximați numărul π cu 3.)

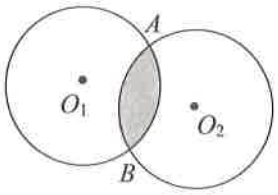


Figura 28

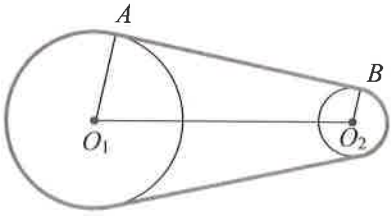


Figura 29

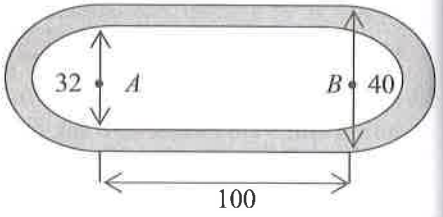


Figura 30

TEMA 12. Elemente ale geometriei în spațiu

1. În figura 1, ABC este un triunghi echilateral cu $AB = 18$ cm, iar O este centrul triunghiului. În punctul O construim perpendiculara OP pe planul (ABC), cu lungimea $OP = 3$ cm.

a) Aflați distanța de la punctul P la dreapta BC.

b) Demonstrați că dreptele AP și BC sunt perpendiculare.

2. Pătratele $ABCD$ și $ABEF$ sunt situate în plane perpendiculare (figura 2).

a) Aflați intersecția planelor (CEF) și (AEB).

b) Determinați măsura unghiului format de dreptele AE și BD.

3. Pătratul $ABCD$ și triunghiul dreptunghic isoscel ABM ($\sphericalangle BAM = 90°$) sunt situate în plane diferite, astfel încât triunghiul BDM este echilateral (figura 3).

a) Aflați măsura unghiului determinat de dreptele BM și DC.

b) Demonstrați că dreapta AM este perpendiculară pe planul (BCD).

4. În figura 4, ABC este un triunghi echilateral, iar V este un punct exterior planului (ABC), egal depărtat de punctele A, B și C. Punctul M este mijlocul laturii BC, $VA = 12$ cm și distanța de la punctul V la planul (ABC) este egală cu 6 cm.

a) Aflați lungimea segmentului AB.

b) Determinați tangenta unghiului format de dreapta VB cu planul (VAM).

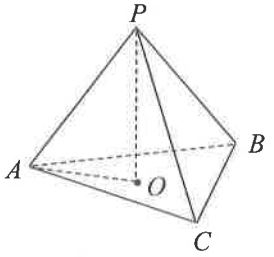


Figura 1

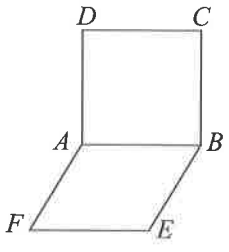


Figura 2

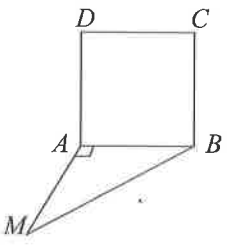


Figura 3

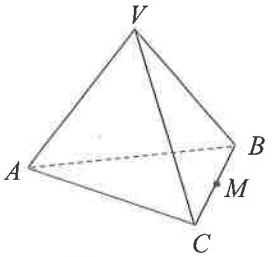


Figura 4

5. Pe planul triunghiului dreptunghic AMB ($\sphericalangle M = 90°$) se ridică perpendiculara QP, unde P este un punct situat pe cateta AM, cu $3PM = AM$ (figura 5). Punctul C este simetricul punctului B față de dreapta AM. Se știe că $AB = 12$ cm, $MB = 6$ cm și $QP = 4\sqrt{6}$ cm.
a) Aflați măsura unghiului format de dreapta AC cu planul (QAM).
b) Demonstrați că punctul Q este egal depărtat de punctele A, B și C.

6. De aceeași parte a pătratului $ABCD$ se ridică perpendicularele AM și BN pe planul acestuia, astfel încât $BN = 8$ cm, $MA = 4$ cm și $AB = 4$ cm (figura 6).
a) Determinați dreapta de intersecție a planelor (MNC) și (ABD).
b) Aflați măsura unghiului format de dreptele MN și AC.

7. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB = 2\sqrt{3}$ cm și $AD = 2$ cm. De o parte și de alta a planului (ABC) construim perpendicularele AM și CN pe planul dreptunghiului, astfel încât $AM = 1$ cm și $CN = 3$ cm (figura 7).
a) Aflați măsura unghiului format de dreapta MN cu planul (ABC).
a) Determinați lungimea segmentului MN.

8. Pe planul pătratului $ABCD$, $AB = 18$ cm, se ridică perpendiculara MO, $\{O\} = AC \cap BD$, $MO = 9\sqrt{2}$ cm. Notăm cu P și Q mijloacele segmentelor MC, respectiv AB (figura 8).
a) Aflați măsura unghiului determinat de dreptele OP și AD.
b) Demonstrați că planele (POQ) și (MAD) sunt paralele.

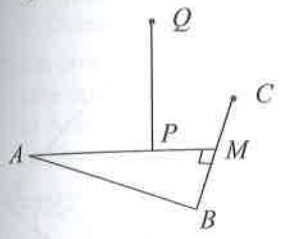


Figura 5

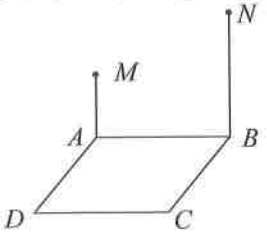


Figura 6

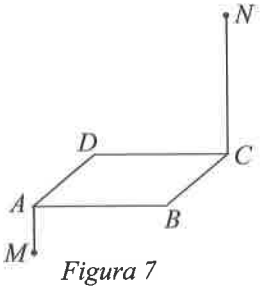


Figura 7

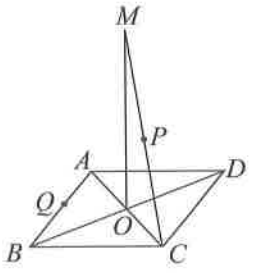


Figura 8

9. Fie ABC un triunghi dreptunghic ($\sphericalangle A = 90°$) cu $AB = 6$ cm și $BC = 12$ cm. În punctul C construim perpendiculara MC pe planul (ABC), cu lungimea $MC = 6$ cm (figura 9).
a) Aflați distanța de la punctul C la planul (MAB).
b) Arătați că planele (MAB) și (MAC) sunt perpendiculare.

10. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată cu $AB = 3\sqrt{2}$ cm, $AA' = 4\sqrt{3}$ cm, iar M mijlocul muchiei CC' (figura 10).
a) Arătați că $BD \perp A'M$.
b) Determinați măsura unghiului format de dreapta $A'M$ cu planul (ABC).

11. În figura 10, $ABCDA'B'C'D'$ este o prismă patrulateră regulată cu muchia laterală $AA' = 10$ cm. Pe muchiile AA' și CC' se consideră punctele N, respectiv M, astfel încât $MC = 3$ cm și $AN = 7$ cm.
a) Aflați măsura unghiului dintre dreptele BM și DC.
b) Demonstrați că punctele B, M, D' și N sunt coplanare.

12. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub, iar S este simetricul punctului D față de punctul C (figura 11).
a) Aflați măsura unghiului dintre dreptele SB și $D'C'$.
b) Arătați că $SB \perp (DD'B')$.

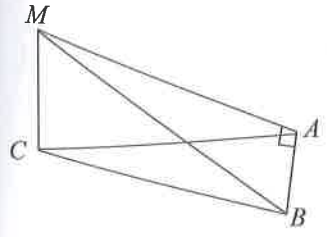


Figura 9

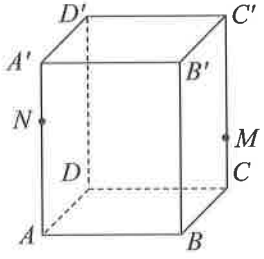


Figura 10

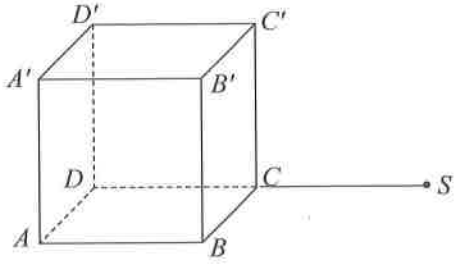


Figura 11

13. În cubul *POLIEDRU*, punctele O_1 și O_2 sunt centrele fețelor *DRLO*, respectiv *EUIP* (figura 12).
a) Aflați măsura unghiului format de dreptele *EI* și *PD*.
b) Demonstrați că $PO_1 \parallel RO_2$.

14. Fie *VABCD* o piramidă patrulateră regulată, cu muchia bazei $AB = 12$ cm. Punctul *O* este centrul bazei *ABCD*, *M* este mijlocul laturii *BC*, *P* este mijlocul apotemei *VM* și $VM = 10$ cm (figura 13).
a) Aflați distanța de la punctul *P* la planul (*ABC*).
b) Demonstrați că $OP \parallel (VAD)$.

15. Piramida patrulateră *VABCD* are toate muchiile egale cu 6 cm, iar *O* este centrul bazei *ABCD* (figura 13).
a) Aflați tangenta unghiului planelor (*VBC*) și (*ABC*).
b) Demonstrați că punctul *O* este egal depărtat de toate muchiile piramidei.

16. Tetraedrul regulat *ABCD* are înălțimea *AO* de lungime $2\sqrt{6}$ cm. Punctele *M* și *N* sunt mijloacele muchiilor *AB*, respectiv *AD* (figura 14).
a) Aflați lungimea segmentului *MN*.
b) Determinați măsura unghiului format de dreptele *MN* și *AC*.

17. În figura 15, *VABCD* este o piramidă patrulateră regulată cu muchia bazei $AB = 6$ cm și înălțimea $VO = 3\sqrt{3}$ cm. Punctul *M* este mijlocul laturii *BC*.
a) Aflați distanța de la *M* la planul (*VAC*).
b) Determinați măsura unghiului planelor (*VAD*) și (*VBC*).

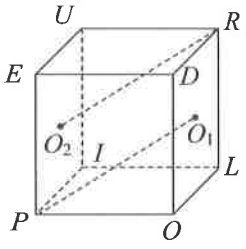


Figura 12

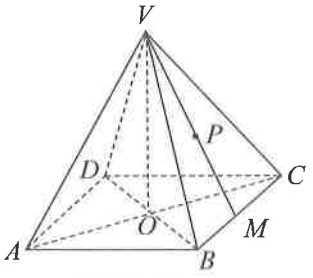


Figura 13

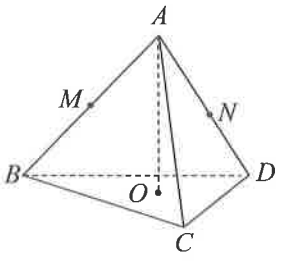


Figura 14

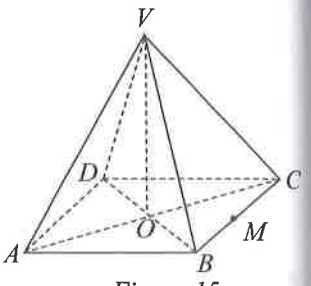


Figura 15

18. Fie $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ o prismă hexagonală regulată cu muchia bazei $AB = 4$ cm și muchia laterală $AA_1 = 1$ cm (figura 16).
a) Aflați distanța de la punctul A_1 la dreapta *CD*.
b) Demonstrați că planele (A_1AC) și (D_1DF) sunt paralele.

19. Dreptunghiul *ABB'A'* este o secțiune axială a unui cilindru circular drept, iar *M* este un punct pe conturul bazei inferioare, astfel încât măsura arcului $\overset{\frown}{AM}$ este 120° (figura 17).
a) Aflați măsura unghiului determinat de dreptele *MB* și *A'B'*.
b) Demonstrați că $(A'AM) \perp (B'BM)$.

20. Triunghiul echilateral *VAB*, cu $VA = 12$ cm, este o secțiune axială a unui con circular drept. Punctele *M* și *N* aparțin conturului bazei, astfel încât arcele $\overset{\frown}{AM}$, $\overset{\frown}{MN}$ și $\overset{\frown}{NB}$ au măsuri egale (figura 18).
a) Arătați că aria proiecției triunghiului *VMN* pe planul bazei conului nu depășește 18 cm^2.
b) Aflați măsura unghiului determinat de dreptele *VB* și *MN*.

21. Fie *ABCA'B'C'* o prismă triunghiulară regulată, în care $AB = AA' = 6$ cm, iar *O* este mijlocul segmentului *AC'* (figura 19).
a) Aflați distanța de la punctul *C'* la dreapta *AB*.
b) Demonstrați că dreapta *AB* este paralelă cu planul (*B'OC*).

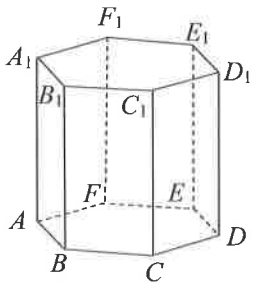


Figura 16

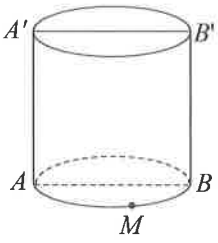


Figura 17

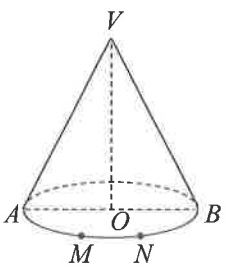


Figura 18

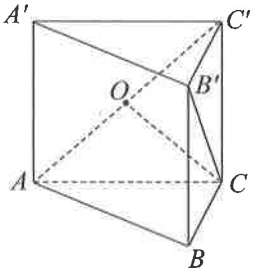


Figura 19

22. În figura 20, $ABCA'B'C'$ este o prismă triunghiulară regulată, iar punctul M este mijlocul muchiei $A'B'$.
a) Aflați măsura unghiului dintre dreptele AB și $B'C'$.
b) Demonstrați că $A'C \parallel (BC'M)$.

23. Un paralelipiped dreptunghic $ABCDA_1B_1C_1D_1$ are dimensiunile $AB = 2\sqrt{6}$, $AD = 2\sqrt{3}$ cm și $AA_1 = 6$ cm. Fie S un punct oarecare pe muchia DD_1 (figura 21).
a) Arătați că dreptele BD_1 și DB_1 sunt perpendiculare.
b) Determinați distanța de la punctul S la planul (ACC_1).

24. Fie $ABCDA_1B_1C_1D_1$ un paralelipiped dreptunghic în care $AB = AA_1 = 4$ cm, $BC = 2\sqrt{3}$ cm și M este mijlocul muchiei AB (figura 21).
a) Aflați lungimea proiecției segmentului MD_1 pe planul (ABC).
b) Determinați măsura unghiului planelor (MDD_1) și (MCC_1).

25. În figura 22, $SABC$ este o piramidă triunghiulară regulată cu baza ABC. Punctul M este mijlocul laturii BC, $AB = 12$ cm și $SM = 6$ cm.
a) Aflați lungimea proiecției segmentului SM pe planul bazei.
a) Demonstrați că dreptele SA și SM sunt perpendiculare.

26. Fie $SABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu latura bazei $AB = 12$ cm și înălțimea $SO = 6$ cm. Punctul M este mijlocul muchiei BC, iar punctul N aparține segmentului SO, astfel încât $SN = 2NO$ (figura 22).
a) Arătați că segmentele MN și SN au aceeași lungime.
b) Determinați măsura unghiului format de planele (NBC) și (SBC).

27. Un con circular drept are generatoarea de lungime $6\sqrt{2}$ cm. Există trei generatoare, VA, VB, VC, care sunt, două câte două, perpendiculare (figura 23).
a) Arătați că raza bazei conului este mai mică de 7 cm.
b) Determinați tangenta unghiului format de dreapta OA cu planul (VBC).

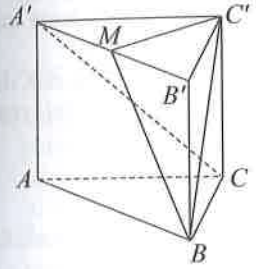


Figura 20

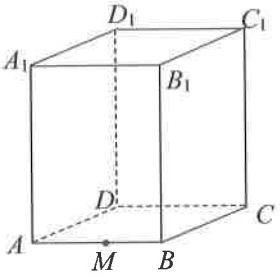


Figura 21

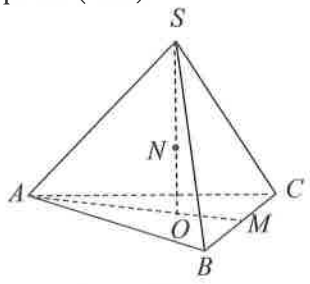


Figura 22

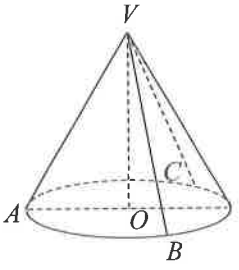


Figura 23

28. Fie $VABCDEF$ o piramidă hexagonală regulată cu muchia bazei $AB = 4$ cm și muchia laterală $VA = 8$ cm. Punctul Q este situat pe muchia VB, astfel încât $BQ = 2$ cm (figura 24).
a) Aflați distanța de la punctul Q la dreapta CF.
b) Demonstrați că $VE \parallel (AQC)$.

29. $ABCA'B'C'$ este un trunchi de piramidă triunghiulară regulată, în care $AB = 24$ cm, $A'B' = 12$ cm și $AA' = 6\sqrt{2}$ cm; O și O' sunt centrele bazelor ABC, respectiv $A'B'C'$, iar M și M' sunt mijloacele segmentelor BC, respectiv $B'C'$ (figura 25).
a) Arătați că punctele A', M și mijlocul segmentului OO' sunt coliniare.
b) Demonstrați că dreptele AA' și MM' sunt perpendiculare.

30. În figura 26, $ABCDA'B'C'D'$ este un trunchi de piramidă patrulateră regulată cu muchiile bazelor $AB = 8$ cm și $A'B' = 2$ cm, înălțimea $OO' = 3$ cm, iar M este mijlocul laturii BC.
a) Aflați măsura unghiului planelor (BCC') și (ABC).
b) Determinați lungimea segmentului $A'M$.

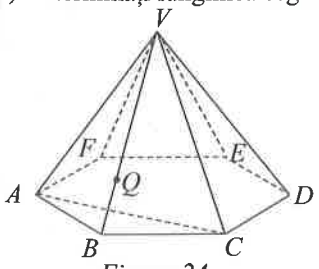


Figura 24

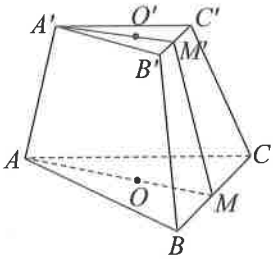


Figura 25

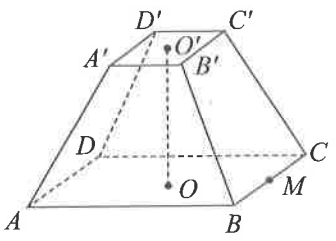


Figura 26

TEMA 13. Poliedre

1. Într-un paralelipiped dreptunghic, ariile a trei fețe care au un vârf comun sunt egale cu 12 cm^2, 36 cm^2, respectiv 48 cm^2. Aflați volumul paralelipipedului.
2. Aflați câte cuburi mici cu muchia de 2 cm sunt necesare pentru a forma un cub cu muchia de 6 dm.
3. O vază are forma unei prisme patrulatere regulate cu latura bazei egală cu 10 cm și înălțimea egală cu 40 cm. Până la ce înălțime se ridica apa, atunci când turnăm 3 litri de apă în vază?
4. O prismă triunghiulară regulată are volumul egal cu $12\sqrt{3}$ cm^3 și înălțimea de 4 cm. Arătați că aria laterală a prismei este mai mare de 40 cm^2.
5. O prismă hexagonală regulată are aria laterală egală cu $72\sqrt{3}$ cm^3 și înălțimea egală cu $2\sqrt{3}$ cm. Aflați volumul prismei.
6. Pentru construcția unui zid lung de 25 m, înalt de 18 dm și lat de 20 dm, s-au folosit 2880 de cărămizi. Pentru a vopsi 1 m^2 de zid, se folosesc 200 g de vopsea.
   a) Aflați câte cărămizi s-au folosit pentru 1 m^3 de zid.
   b) Arătați că 30 kg de vopsea ajung pentru a vopsi complet zidul.
7. O piscină are forma unui paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 15$ m, $AD = 6$ m și adâncimea $AA' = 2$ m (figura 1).
   a) Arătați că cinci robinete, având fiecare debitul de 190 ℓ/min, nu pot umple piscina în trei ore.
   b) Aflați câte plăcuțe de faianță de formă pătrată cu latura de 50 cm sunt necesare pentru a acoperi pereții laterali și baza piscinei ($ABCD$).
8. Un stup are forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 30 cm, 40 cm, respectiv 50 cm.
   a) Justificați că în interiorul stupului încape o tijă cu lungimea de 70 cm.
   b) Arătați că, oricum ar fi dispuse 61 de albine în interiorul stupului, există cel puțin două aflate la o distanță mai mică de 1,75 dm una față de cealaltă.
9. În figura 2, $ABCDA'B'C'D'$ este un vas cubic, fără capac. Vasul a fost umplut folosind exact un litru de apă, dar, din cauza căldurii, o parte din apă s-a evaporat, ajungând la nivelul $AM = 8$ cm, unde M este un punct pe muchia AA'. Inițial, în cub se află o tijă cu capetele în punctele B și D'.
   a) Aflați ce volum de apă s-a evaporat.
   b) Determinați lungimea porțiunii din tijă care a rămas în apă.
10. Un suport de umbrele are forma unei prisme patrulatere regulate $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 40$ cm. O umbrelă cu lungimea de 90 cm stă în suport, cu capetele în B și în D' (figura 3).
    a) Aflați înălțimea suportului.
    b) Determinați volumul suportului (în litri).
11. O cutie de ambalat are forma prismei patrulatere regulate $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia bazei $AB = 12$ cm și muchia laterală $AA' = 20$ cm. Punctul M este mijlocul muchiei CC' (figura 4).
    a) În procesul de fabricație a cutiei, există pierderi de material egale cu 15% din suprafața prismei. Aflați cât material este necesar pentru confecționarea unei cutii.
    b) Se aplică o bandă adezivă de lungime minimă, din punctul A în punctul M, pe suprafața laterală a cutiei. Găsiți lungimea benzii.

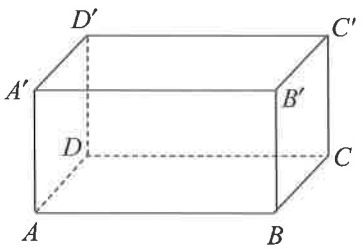


Figura 1

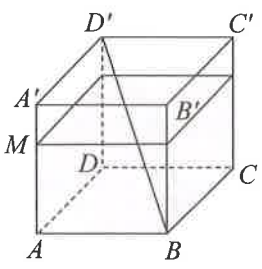


Figura 2

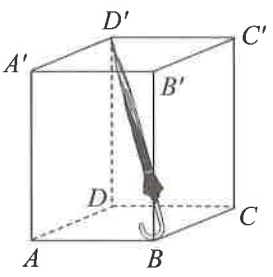


Figura 3

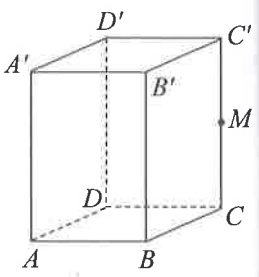


Figura 4

12. Un corp metalic având forma unei prisme patrulatere regulate cu latura bazei de 16 cm și înălțimea de $12\sqrt{3}$ cm se transformă prin topire în șuruburi având forma unor prisme hexagonale regulate cu latura bazei de 8 mm și înălțimea de 10 mm. Aflați câte șuruburi se obțin.

13. O prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are volumul egal cu $216\sqrt{3}$ cm^3 și înălțimea de 6 cm (figura 5).
a) Aflați aria laterală a prismei.
b) Determinați măsura unghiului planelor $(A'BC)$ și (ABC).

14. Un panou publicitar are forma prismei triunghiulare regulate $ABCMNP$, cu $AB = 60$ cm și $AN = 100$ cm. Punctul Q este mijlocul segmentului AP (figura 6). Înscrisurile publicitare se află pe toate fețele, în afară de $ABMN$.
a) Arătați că suprafața destinată înscrisurilor publicitare este mai mică de 15500 cm^2.
b) Demonstrați că dreapta PM este paralelă cu planul (BQN).

15. În trusa cu corpuri geometrice a Alinei se află o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ având toate muchiile egale și volumul de $\frac{256\sqrt{2}}{3}$ cm^3 (figura 7). Alina alege punctul M pe muchia CV astfel încât $MC = 3$ cm.
a) Demonstrați că $OM \perp BD$.
b) Aflați valoarea sumei $MB + MD$.

16. Cortul unui circ are forma unei piramide patrulatere regulate $VABCD$ cu muchia bazei $AB = 16$ m și înălțimea $VO = 8$ m (figura 8). La 4 m de sol se pune o plasă de siguranță ancorată de muchiile laterale ale piramidei. Materialul din care este confecționată plasa costă 25 € metrul pătrat.
a) Aflați prețul plasei de siguranță.
b) Demonstrați că două fețe laterale opuse ale piramidei sunt situate în plane perpendiculare.

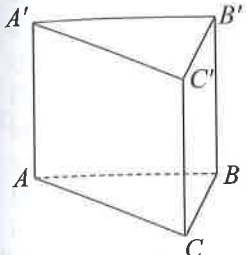


Figura 5

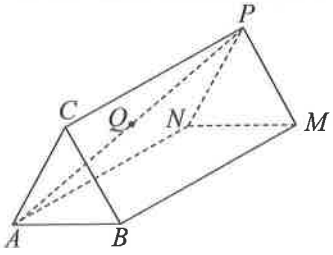


Figura 6

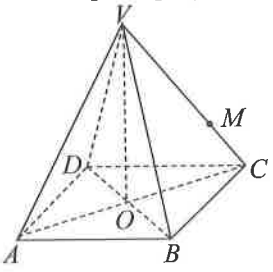


Figura 7

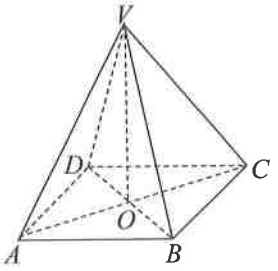


Figura 8

17. Un cub din lemn $ABCDA'B'C'D'$, având suprafața totală egală cu 864 cm^2, se prelucrează pentru a se obține piramida patrulateră regulată $VABCD$, unde V este centrul pătratului $A'B'C'D'$ (figura 9).
a) Aflați lungimea muchiei laterale a piramidei.
b) Demonstrați că prin prelucrare se pierde mai mult de 66% din lemnul inițial.

18. În figura 10 este reprezentat un siloz de cereale sub forma prismei patrulatere regulate $ABCDEFGH$, continuată cu piramida patrulateră regulată $VABCD$; O este centrul pătratului $ABCD$ și M este mijlocul laturii AD. Se știe că $VO = 3$ m, $VM = 5$ m și $AE = 5$ m. Pentru a-l proteja, se vopsesc toți pereții exteriori ai silozului, folosindu-se 150 g vopsea pentru 2 m^2 de suprafață.
a) Arătați că 24 kg de vopsea sunt suficiente pentru a vopsi silozul.
b) Aflați capacitatea silozului.

19. În figura 11, $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată reprezentând un obiect de mobilier stradal. Piramida este construită din sticlă. Se știe că muchia bazei este $AB = 8$ m, iar muchia laterală este $VA = 5$ m. Pentru lucrări de curățenie, un alpinist utilitar parcurge traseul A–T–C, pe drum de lungime minimă, unde T este un punct pe muchia VB.
a) Aflați câți metri pătrați de sticlă s-au utilizat pentru construcția piramidei (inclusiv baza).
b) Determinați lungimea traseului alpinistului utilitar.

20. O bomboană de ciocolată are forma piramidei triunghiulare regulate $VABC$ cu muchia laterală $VA = 2$ cm și înălțimea $VO = 1$ cm (figura 12).
a) Aflați volumul unei bomboane.
b) Demonstrați că $VA \perp BC$.

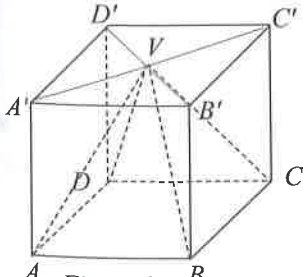


Figura 9

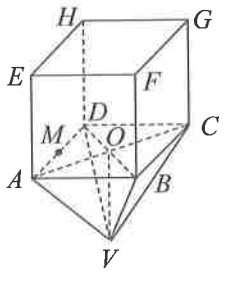


Figura 10

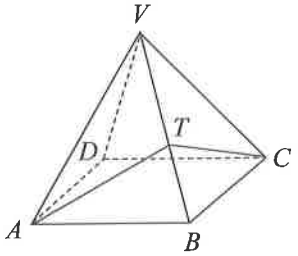


Figura 11

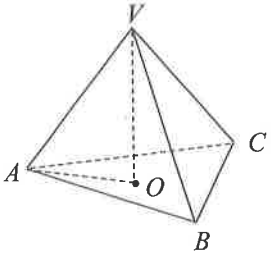


Figura 12

21. O cutie de lapte are forma tetraedrului regulat $ABCD$ cu muchia de 12 cm (figura 13). Suprafața de carton necesară pentru fabricarea unei cutii este cu 15% mai mare decât aria totală a tetraedrului. Stabiliți câte cutii se pot confecționa din 500 dm^2 de carton. (Se va utiliza valoarea aproximativă $\sqrt{3} = 1{,}73$.)

22. Fie tetraedrul regulat $ABCD$ cu muchia $AB = 6$ mm. Punctele M și N sunt mijloacele muchiilor AB, respectiv CD (figura 14).
a) Aflați volumul tetraedrului.
b) Determinați măsura unghiului dintre dreptele MN și AC.

23. Un diamant are forma piramidei hexagonale regulate $VABCDEF$ cu înălțimea $VO = 6\sqrt{3}$ mm și măsura unghiului format de o față laterală cu planul bazei de 45° (figura 15). Arătați că, introducând diamantul într-un pahar plin cu apă, vor curge pe dinafară mai puțin de 1,3 ml de apă.

24. O piramidă hexagonală regulată $VABCDEF$ are $VA = 15$ cm și $AB = 12$ cm (figura 15).
a) Aflați înălțimea piramidei.
b) Se secționează piramida cu un plan paralel cu baza, astfel încât volumul trunchiului să reprezinte $\frac{26}{27}$ din volumul piramidei inițiale. La ce distanță de planul bazei se realizează secțiunea?

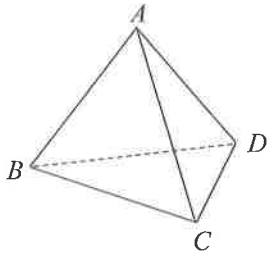


Figura 13

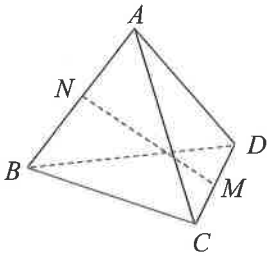


Figura 14

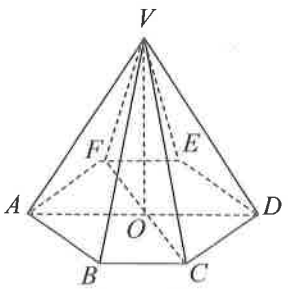


Figura 15

25. Un tetraedru regulat cu muchia de 1 dm cântărește 5 kg. Aflați masa unui tetraedru regulat cu muchia de 2 dm, confecționat din același material.

26. Dacă am dori să vopsim o piramidă din lemn, am avea nevoie de 1200 g vopsea. Secționăm piramida printr-o tăietură paralelă cu planul bazei, făcută prin mijlocul înălțimii. Aflați cantitatea de vopsea necesară acoperirii piramidei mici astfel obținute.

27. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are volumul egal cu 992 cm^3, $AB = 20$ cm, înălțimea $OO' = 6$ cm și $A'B' = l$ cm (figura 16).
a) Arătați că $l^2 + 20l - 96 = 0$.
b) Calculați aria laterală a trunchiului.

28. Postamentul unei statui este construit din beton sub forma trunchiului de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ având $AA' = 3$ m, $AC = 6$ m și $A'C' = 2{,}4$ m (figura 17).
a) Aflați înălțimea postamentului.
b) Demonstrați că la construcția postamentului se folosesc mai mult de 22 m^3 de beton.

29. O foaie de tablă are forma hexagonului regulat $ABCDEF$ cu latura de 60 cm (figura 18). Notăm cu M, N, P mijloacele laturilor AB, CD, respectiv EF și îndoim tabla după dreptele MN, NP și PM. Se obține astfel un vas fără capac, având forma unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată.
a) Aflați suprafața foii folosite pentru confecționarea vasului.
b) Determinați capacitatea vasului.

30. O lumânare decorativă are forma unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ (figura 19). Se știe că 13 cm^3 de materialul din care este făcută lumânarea cântăresc 10 g. Muchiile bazelor trunchiului sunt $AB = 15$ cm și $A'B' = 6$ cm, iar înălțimea sa este $OO' = 9$ cm. Arătați că masa lumânării este mai mică de 405 g.

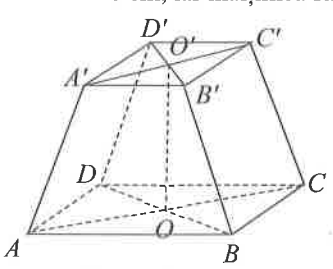


Figura 16

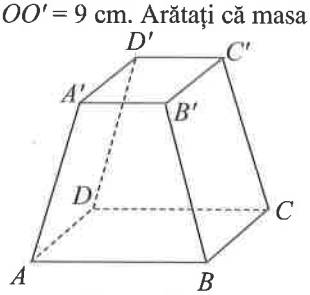


Figura 17

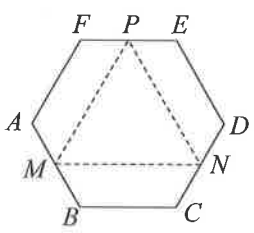


Figura 18

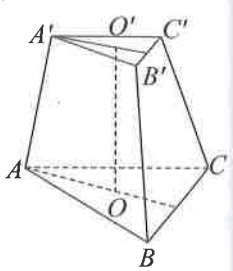


Figura 19

TEMA 14. Corpuri rotunde

1. Pătratul $ABCD$, cu $AB = 10$ cm, este secțiunea axială a unui vas cilindric circular drept (figura 1). Se toarnă în vas 157 ml de apă. Determinați înălțimea la care se ridică apa. (Se va considera valoarea aproximativă $\pi = 3{,}14$.)
2. Un cilindru metalic are raza de 6 cm și înălțimea de 25 cm (figura 1). Se cunoaște că 3 cm^3 de metal cântăresc 5 g. Arătați că masa cilindrului este mai mare de 4,7 kg.
3. O piesă metalică are forma unui cilindru circular drept având diametrul bazei de 14 cm și generatoarea de 12,5 cm (figura 1). Se vopsește suprafața laterală a piesei utilizând câte trei grame de vopsea la fiecare 5 cm^2 de suprafață.
   a) Arătați că 330 g vopsea sunt suficiente pentru a vopsi piesa.
   b) Se scufundă piesa într-un vas mai mare, plin cu apă. Demonstrați că din vas vor curge mai puțin de 2 ℓ de apă.

   (Se va utiliza valoarea aproximativă $\pi = 3\frac{1}{7}$.)
4. În figura 2, dreptunghiul AA_1D_1D, cu $AA_1 = 12$ dm și $AD = 10$ dm reprezintă desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru.
   a) Aflați aria laterală a cilindrului.
   b) Determinați volumul cilindrului.
5. O doză de suc are forma unui cilindru circular drept cu volumul egal cu 90π cm^3 și generatoarea de 10 cm (figura 3). Dreptunghiul $ABCD$ este o secțiune axială a cilindrului, iar E este un punct pe segmentul BC, astfel încât $CE = 3$ cm.
   a) Aflați lungimea razei bazei.
   b) O furnică se deplasează pe suprafața laterală a dozei, din punctul A în punctul E, pe un drum de lungime minimă. Demonstrați că lungimea drumului este mai mică de 12 cm.
6. O piesă din lemn având forma unui cilindru circular drept cu $\mathcal{A}_l = 560\pi$ cm^2 și $\mathcal{A}_t = 760\pi$ cm^2 se cioplește, transformându-se într-o prismă patrulateră regulată $ABCDA_1B_1C_1D_1$, cu pierderi minime de material (figura 4).
   a) Aflați lungimea generatoarei cilindrului.
   b) Determinați volumul de lemn pierdut prin cioplire.

   (Se va utiliza valoarea aproximativă $\pi = \frac{22}{7}$.)

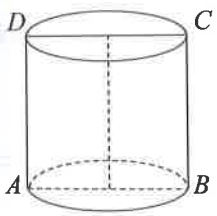


Figura 1

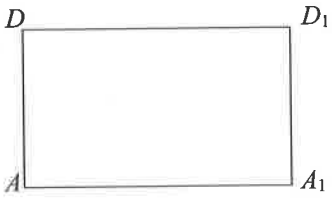


Figura 2

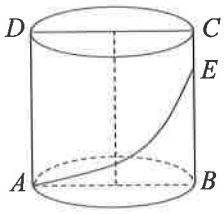


Figura 3

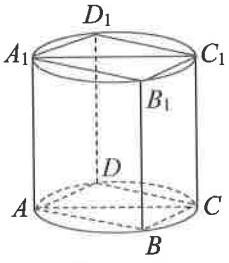


Figura 4

7. Triunghiul echilateral VAB este o secțiune axială a unui con circular drept (figura 5). Aria triunghiului VAB este $9\sqrt{3}$ cm^2. Aflați aria laterală a conului.
8. Un comerciant vinde popcorn în cornete de hârtie având formă de con circular drept cu generatoarea $VA = 12{,}5$ cm și înălțimea $VO = 12$ cm (figura 6).
   a) Aflați numărul maxim de cornete care pot fi confecționate dintr-un metru pătrat de hârtie.
   b) Se știe că 56 cm^3 de popcorn cântăresc 40 g. Aflați masa unei cornet plin.

   (Se va considera valoarea aproximativă $\pi = 3\frac{1}{7}$.)
9. Prin înfășurarea unei foi de tablă având forma unui sector de disc cu unghiul la centru $\alpha = 120°$ se obține un vas în formă de con circular drept cu înălțimea de 20 cm (figura 7).
   a) Aflați raza bazei conului.
   b) Stabiliți dacă încape 1 litru de apă în vasul obținut.

10. În figura 8 este reprezentată o pâlnie așezată pe o masă orizontală. Triunghiul VAB este o secțiune axială a conului, raza bazei conului este de 6 cm și aria laterală este egală cu 72π cm^2.

a) Arătați că înălțimea pâlniei este mai mică decât 10,5 cm.

b) O furnică se deplasează din punctul A în punctul B pe suprafața laterală. Aflați lungimea minimă a drumului furnicii.

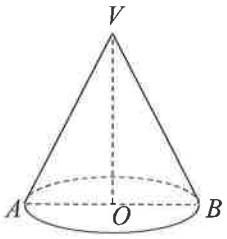


Figura 5

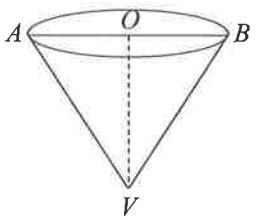


Figura 6

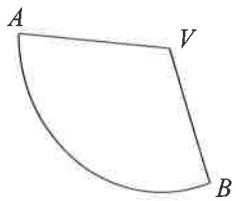


Figura 7

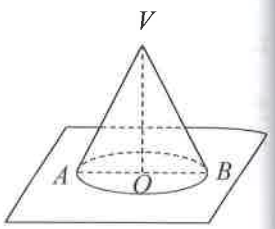


Figura 8

11. Pentru a vopsi un con din lemn, avem nevoie de 459 g de vopsea. La o treime din înălțime față de vârf se realizează o secțiune paralelă cu planul bazei. Ce cantitate de vopsea este necesară pentru a acoperi conul mic format?

12. Un con circular drept din lemn are $\mathcal{A}_l = 135\pi$ cm^2 și $\mathcal{A}_t = 216\pi$ cm^2 (figura 5).

a) Aflați înălțimea conului.

b) Secționăm conul printr-un plan paralel cu planul bazei, astfel încât volumul trunchiului obținut să fie de 7 ori mai mare decât volumul conului mic. La ce distanță de planul bazei se realizează secțiunea?

13. O găleată are forma unui trunchi de con circular drept, cu razele bazelor $r = 15$ cm, $R = 20$ cm și înălțimea $h = 36$ cm (figura 9). Poate fi umplută găleata, într-un minut, de un robinet care are debitul de 0,5 ℓ/s?

14. Un pahar de unică folosință are forma unui trunchi de con circular drept cu raza bazei mari $R = 5{,}5$ cm, înălțimea $h = 12$ cm și generatoarea $g = 12{,}5$ cm (figura 10).

a) Aflați raza bazei mici a trunchiului.

b) Stabiliți dacă încap în pahar 500 ml de suc.

15. Un buștean are forma unui trunchi de con circular drept, iar trapezul isoscel $ABCD$ este o secțiune axială a sa (figura 11). Generatoarea are lungimea de 12 dm și formează cu planul bazei mari un unghi cu măsura de 60°. Diametrul bazei mici este $DC = 4$ dm.

a) Arătați că înălțimea bușteanului este mai mică de 11 dm.

b) Determinați la ce distanță de planul bazei mici se întâlnesc generatoarele AD și BC.

16. O piesă metalică are forma unui trunchi de con circular drept, cu o gaură cilindrică (figura 12). Dimensiunile trunchiului sunt $r = 4$ cm, $R = 13$ cm, $g = 15$ cm, iar gaura cilindrica are diametrul $d = 4$ cm.

a) Aflați înălțimea trunchiului.

b) Determinați suprafața întregii piese.

17. Un ghiveci de flori are forma unui trunchi de con circular drept (figura 13). Trapezul isoscel $ABCD$, având $AB = 14$ cm, $CD = 2$ cm și diagonalele AC și BD perpendiculare, este o secțiune axială a trunchiului.

a) Arătați că în ghiveci încap mai mult de 475 cm^3 de pământ.

b) Atunci când ambalăm ghiveciul, lăsând descoperită baza mare a acestuia, 10% din hârtia utilizată reprezintă pierderi la îmbinări. Stabiliți ce suprafață minimă are hârtia necesară pentru a ambala ghiveciul.

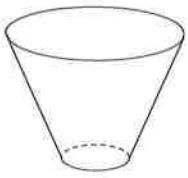


Figura 9

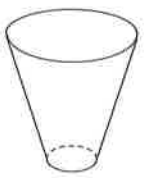


Figura 10

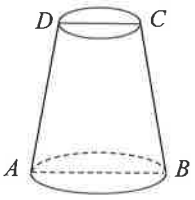


Figura 11

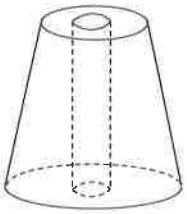


Figura 12

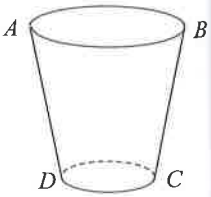


Figura 13

18. În figura 11 este reprezentat un trunchi de con circular drept având $\mathcal{A}_l = 240\pi$ cm^2, $g = 10$ cm și $h = 8$ cm.

a) Aflați volumul trunchiului de con.

b) Determinați măsura unghiului sectorului de disc care se obține prin desfășurarea suprafeței laterale a conului din care provine trunchiul.

19. O bilă metalică are raza $R = 6$ cm (figura 14).
a) Aflați suprafața bilei.
b) Topim bila și, din metalul obținut, fabricăm un con circular drept cu raza bazei de 12 cm. Aflați înălțimea conului.
20. Scufundăm un dovleac sferic în apa dintr-un butoi cilindric cu $R = 24$ cm. Apa se ridică în butoi cu 4 cm (figura 15). Aflați raza dovleacului.

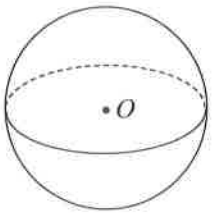


Figura 14

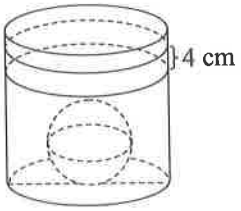


Figura 15

MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ

✦ TESTUL 1 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Cel mai mare număr natural care împărțit la 7 dă câtul 10 este egal cu:
a) 70; **b)** 71; **c)** 76; **d)** 77.

(5p) **2.** Un telefon care costă 1000 de lei se ieftinește cu 10%, iar noul preț se mărește cu 10%. Diferența dintre prețul inițial și prețul final al telefonului este egală cu:
a) 0 lei; **b)** 1 leu; **c)** 10 lei; **d)** 20 de lei.

(5p) **3.** Diferența dintre cel mai mic și cel mai mare număr întreg din intervalul $(-3, 5]$ este egală cu:
a) -8; **b)** -7; **c)** -6; **d)** 2.

(5p) **4.** Dintre următoarele șiruri de numere, cel scris în ordine crescătoare este:
a) $\frac{2}{3}; 0,5; \frac{5}{6}; 0,75;$ **b)** $\frac{5}{6}; 0,5; 0,75; \frac{2}{3};$ **c)** $0,5; 0,75; \frac{2}{3}; \frac{5}{6};$ **d)** $0,5; \frac{2}{3}; 0,75; \frac{5}{6}.$

(5p) **5.** Patru elevi, Ana, Bogdan, Cristi și Dana, au calculat rădăcina pătrată a produsului numerelor $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{8}$ și $\sqrt{15}$. Rezultatele obținute de ei sunt trecute în tabelul următor:

Ana	Bogdan	Cristi	Dana
$2\sqrt{15}$	$10\sqrt{6}$	60	3600

Dintre cei patru elevi, cel care a obținut rezultatul corect este:
a) Ana; **b)** Bogdan; **c)** Cristi; **d)** Dana.

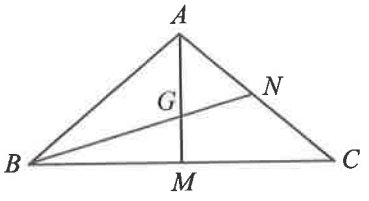
(5p) **6.** Teodor a parcurs într-o zi 24 km, adică $\frac{3}{5}$ din drumul pe care trebuia să-l străbată. Sora lui Teodor spune că lungimea totală a drumului pe care îl avea de parcurs Teodor este de 40 km. Afirmația surorii este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele A, B, C, coliniare, în această ordine. Punctul M este mijlocul segmentului AB, iar punctul N se află pe segmentul BC, astfel încât $BN = 2NC$. Dacă $AB = 6$ cm și $BC = 12$ cm, atunci lungimea segmentului MN este egală cu:

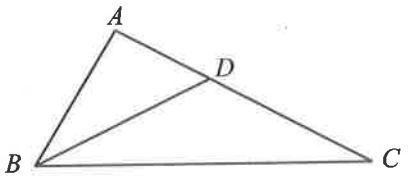
a) 6 cm; **b)** 9 cm; **c)** 11 cm; **d)** 15 cm.

(5p) **2.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu $AB = AC = 10$ cm și $BC = 16$ cm. Medianele AM și BN se intersectează în punctul G. Lungimea segmentului AG este egală cu:



a) 10 cm; **b)** 8 cm;
c) 6 cm; **d)** 4 cm.

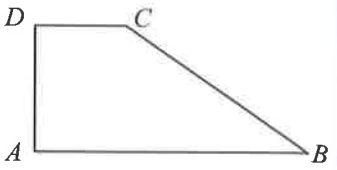
(5p) **3.** În figura alăturată este desenat un triunghi ABC cu $\measuredangle A = 90°$, $\measuredangle C = 30°$ și $AC = 6\sqrt{3}$ cm. Dacă BD este bisectoarea unghiului ABC, atunci lungimea segmentului AD este egală cu:



a) $2\sqrt{3}$ cm; **b)** $3\sqrt{3}$ cm;
c) $4\sqrt{3}$ cm; **d)** $5\sqrt{3}$ cm.

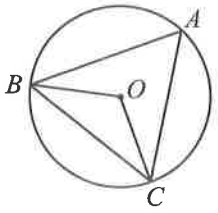
(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat trapezul $ABCD$, cu $\measuredangle A = \measuredangle D = 90°$, $AB = 6$ m, $BC = 5$ m şi $CD = 2$ m. Aria trapezului $ABCD$ este egală cu:

a) 40 m^2; **b)** 24 m^2;
c) 12 m^2; **d)** 6 m^2.



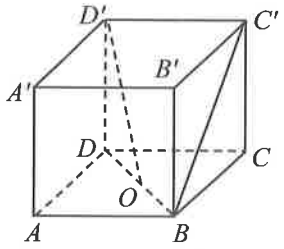
(5p) **5.** În figura alăturată este desenat triunghiul ABC înscris în cercul cu centrul în O. Dacă $\measuredangle BOC = 150°$, atunci măsura unghiului BAC este egală cu:

a) 90°; **b)** 75°;
c) 60°; **d)** 45°.



(5p) **6.** În figura alăturată este desenat cubul $ABCDA'B'C'D'$. Punctul O este mijlocul segmentului BD. Măsura unghiului determinat de dreptele BC' şi $D'O$ este egală cu:

a) 15°; **b)** 30°;
c) 45°; **d)** 60°.



SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Un biciclist a parcurs un drum în trei zile. În prima zi, el a parcurs cu 5 km mai puţin decât $\frac{1}{3}$ din lungimea drumului, a doua zi cu 15 km mai mult decât $\frac{1}{3}$ din rest, iar a treia zi ultimii 55 km.

(2p) **a)** Este posibil ca biciclistul să fi parcurs în prima zi 13 km? Justifică răspunsul dat.

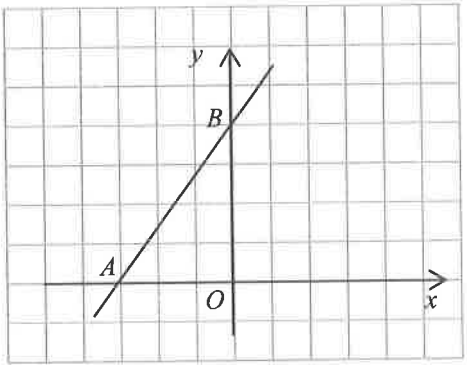
(3p) **b)** Determină lungimea totală a drumului.

2. Se consideră expresia $E(x) = (3x-2)^2 - (x-2)^2 + (x-1)(x+1) - 2x(4x-1)$, unde x este număr real.

(2p) **a)** Calculează $E(2)$.

(3p) **b)** Demonstrează că $E(x) \geq -10$, pentru orice număr real x.

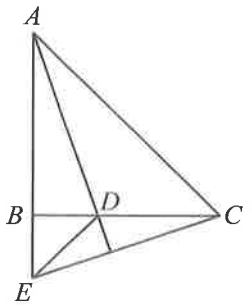
3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4x+12}{3}$. Fie A și B punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox, respectiv Oy, ale sistemului de axe ortogonale xOy.



(2p) **a)** Determină coordonatele punctelor A și B.

(3p) **b)** Determină coordonatele punctului P, situat pe graficul funcției f, astfel încât $AB = BP$.

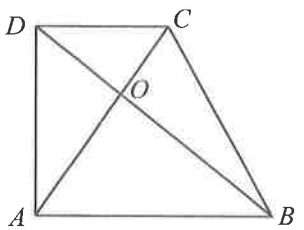
4. În figura alăturată sunt reprezentate triunghiurile dreptunghice isoscele ABC și DBE, cu $\measuredangle ABC = \measuredangle DBE = 90°$, punctul D fiind situat pe BC. Se știe că $BC = 3BD = 12$ cm.



(2p) **a)** Calculează aria triunghiului ADC.

(3p) **b)** Demonstrează că dreptele AD și EC sunt perpendiculare.

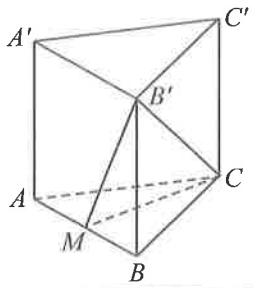
5. În figura alăturată este reprezentat trapezul $ABCD$, cu baza mare $AB = 16$ cm, baza mică $CD = 9$ cm și înălțimea $AD = 12$ cm. Diagonalele trapezului se intersectează în punctul O.



(2p) **a)** Calculează lungimea segmentului AO.

(3p) **b)** Demonstrează că diagonalele trapezului sunt perpendiculare.

6. În figura alăturată este reprezentată prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu $AB = 12$ cm și $BB' = 8$ cm. Punctul M este mijlocul laturii AB.



(2p) **a)** Calculează aria triunghiului CMB'.

(3p) **b)** Determină distanța de la punctul A la planul (CMB').

✦ TESTUL 2 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Suma numerelor prime din șirul 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 este egală cu:
a) 10; **b)** 17; **c)** 45; **d)** 55.

(5p) **2.** Dacă $\frac{5}{2x-1}=\frac{3}{111}$, numărul real x este egal cu:
a) 93; **b)** 100; **c)** 278; **d)** 301.

(5p) **3.** Produsul dintre cel mai mic element negativ și cel mai mare element negativ ale mulțimii $A = \{-6, -3, -2, 0, 1, 2, 3, 4\}$ este egal cu:
a) 12; **b)** 0; **c)** –12; **d)** –24.

(5p) **4.** Scrierea fracției zecimale 0,1(6) sub formă de fracție ordinară este:
a) $\frac{16}{99}$; **b)** $\frac{16}{90}$; **c)** $\frac{8}{5}$; **d)** $\frac{1}{6}$.

(5p) **5.** Patru elevi efectuează calculul $(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2$ și obțin rezultatele înregistrate în tabelul următor:

Andrei	Bianca	Codrin	Daniela
4	10	14	$8\sqrt{3}$

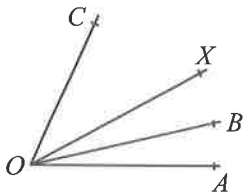
Dintre cei patru elevi, cel care a obținut rezultatul corect este:
a) Andrei; **b)** Bianca; **c)** Codrin; **d)** Daniela.

(5p) **6.** Un biciclist s-a deplasat cu viteza de 15 km/h pe o distanță de 45 km, iar un pieton s-a deplasat cu viteza de 4 km/h pe o distanță de 10 km. Dintre cei doi, cel care a avut un timp de deplasare mai scurt a fost:
a) biciclistul; **b)** pietonul.

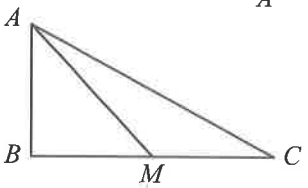
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată sunt reprezentate, în această ordine, punctele coliniare O, A, B. Se știe că $OA = 7$ cm, $OB = 13$ cm și că punctul M este mijlocul segmentului AB. Lungimea segmentului OM este egală cu:
a) 3 cm; **b)** 7 cm; **c)** 10 cm; **d)** 13 cm.

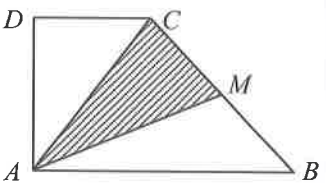
(5p) **2.** În figura alăturată sunt reprezentate unghiurile adiacente AOB și BOC, cu $\measuredangle AOB = 10°$ și $\measuredangle BOC = 64°$. Dacă semidreapta OX este bisectoarea unghiului AOC, atunci măsura unghiului BOX este egală cu:
a) 10°; **b)** 20°;
c) 27°; **d)** 37°.



(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC cu $AB = 6$ cm și ipotenuza $AC = 10$ cm. Lungimea medianei AM este egală cu:
a) $2\sqrt{5}$ cm; **b)** 6 cm;
c) $2\sqrt{13}$ cm; **d)** 8 cm.

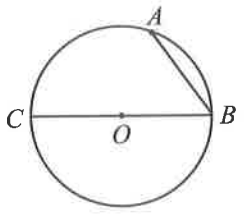


(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat trapezul $ABCD$, cu bazele AB și CD, în care măsura unghiului BAD este egală cu 90°, $AD = 4$ cm și $AB = 7$ cm. Dacă punctul M este mijlocul laturii BC, atunci aria triunghiului AMC este egală cu:
a) 6 cm²; **b)** 7 cm²;
c) 14 cm²; **d)** 28 cm².



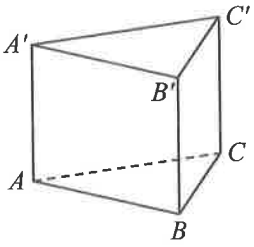
(5p) **5.** În figura alăturată este reprezentat cercul de centru O și diametru $BC = 12$ cm. Punctul A aparține cercului, astfel încât $AB = 6$ cm. Măsura arcului mic $\overset{\frown}{AC}$ este egală cu:

a) 60°; **b)** 90°;
c) 120°; **d)** 180°.



(5p) **6.** În figura alăturată este reprezentată prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu $AB = 6$ cm și $AA' = 8$ cm. Perimetrul triunghiului $A'BC$ este egal cu:

a) 18 cm; **b)** 20 cm;
c) 22 cm; **d)** 26 cm.



SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Dana are un coș cu mere roșii, galbene și verzi, în total fiind 52 de mere. Numerele merelor roșii, galbene și verzi sunt direct proporționale cu 2, 5, respectiv 6.

(2p) **a)** Câte mere roșii are Dana în coș?

(3p) **b)** Determină câte mere galbene ar trebui să mai pună Dana în coș astfel încât numărul merelor galbene să reprezinte jumătate din numărul total al merelor.

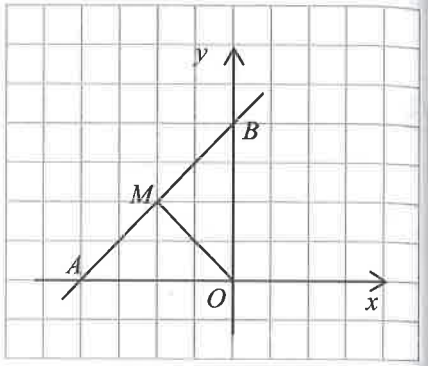
2. Se consideră expresia $E(x) = (2x + 3)^2 + (2x - 3)^2 + (4x - 6)(2x + 3) - 2(7x^2 + 2x - 3)$, unde $x \in \mathbb{R}$.

(2p) **a)** Arată că $E(x) = 2x^2 - 4x + 6$, pentru orice număr real x.

(3p) **b)** Determină mulțimea numerelor reale x pentru care $E(x) \leq 8 - 4x$.

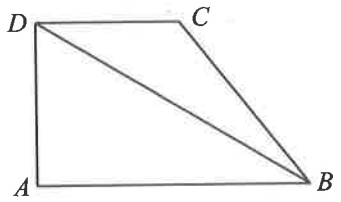
3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 2$.

(2p) **a)** Calculează $f(-4) \cdot f(-3) \cdot f(-2) \cdot f(-1)$.



(3p) **b)** Știind că A și B sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox, respectiv Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy, iar punctul M este mijlocul segmentului AB, calculează perimetrul triunghiului AMO.

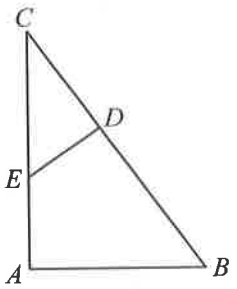
4. În figura alăturată este reprezentat trapezul $ABCD$, cu baza mare $AB = 6$ cm, baza mică $CD = 4$ cm, $\measuredangle A = 90°$ și $\measuredangle B = 60°$.



(2p) **a)** Calculează aria trapezului $ABCD$.

(3p) **b)** Determină măsura unghiului BDC.

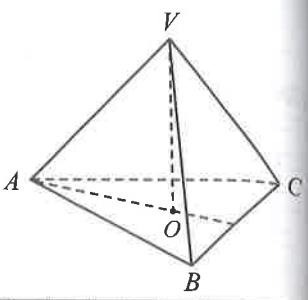
5. În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC, cu catetele $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm. Punctele D și E sunt situate pe laturile BC, respectiv AC, astfel încât $CD = 4$ cm și $CE = 5$ cm.



(2p) **a)** Calculează lungimea ipotenuzei BC.

(3p) **b)** Demonstrează că dreptele AD și BE sunt perpendiculare.

6. În figura alăturată este reprezentată piramida triunghiulară regulată $VABC$, cu latura bazei $AB = 12$ cm și înălțimea $VO = 2$ cm.



(2p) **a)** Calculează aria laterală a piramidei $VABC$.

(3p) **b)** Determină măsura unghiului format de planele (ABC) și (VBC).

✦ TESTUL 3 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Cardinalul mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^4 \leq x < 2^5\}$ este:
a) 1; **b)** 16; **c)** 17; **d)** 15.

(5p) **2.** Dintre numerele $\frac{5}{4}, \frac{11}{7}, \frac{7}{6}, \frac{3}{9}$, cel care se transformă într-o fracție zecimală finită este:
a) $\frac{5}{4}$; **b)** $\frac{11}{7}$; **c)** $\frac{7}{6}$; **d)** $\frac{3}{9}$.

(5p) **3.** Suma numerelor $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$, -1 și $-\frac{2}{3}$ este egală cu:
a) $\frac{1}{6}$; **b)** $-\frac{1}{3}$; **c)** $-\frac{2}{3}$; **d)** $\frac{1}{12}$.

(5p) **4.** Dacă $a > b > 0$, $a - b = \sqrt{2}$ și $a^2 - b^2 = \sqrt{32}$, atunci media aritmetică a numerelor a și b este:
a) 2; **b)** 4; **c)** 1; **d)** $2\sqrt{2}$.

(5p) **5.** Alin, Briana, Cornel și Doru au avut de descompus în factori expresia $x^3 - x^2 - x + 1$, unde $x \in \mathbb{R}$. Rezultatele obținute de cei patru elevi sunt trecute în tabelul următor:

Alin	**Briana**	**Cornel**	**Doru**
$(x-1)^2(x+1)$	$(x+1)^2(x-1)$	$(x-1)(x^2+1)$	$x(x-1)(x+1)$

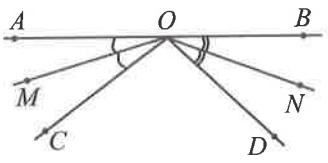
Elevul care a obținut rezultatul corect este:
a) Briana; **b)** Cornel; **c)** Doru; **d)** Alin.

(5p) **6.** Prețul unui produs este 100 de lei. Alexia afirmă că, după o scumpire cu 10%, urmată de o ieftinire cu 10%, prețul produsului va fi tot 100 de lei. Afirmația Alexiei este:
a) adevărată; **b)** falsă.

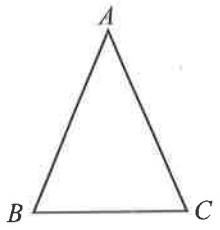
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Știind că $\Delta ABC \equiv \Delta PQR$, $\measuredangle BAC = 40°$ și $\measuredangle PQR = 60°$, măsura unghiului ACB este egală cu:
a) 40°; **b)** 60°; **c)** 80°; **d)** 72°.

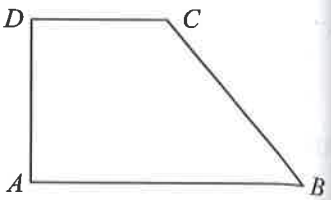
(5p) **2.** În figura alăturată sunt reprezentate unghiul alungit AOB și punctele M, C, D, N, situate de aceeași parte a dreptei AB. Semidreapta OM este bisectoarea unghiului AOC, iar semidreapta ON este bisectoarea unghiului BOD. Dacă măsura unghiului MON este 150°, atunci măsura unghiului DOC este egală cu:
a) 75°; **b)** 90°;
c) 120°; **d)** 100°.



(5p) **3.** În figura alăturată, ABC este un triunghi isoscel, având $AB = AC = 12$ cm și $\measuredangle ABC = 75°$. Distanța de la punctul C la dreapta AB este egală cu:
a) 6 cm; **b)** 9 cm;
c) 3 cm; **d)** 8 cm.



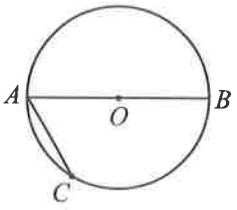
(5p) **4.** În figura alăturată, $ABCD$ este un trapez dreptunghic în care $AB \parallel CD$, $AB = 2 \cdot CD$, $BC = 6$ cm și $\measuredangle BCD = 150°$. Aria trapezului este egală cu:



a) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ cm²; **b)** $6\sqrt{3}$ cm²;

c) $9\sqrt{3}$ cm²; **d)** $27\sqrt{3}$ cm².

(5p) **5.** În figura alăturată este reprezentat un cerc având centrul în O, în care AB este diametru și C este un punct pe cerc. Dacă $AB = 12$ cm și $AC = 6$ cm, atunci lungimea arcului mic $\overset{\frown}{BC}$ este egală cu:



a) 18π cm; **b)** 4π cm;

c) 36π cm; **d)** 12π cm.

(5p) **6.** Un tetraedru regulat $ABCD$ are aria triunghiului BCD egală cu $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ cm². Aria laterală a tetraedrului este egală cu:

a) $9\sqrt{3}$ cm²; **b)** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ cm²; **c)** $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ cm²; **d)** $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ cm².

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Teodora și Andrei vor să cumpere mamei lor un cadou. Teodora are 75% din prețul cadoului, Andrei are 60% din prețul cadoului și împreună au 270 de lei.

(2p) **a)** Poate fi prețul cadoului 100 de lei? Justifică răspunsul.

(3p) **b)** Determină suma de bani a fiecărui copil.

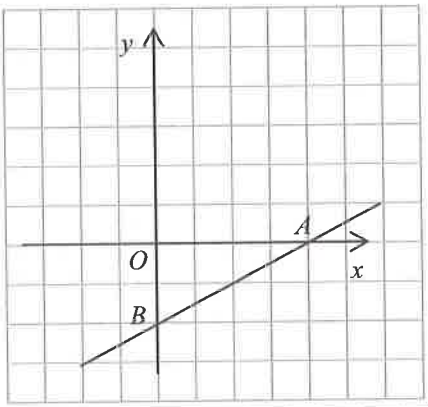
2. Se consideră expresia $E(x) = (x+\sqrt{2})^2 + (1-x\sqrt{2})^2 + x(3-x) - 2$, unde x este număr real.

(2p) **a)** Arată că $E(x) = (x + 1)(2x + 1)$, pentru orice număr real x.

(3p) **b)** Dacă $n \in \{3k+1, 3k+2\}$, unde k este un număr întreg, demonstrează că numărul $E(n)$ este divizibil cu 3.

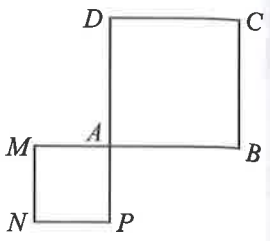
3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{2} - 2$.

(2p) **a)** Arată că $f(0) \cdot f(2) \cdot f(4) = 0$.



(3p) **b)** Dacă A și B sunt punctele de intersecție a graficului funcției f cu axele Ox, respectiv Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy, iar M este mijlocul segmentului AB, determină aria triunghiului AOM.

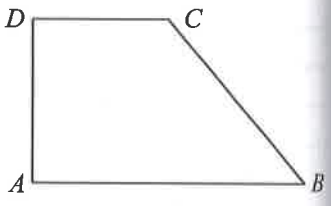
4. În figura alăturată sunt reprezentate pătratele $ABCD$ și $AMNP$, având interioarele disjuncte. Se știe că $AB = 2$ cm și $AM = 1$ cm, unde A este punctul de intersecție a dreptelor DP și BM.



(2p) **a)** Arată că aria patrulaterului $BDMP$ este egală cu $\frac{9}{2}$ cm^2.

(3p) **b)** Dacă punctul Q este simetricul punctului P față de punctul A, demonstrează că Q este ortocentrul triunghiului BMD.

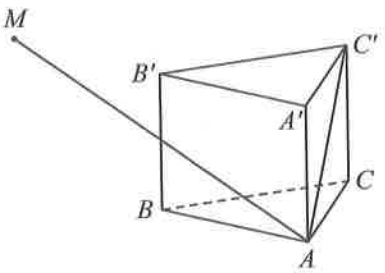
5. În figura alăturată, $ABCD$ este un trapez dreptunghic cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $AD \perp AB$ și $AD = 2\sqrt{3}$ cm. BD este bisectoarea unghiului ABC, iar măsura unghiului BCD este egală cu 120°.



(2p) **a)** Demonstrează că lungimea segmentului BC este egală cu 4 cm.

(3p) **b)** Dacă $\{O\} = AC \cap BD$, determină distanța de la punctul O la dreapta AB.

6. În figura alăturată este reprezentată o prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, având $AB = 6$ cm și volumul egal cu 162 cm^3. Punctul M este simetricul punctului A față de mijlocul segmentului BB'.



(2p) **a)** Arată că măsura unghiului format de dreptele MB și CC' este egală cu 30°.

(3p) **b)** Determină distanța de la punctul M la planul (ACC').

✦ TESTUL 4 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $16 : 8 \cdot 2 - 0^3 + (-1)^{2023}$ este:
a) -2023; **b)** -1; **c)** 3; **d)** -2020.

(5p) **2.** Un obiect costă 80 de lei. După o scumpire cu 15%, prețul obiectului crește cu:
a) 92 de lei; **b)** 68 de lei; **c)** 95 de lei; **d)** 12 lei.

(5p) **3.** Probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element x al mulțimii $A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, fracția $\frac{7}{x-1}$ să fie subunitară, este:
a) 1; **b)** $\frac{2}{5}$; **c)** $\frac{3}{5}$; **d)** $\frac{5}{2}$.

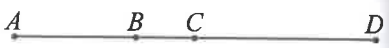
(5p) **4.** Valoarea numărului natural n pentru care intervalul $(-n, n]$ conține exact trei numere întregi pare este:
a) 2; **b)** 1; **c)** 3; **d)** 4.

(5p) **5.** Media aritmetică a numerelor $x = \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}$ și $y = \sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{32} + \sqrt{50}$ este egală cu:
a) 4; **b)** $6\sqrt{2}$; **c)** $3\sqrt{2}$; **d)** 2.

(5p) **6.** Silviu a cumpărat un pix și un creion, pentru care a plătit 5 lei. Pixul costă cu 3 lei mai mult decât creionul. Dacă Silviu afirmă: „Prețul creionului este 1 leu.”, afirmația lui este:
a) adevărată; **b)** falsă.

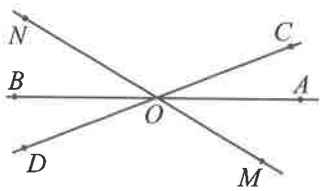
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele coliniare A, B, C și D, în această ordine, astfel încât $AD = 2AC = 3AB = 12$ cm. Lungimea segmentului BC este egală cu:



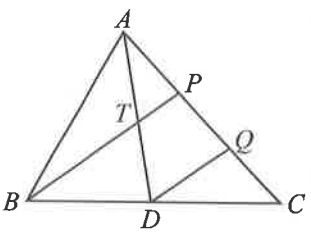
a) 4 cm; **b)** 6 cm; **c)** 8 cm; **d)** 2 cm.

(5p) **2.** În figura alăturată sunt reprezentate dreptele AB, CD și MN, concurente în punctul O. Dacă măsura unghiului NOA este egală cu 130°, iar unghiul COM are măsura egală cu 80°, atunci măsura unghiului DOB este egală cu:



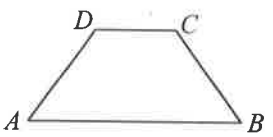
a) 210°; **b)** 50°;
c) 10°; **d)** 30°.

(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC. Punctul D este mijlocul laturii BC, punctele P și Q aparțin laturii AC și $AP = PQ = QC$, iar T este punctul de intersecție dintre BP și AD. Dacă lungimea segmentului DQ este egală cu 6 cm, atunci lungimea segmentului TB este egală cu:



a) 12 cm; **b)** 3 cm;
c) 9 cm; **d)** 18 cm.

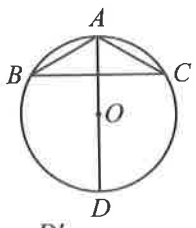
(5p) **4.** În figura alăturată, $ABCD$ este un trapez isoscel având $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $CD = 6$ cm, $AD = 4\sqrt{2}$ cm și măsura unghiului DAB egală cu 45°. Lungimea liniei mijlocii a trapezului este egală cu:



a) 14 cm; **b)** 20 cm;
c) 4 cm; **d)** 10 cm.

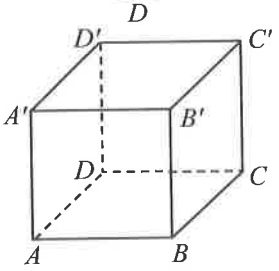
(5p) **5.** În figura alăturată este reprezentat un cerc cu centrul în O, în care este înscris triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC$ și măsura unghiului ABC egală cu 30°. Dacă D este punct diametral opus punctului A, atunci măsura unghiului DOB este egală cu:

a) 60°; **b)** 120°;
c) 150°; **d)** 30°.



(5p) **6.** În cubul din figura alăturată, volumul și aria totală se exprimă prin același număr real (diferă unitățile de măsură). Lungimea diagonalei cubului, exprimată în centimetri, este egală cu:

a) 6; **b)** 12;
c) $3\sqrt{3}$; **d)** $6\sqrt{3}$.



SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Alin, Bianca și Codrin au împreună 57 de lei. Alin are cu 6 lei mai mult decât Codrin și cu 1 leu mai puțin decât dublul sumei Biancăi.

(2p) **a)** Justifică dacă Bianca poate avea 15 lei.

(3p) **b)** Determină suma fiecărui copil.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(1+\frac{3x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}-1\right)^2 - 2\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, unde x este număr real.

(2p) **a)** Arată că $E(x) = 1 + 4x$, pentru orice număr real x.

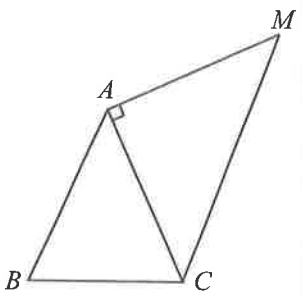
(3p) **b)** Demonstrează că $E(n^2) + E(n) - 1$ este pătratul unui număr impar, oricare ar fi numărul natural n.

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x + 3$.

(2p) **a)** Arată că $f(\sqrt{5}) \cdot f(-\sqrt{5}) = 4$.

(3p) **b)** Demonstrează că simetricul punctului $P(1, 4)$ față de axa ordonatelor a sistemului de axe ortogonale xOy aparține reprezentării grafice a funcției f.

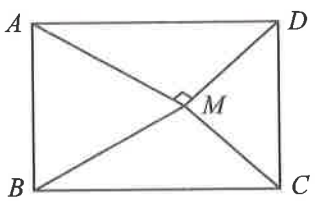
4. În figura alăturată este reprezentat triunghiul isoscel ABC, având baza BC și măsura unghiului ABC egală cu 75°. În exteriorul său este reprezentat triunghiul dreptunghic isoscel AMC, având ipotenuza MC.



(2p) **a)** Arată că măsura unghiului BMC este egală cu 15°.

(3p) **b)** Dacă P este punctul de intersecție a dreptelor AC și BM, demonstrează că $AB^2 = AP \cdot BM$.

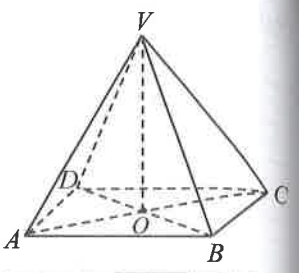
5. În figura alăturată, $ABCD$ este un dreptunghi în care $AD = 12$ cm, M este un punct interior astfel încât triunghiul ABM este echilateral, iar AM și DM sunt drepte perpendiculare.



(2p) **a)** Demonstrează că perimetrul dreptunghiului este mai mic decât 45 cm.

(3p) **b)** Determină ce procent din aria dreptunghiului $ABCD$ reprezintă aria triunghiului MAD.

6. În figura alăturată, $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată, cu $AB = 6$ cm și $\measuredangle AVC = 90°$.



(2p) **a)** Demonstrează că volumul piramidei este egal cu $36\sqrt{2}$ cm^3.

(3p) **b)** Determină tangenta unghiului format de înălțimea piramidei cu planul unei fețe laterale.

✦ TESTUL 5 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Suma divizorilor întregi ai numărului 4 este egală cu:
a) 7; **b)** 0; **c)** –7; **d)** 14.

(5p) **2.** Valoarea lui x din proporția $\frac{x-2}{4}=\frac{1}{2}$ este:
a) 0; **b)** 6; **c)** 2; **d)** 4.

(5p) **3.** Dacă $a=(+2)\cdot(-3)+|-5|$, atunci suma dintre a și inversul său este egală cu:
a) 0; **b)** 2; **c)** –2; **d)** 1.

(5p) **4.** Transformând numărul 0,2(7) în fracție ordinară se obține:
a) $\frac{27}{90}$; **b)** $\frac{27}{99}$; **c)** $\frac{5}{18}$; **d)** $\frac{27}{100}$.

(5p) **5.** Dacă $a>0$, $b=4$, iar media geometrică a numerelor a și b este $2\sqrt{3}$, atunci media aritmetică a numerelor a și b este:
a) 7; **b)** 3,5; **c)** $\frac{4+\sqrt{3}}{2}$; **d)** $\sqrt{3}+2$.

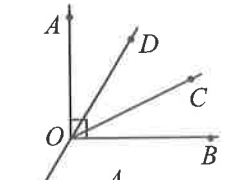
(5p) **6.** Un automobil se deplasează cu viteza constantă de 90 km/h. Șoferul se gândește: „Voi parcurge 60 km în 40 de minute". Raționamentul șoferului este:
a) corect; **b)** eronat.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele coliniare A, B, M, C și D, astfel încât $AC=BD$, iar M este mijlocul segmentului BC. Dacă $AB=2$ cm și $MC=3$ cm, lungimea segmentului AD este egală cu:

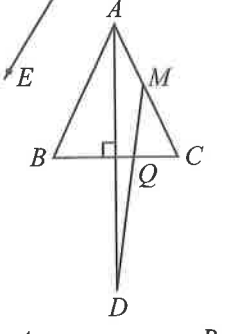
a) 4 cm; **b)** 6 cm; **c)** 9 cm; **d)** 10 cm.

(5p) **2.** În figura alăturată este reprezentat unghiul drept AOB, în interiorul căruia punctele C și D au proprietatea că unghiurile AOD, DOC și COB sunt congruente. Dacă OE este semidreapta opusă semidreptei OD, atunci măsura unghiului EOC este egală cu:



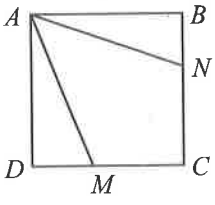
a) 150°; **b)** 90°;
c) 120°; **d)** 100°.

(5p) **3.** În figura alăturată, ABC este un triunghi isoscel în care $AB=AC$ și $BC=12$ cm. Punctul D este simetricul punctului A față de dreapta BC, M este mijlocul segmentului AC și Q este punctul de intersecție dintre BC și DM. Lungimea segmentului BQ este egală cu:



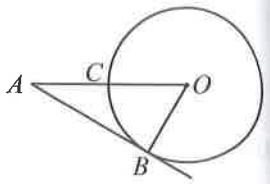
a) 4 cm; **b)** 9 cm;
c) 8 cm; **d)** 7,5 cm.

(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat pătratul $ABCD$. Punctele M și N aparțin segmentelor DC, respectiv BC, astfel încât $\sphericalangle DAM=\sphericalangle BAN=30°$. Dacă $AB=6$ cm, atunci aria triunghiului MAN este egală cu:



a) 12 cm²; **b)** $8\sqrt{3}$ cm²;
c) 24 cm²; **d)** $12\sqrt{3}$ cm².

(5p) **5.** În figura alăturată este reprezentat un cerc cu centrul în O și raza egală cu 5 cm. Punctul A este exterior cercului, $AO = 10$ cm, AB este tangentă cercului în punctul B și AO intersectează cercul în punctul C. Măsura arcului mic $\overset{\frown}{BC}$ este egală cu:



a) 300°; **b)** 30°;
c) 80°; **d)** 60°.

(5p) **6.** O piramidă, având volumul egal cu 288 cm^3, se secționează cu un plan paralel cu planul bazei care trece prin mijlocul înălțimii. Volumul piramidei mici care se formează este egal cu:

a) 144 cm^3; **b)** 36 cm^3; **c)** 72 cm^3; **d)** 252 cm^3.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Un dreptunghi are aria egală cu 600 m^2. Dacă se mărește lățimea cu 4 m și se micșorează lungimea cu 5 m, aria dreptunghiului rămâne neschimbată.

(2p) **a)** Justifică dacă lățimea dreptunghiului poate fi egală cu 15 m.

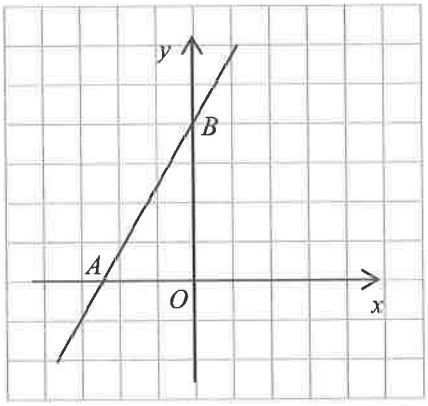
(3p) **b)** Determină perimetrul dreptunghiului.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(x - \dfrac{1}{2-x}\right) : \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 7x + 10}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, 5\}$.

(2p) **a)** Arată că $E(x) = \dfrac{x-5}{x}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, 5\}$.

(3p) **b)** Determină numerele întregi n pentru care $E(n)$ este număr întreg.

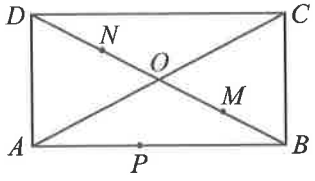
3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\sqrt{2}+2$.



(2p) **a)** Arată că aria triunghiului AOB este egală cu $\sqrt{2}$, unde A și B sunt punctele de intersecție a graficului funcției f cu axele Ox, respectiv Oy.

(3p) **b)** Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x)\leq x$.

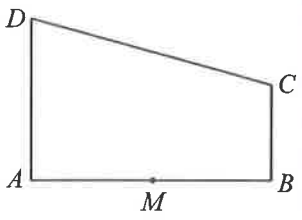
4. În figura alăturată, $ABCD$ este un dreptunghi, O este punctul de intersecție a diagonalelor sale, $AB>AD$ și $AC=4$ cm. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor OB, respectiv OD, iar P este un punct pe AB astfel încât $PM=PN=2$ cm.



(2p) **a)** Arată că aria triunghiului MNP este egală cu $\sqrt{3}$ cm^2.

(3p) **b)** Determină lungimea segmentului AB.

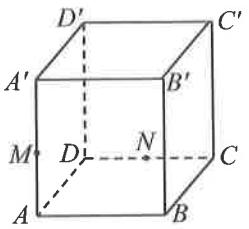
5. În figura alăturată este reprezentat un trapez dreptunghic $ABCD$, în care $AD \parallel BC$, $\measuredangle A = \measuredangle B = 90°$, $AD = 2BC = 6$ cm, $\mathcal{A}_{ABCD} = 27\sqrt{2}$ cm^2 și M este mijlocul segmentului AB.



(2p) **a)** Demonstrează că $CD = 9$ cm.

(3p) **b)** Determină măsura unghiului DMC.

6. În figura alăturată, $ABCDA'B'C'D'$ este o prismă regulată cu aria laterală egală cu 96 cm^2 și aria totală egală cu 128 cm^2.



a) Arată că $AA' = 6$ cm. *(2p)*

b) Dacă punctele M și N sunt mijloacele muchiilor AA', respectiv DC, determină lungimea proiecției segmentului MN pe planul (BCC'). *(3p)*

✦ TESTUL 6 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Dintre numerele 4, 5, 6, 12, cel care are exact trei divizori naturali este:
a) 4; **b)** 5; **c)** 6; **d)** 12.

(5p) **2.** Soluția din mulțimea numerelor reale a ecuației $3{,}2 - 2 \cdot x = 1{,}4$ este:
a) 1,8; **b)** 0,6; **c)** 0,9; **d)** 2,3.

(5p) **3.** Alegând un număr de forma $\overline{1x2}$, probabilitatea ca acesta să fie divizibil cu 3 este:
a) $\frac{2}{5}$; **b)** $\frac{3}{10}$; **c)** $\frac{3}{9}$; **d)** $\frac{2}{10}$.

(5p) **4.** Cel mai mic număr natural n pentru care $3\sqrt{n} \in \left(2\sqrt{5}, 4\sqrt{3}\right)$ este:
a) 0; **b)** 1; **c)** 3; **d)** 5.

(5p) **5.** Patru eleve au avut de calculat produsul numerelor $a = (\sqrt{2}+1)^{-1}$ și $b = 1+(3-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$. Rezultatele obținute sunt trecute în tabelul de mai jos:

Ana	Crina	Diana	Mihaela
$\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$	$1+2\sqrt{2}$	2

Eleva care a obținut rezultatul corect este:
a) Mihaela; **b)** Crina; **c)** Ana; **d)** Diana.

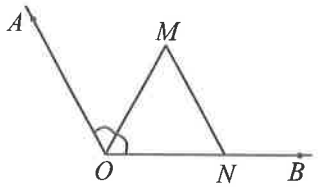
(5p) **6.** Într-o urnă sunt 16 bile. Un sfert dintre ele sunt albe și restul sunt negre. Irina afirmă: „Numărul bilelor negre din urnă este cu 12 mai mare decât cel al bilelor albe". Afirmația Irinei este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele coliniare A, B și C, cu $BC = 2AC$. Dacă M este mijlocul segmentului AC, N este mijlocul segmentului CB și $MN = 9$ cm, atunci lungimea segmentului AC este egală cu:

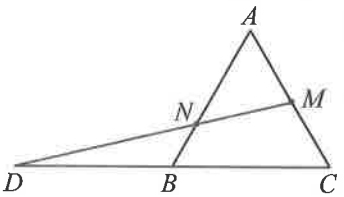
a) 3 cm; **b)** 6 cm; **c)** 18 cm; **d)** 9 cm.

(5p) **2.** În figura alăturată, unghiul AOB are măsura egală cu 120°, OM este bisectoarea sa și MN este paralelă cu OA, unde $N \in OB$. Atunci măsura unghiului MNO este egală cu:



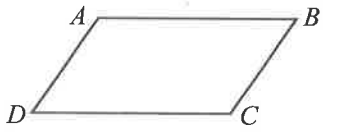
a) 90°; **b)** 120°;
c) 60°; **d)** 30°.

(5p) **3.** În figura alăturată, ABC este un triunghi echilateral având perimetrul egal cu 27 cm. Punctul D este simetricul punctului C față de B, iar punctul N aparține laturii AB astfel încât $AN = 6$ cm. Dacă M este intersecția dreptelor DN și AC, atunci lungimea segmentului MC este egală cu:



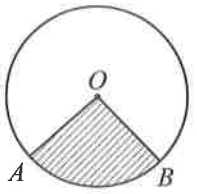
a) 4,5 cm; **b)** 4 cm;
c) 6 cm; **d)** 5 cm.

(5p) **4.** În figura alăturată, $ABCD$ este un paralelogram în care $AD = 12$ cm, $\measuredangle ABC = 60°$ și măsura unghiului BAC este egală cu o treime din măsura unghiului CAD. Perimetrul paralelogramului $ABCD$ este egal cu:



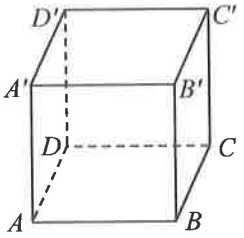
a) 36 cm; **b)** 24 cm;
c) 72 cm; **d)** 48 cm.

(5p) **5.** În figura alăturată este reprezentat un cerc cu centrul O. Măsura arcului mic $\overset{\frown}{AB}$ este egală cu $72°$ și aria porțiunii haşurate este egală cu 4π cm^2. Lungimea razei cercului este egală cu:



a) 4 cm; **b)** $2\sqrt{5}$ cm;
c) 20 cm; **d)** 10 cm.

(5p) **6.** Un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are $AB = 4$ cm, $AD = 3$ cm și $AC' = 13$ cm. Volumul paralelipipedului este egal cu:



a) 144 cm^3; **b)** 72 cm^3;
c) 36 cm^3; **d)** 288 cm^3.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Numărul $\overline{xyz}$ are proprietatea că $\overline{xyz} = \overline{xy} + \overline{yz} + \overline{zx}$.

(2p) **a)** Este posibil ca cifra x să fie egală cu 2? Justifică răspunsul.

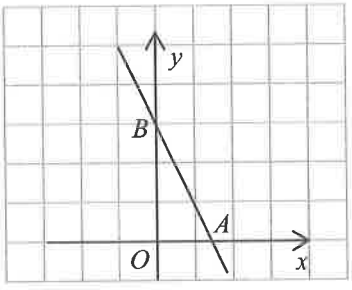
(3p) **b)** Determină numărul $\overline{xyz}$ care îndeplinește condiția din enunț.

2. Se consideră expresiile $E_1(x) = (x-3)^2 - (x+1)^2$ și $E_2(x) = (x+4)^2 - (x-2)^2$, unde x este număr real.

(2p) **a)** Arată că $E_2(x) = 12(x+1)$, pentru orice număr real x.

(3p) **b)** Dacă n este număr natural impar, demonstrează că $E_1(n) + E_2(n)$ se divide cu 8.

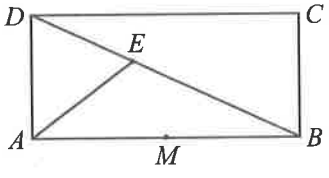
3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3 - 2x$.



(2p) **a)** Arată că $\dfrac{f(1) - f(\sqrt{2})}{\sqrt{2} - 1}$ este număr natural prim.

(3p) **b)** Dacă reprezentarea grafică a funcției f intersectează axele Ox și Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy în punctele A, respectiv B, determină valoarea numărului real m, știind că aria triunghiului PBA este egală cu 3, unde $P(0, m)$.

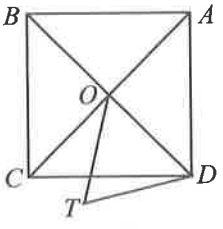
4. În figura alăturată, $ABCD$ este un dreptunghi având $BC = 3\sqrt{6}$ cm și $AB = 6\sqrt{3}$ cm. Punctul M este mijlocul laturii AB, iar punctul E aparține diagonalei DB, cu $DE = 3\sqrt{2}$ cm.



(2p) **a)** Demonstrează că sinusul unghiului ABD este mai mare decât $\dfrac{1}{2}$.

(3p) **b)** Arată că dreptele AE și CM sunt paralele.

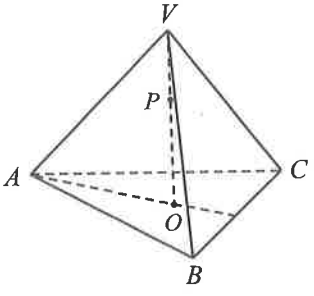
5. În figura alăturată este reprezentat un pătrat $ABCD$ având centrul în O, iar punctul T este ales astfel încât triunghiul DOT să fie echilateral, cu perimetrul egal cu $9\sqrt{2}$ cm.



(2p) **a)** Arată că perimetrul pătratului $ABCD$ este egal cu 24 cm.

(3p) **b)** Determină aria triunghiului BDT.

6. În figura alăturată, $VABC$ este o piramidă triunghiulară regulată având $VA = 2\sqrt{7}$ cm și raza cercului circumscris bazei egală cu 4 cm.



(2p) **a)** Arată că lungimea apotemei piramidei este egală cu 4 cm.

(3p) **b)** Dacă punctul $P \in VO$ este astfel încât $VP = 2\sqrt{3} - 2$ cm, calculează măsura unghiului determinat de planele (VBC) și (PBC).

✦ TESTUL 7 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $3-(-2)-3\cdot 2$ este:
a) -7; **b)** 4; **c)** -1; **d)** 1.

(5p) **2.** Un frigider costă 1600 de lei. După o scumpire cu 5%, prețul frigiderului devine:
a) 2400 de lei; **b)** 1680 de lei; **c)** 1700 de lei; **d)** 1760 de lei.

(5p) **3.** Dintre următoarele numere, cel întreg este:
a) $\sqrt{169}$; **b)** $\frac{17}{2}$; **c)** $2,5$; **d)** $-1,3$.

(5p) **4.** Numărul natural n cu proprietatea $4\sqrt{3}<\sqrt{n}<5\sqrt{2}$ este:
a) 48; **b)** 49; **c)** 50; **d)** 51.

(5p) **5.** Patru elevi au efectuat calculul $\frac{1}{3-2\sqrt{2}}-\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$, iar rezultatele pe care le-au obținut sunt prezentate în tabelul următor:

Andrei	Bianca	Cristina	Daniel
6	$4\sqrt{2}$	10	$-4\sqrt{2}$

Dintre cei patru elevi, cel care a răspuns corect este:
a) Andrei; **b)** Bianca; **c)** Cristina; **d)** Daniel.

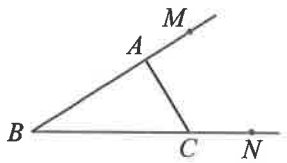
(5p) **6.** Diriginta împarte elevilor bomboanele dintr-o cutie. Maria observă că unii copii au luat câte două bomboane, ceilalți cinci doar câte una, iar în cutie au rămas trei bomboane. Ea afirmă că, inițial, în cutie a fost un număr par de bomboane. Afirmația Mariei este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

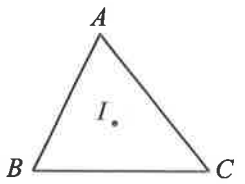
(5p) **1.** În figura alăturată, punctele A, B, C, D, E și F sunt coliniare, în această ordine, astfel încât $AB=BC=CD=DE=EF$. Simetricul punctului D față de punctul C este:

a) A; **b)** B; **c)** E; **d)** F.

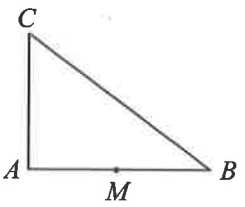
(5p) **2.** Măsura unghiului ABC din figura alăturată este egală cu 25°. Suma măsurilor unghiurilor MAC și NCA este egală cu:
a) 155°; **b)** 120°;
c) 205°; **d)** 215°.



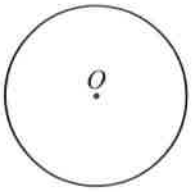
(5p) **3.** Punctul I din figura alăturată este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, iar unghiul ABI are măsura de 20°. Măsura unghiului AIC este egală cu:
a) 140°; **b)** 160°;
c) 120°; **d)** 110°.



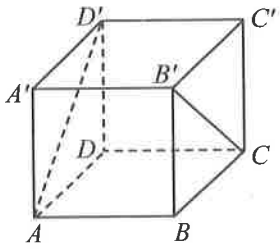
(5p) **4.** Triunghiul ABC din figura alăturată este dreptunghic în A, iar punctul M este mijlocul catetei AB. Dacă $AB=8$ cm și $AC=6$ cm, atunci distanța de la punctul M la dreapta BC este egală cu:
a) 1,2 cm; **b)** 1,8 cm;
c) 2,4 cm; **d)** 4,8 cm.



(5p) **5.** Cercul din figura alăturată are lungimea egală cu 4π cm. Aria discului este egală cu:
a) π cm^2; **b)** 2π cm^2;
c) 4π cm^2; **d)** 16π cm^2.



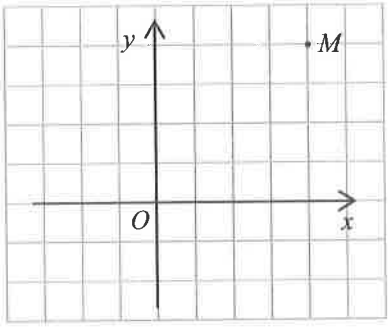
(5p) **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$. Măsura unghiului format de dreptele AD' și $B'C$ este egală cu:
a) 30°; **b)** 45°;
c) 60°; **d)** 90°.



SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

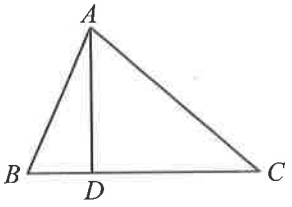
1. Dacă Diana ar pune câte trei trandafiri în fiecare vază pe care o are, ar rămâne cu un trandafir în mână. Dacă ar pune câte cinci trandafiri în fiecare vază, trei vaze ar rămâne goale.
(2p) **a)** Stabilește dacă numărul vazelor poate fi egal cu 6.
(3p) **b)** Câți trandafiri și câte vaze are Diana?

2. Se consideră expresia $E(x) = (2x-1)^2 - (x+1)^2 - (2x^2+3)$, unde x este număr real.
(2p) **a)** Arată că $E(x) = x^2 - 6x - 3$, oricare ar fi numărul real x.
(3p) **b)** Determină numerele întregi a cu proprietatea că $E(a) \leq 0$.

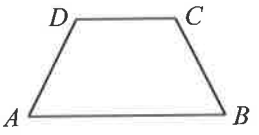


3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3 - x$.
(2p) **a)** Reprezintă graficul funcției f în sistemul de axe ortogonale xOy din figura alăturată.
(3p) **b)** Considerăm punctul $M(4, 4)$. Demonstrează că dreapta OM este perpendiculară pe graficul funcției.

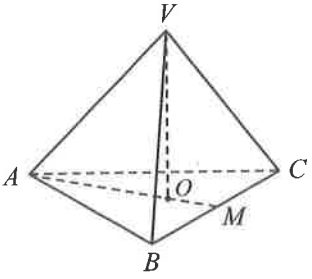
4. Pe latura BC a triunghiului ABC din figura alăturată se consideră un punct D. Se știe că $AB = 4$ cm, $BD = 2$ cm și $CD = 6$ cm.
(2p) **a)** Arată că $AB^2 = BD \cdot BC$.
(3p) **b)** Demonstrează că $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ACB$.



5. Se consideră trapezul $ABCD$ din figura alăturată, cu baza mare $AB = 12$ cm și celelalte laturi de 6 cm.
(2p) **a)** Arată că aria trapezului este egală cu $27\sqrt{3}$ cm^2.
(3p) **b)** Determină distanța de la punctul A la dreapta BC.



6. În figura alăturată este reprezentată piramida triunghiulară regulată $VABC$, cu latura bazei $AB = 8\sqrt{3}$ cm și înălțimea $VO = 4\sqrt{2}$ cm. Notăm cu M mijlocul segmentului BC.
(2p) **a)** Arată că lungimea apotemei piramidei, VM, este egală cu $4\sqrt{3}$ cm.
(3p) **b)** Dacă P este proiecția punctului O pe planul (VBC), demonstrează că punctul P este centrul de greutate al triunghiului VBC.



✦ TESTUL 8 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $10 - 10 : 10$ este:
a) 0; **b)** 9; **c)** 10; **d)** 11.

(5p) **2.** Patru elevi au calculat media geometrică a numerelor $a = 1\frac{1}{8}$ și $b = 0{,}08$. Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul următor:

Andrei	Bogdan	Maria	Ioana
0,3	0,03	3	0,09

Răspunsul corect este dat de:
a) Andrei; **b)** Bogdan; **c)** Maria; **d)** Ioana.

(5p) **3.** Un amestec de apă cu sare conține 6% sare și cântărește 7,3 kg. Cantitatea de sare din amestec, măsurată în grame, este egală cu:
a) 428; **b)** 538; **c)** 378; **d)** 438.

(5p) **4.** Cel mai mare dintre numerele $a = 3{,}12$, $b = 3{,}1(2)$, $c = 3{,}(12)$ și $d = 3{,}1$ este:
a) a; **b)** b; **c)** c; **d)** d.

(5p) **5.** Cel mai mic număr natural a, pentru care numărul $a + 6789$ se divide cu 9, este:
a) 4; **b)** 5; **c)** 6; **d)** 7.

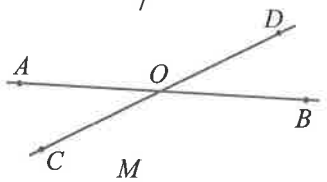
(5p) **6.** Trei muncitori vor să repare un gard. Primul muncitor poate repara gardul în două ore, al doilea în trei ore, iar al treilea în 6 ore. Afirmația „Lucrând împreună, cei trei muncitori pot repara gardul într-o oră." este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

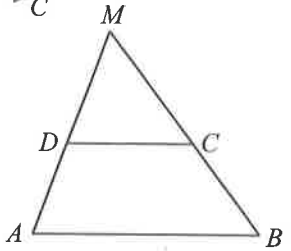
(5p) **1.** În figura alăturată, punctele A, B și C sunt coliniare, $AB = 7$ cm, $BC = 2$ cm, iar M și N sunt mijloacele segmentelor AB, respectiv AC. Valoarea raportului $\frac{AN}{MC}$ este egală cu:

a) $\frac{9}{11}$; **b)** $\frac{7}{9}$; **c)** $\frac{7}{11}$; **d)** $\frac{9}{7}$.

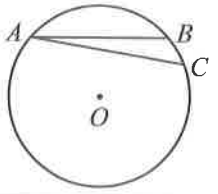
(5p) **2.** În figura alăturată, AB și CD sunt două drepte secante în O. Dacă $\measuredangle AOD = 5x - 7°$ și $\measuredangle BOC = x + 61°$, atunci valoarea lui x este egală cu:
a) 15°; **b)** 16°;
c) 17°; **d)** 18°.



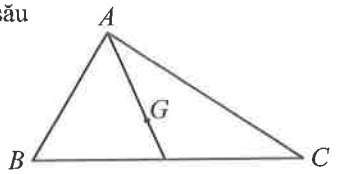
(5p) **3.** În figura alăturată, $ABCD$ este un trapez cu $AB \parallel CD$, $AB = 6$ m, $CD = 4$ m, iar M este punctul de intersecție dintre dreptele AD și BC. Dacă aria trapezului este egală cu 50 m^2, atunci aria triunghiului MDC este egală cu:
a) 10 m^2; **b)** 40 m^2;
c) 50 m^2; **d)** 60 m^2.



(5p) **4.** În cercul din figura alăturată, AB este latura unui pătrat înscris în cerc, iar AC este latura unui triunghi echilateral înscris în cerc. Măsura unghiului BAC este egală cu:
a) 15°; **b)** 30°;
c) 45°; **d)** 60°.



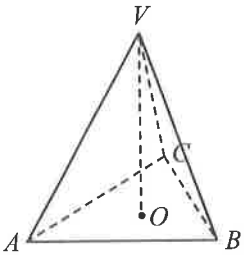
(5p) **5.** În figura alăturată, triunghiul ABC este dreptunghic în A, iar G este centrul său de greutate. Valoarea raportului $\frac{AG}{BC}$ este egală cu:



a) $\frac{2}{3}$; **b)** $\frac{1}{2}$;

c) $\frac{1}{6}$; **d)** $\frac{1}{3}$.

(5p) **6.** În figura alăturată, $VO = 4\sqrt{6}$ m este un stâlp, VA, VB, VC sunt trei cabluri de susținere, iar triunghiurile VAB, VBC și VCA sunt echilaterale. Suma lungimilor cablurilor este egală cu:



a) 27 m; **b)** 30 m;

c) 33 m; **d)** 36 m.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Bunica împarte nuci și mere nepoților săi. Numărul nucilor este de trei ori mai mare decât numărul merelor. După ce a dat fiecărui nepot câte trei mere și câte opt nuci, bunicii i-au mai rămas două mere și 14 nuci.

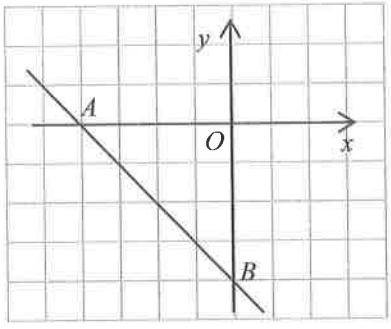
(2p) **a)** Poate avea bunica șase nepoți? Justifică răspunsul.

(3p) **b)** Determină câți nepoți are bunica.

2. Se consideră expresia $E(x) = (2x-3)^2 - 3(x-1)(x+1) - 5(2-3x)$, unde x este număr real.

(2p) **a)** Arată că $E(2023) - E(2022) = 4048$.

(3p) **b)** Demonstrează că suma $\frac{1}{E(0)} + \frac{1}{E(1)} + \ldots + \frac{1}{E(8)} + 0{,}1$ este număr natural.

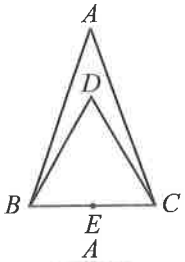


3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x - 4$. Se notează cu A punctul de intersecție dintre graficul funcției f și axa Ox și cu B punctul de intersecție dintre graficul funcției f și axa Oy.

(2p) **a)** Determină lungimea segmentului AB.

(3p) **b)** Determină coordonatele punctului M situat pe axa Ox, știind că aria triunghiului MAB este egală cu 4.

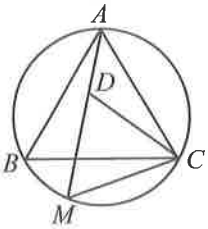
4. În figura alăturată, triunghiul ABC este isoscel, $AB = AC = 13$ cm, triunghiul DBC este echilateral de latură 10 cm, iar E este mijlocul laturii BC.



(2p) **a)** Arată că punctele A, D și E sunt coliniare.

(3p) **b)** Aproximează lungimea segmentului AD cu o zecimală exactă.

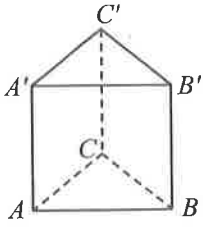
5. În figura alăturată, triunghiul ABC este echilateral, M este un punct pe arcul mic $\overset{\frown}{BC}$ al cercului circumscris triunghiului ABC, iar D este situat pe segmentul AM, astfel încât $MD = MC$.



(2p) **a)** Arată că triunghiul MDC este echilateral.

(3p) **b)** Demonstrează că $MA = MB + MC$.

6. În figura alăturată, $ABCA'B'C'$ este o prismă triunghiulară regulată, în care $AB = 10$ cm și $BB' = 15$ cm.



(2p) **a)** Arată că volumul prismei este egal cu $375\sqrt{3}$ cm^3.

(3p) **b)** Determină măsura unghiului dintre planele $(CA'B')$ și (ABC).

✦ TESTUL 9 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Cel mai mare număr natural de patru cifre distincte, cu cifra zecilor egală cu 9, este:
a) 9897; **b)** 8796; **c)** 7896; **d)** 8697.

(5p) **2.** Un biciclist a parcurs un drum în trei zile conform datelor din tabelul următor:

Ziua	1	2	3
Distanța parcursă (km)	45	72	80
Viteza medie de deplasare (km/h)	30	24	32

Timpul necesar parcurgerii drumului a fost egal cu:
a) 5 ore; **b)** 6 ore; **c)** 7 ore; **d)** 8 ore.

(5p) **3.** Media aritmetică a trei numere este 7. Unul dintre numere este egal cu 7. Media aritmetică a celorlalte două numere este egală cu:
a) 14; **b)** 7; **c)** 21; **d)** 28.

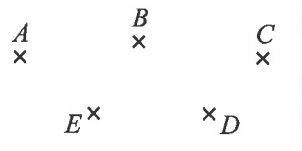
(5p) **4.** Fie $A = (-3, 5)$ și $B = [-2, 7]$. Suma numerelor întregi din mulțimea $A \cap B$ este egală cu:
a) 7; **b)** 12; **c)** 9; **d)** 10.

(5p) **5.** Dacă a, b sunt numere reale astfel încât $\frac{3}{4} = \frac{a}{12} = \frac{15}{b}$, atunci suma $a + b$ este egală cu:
a) 9; **b)** 20; **c)** 25; **d)** 29.

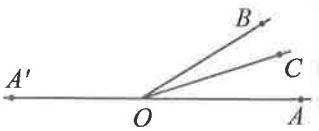
(5p) **6.** Propoziția „Cel mai mic număr natural mai mare decât $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ este egal cu 4.” este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

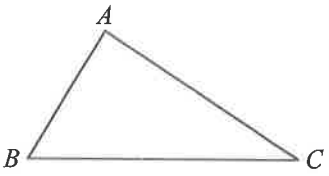
(5p) **1.** În figura alăturată sunt desenate cinci puncte distincte, oricare trei necoliniare: A, B, C, D și E. Numărul segmentelor care au un capăt în A sau în B și celălalt capăt în unul dintre punctele desenate este egal cu:
a) 5; **b)** 6;
c) 7; **d)** 8.



(5p) **2.** În figura alăturată, $\sphericalangle AOB = 32°$, $\sphericalangle BOC = 18°$, iar OA' este semidreapta opusă semidreptei OA. Măsura unghiului $A'OC$ este egală cu:
a) 162°; **b)** 176°;
c) 76°; **d)** 166°.

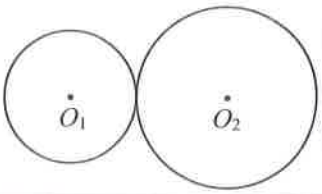


(5p) **3.** În figura alăturată, triunghiul ABC este dreptunghic în A, $BC = 25$ cm și $\sin \sphericalangle C = 0{,}6$. Lungimea catetei AC este egală cu:
a) 15 cm; **b)** 16 cm;
c) 18 cm; **d)** 20 cm.



(5p) **4.** În figura alăturată, $ABCD$ este un dreptunghi care are perimetrul egal cu 8 cm și lungimea diagonalei egală cu $2\sqrt{3}$ cm. Aria dreptunghiului este egală cu:
a) 1 cm^2; **b)** 2 cm^2;
c) 3 cm^2; **d)** 4 cm^2.

(5p) **5.** În figura alăturată, cercurile $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$ și $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$ sunt tangente exterior și $O_1O_2 = 18$ cm. Dacă $r_1 = 3x - 2$ și $r_2 = 2x + 5$, valoarea numărului real x este egală cu:
a) 1 cm; **b)** 2 cm;
c) 3 cm; **d)** 4 cm.



(5p) **6.** O piscină are formă de paralelipiped dreptunghic cu lățimea de 2,5 m, lungimea de 4 m și înălțimea de 1,5 m. În piscină se pun 8000 ℓ de apă. Înălțimea până la care se ridică apa din piscină este egală cu:

a) 0,75 m; **b)** 0,80 m; **c)** 0,85 m; **d)** 1 m.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Un bunic are doi nepoți. Vârsta bunicului se exprimă printr-un număr de două cifre, fiecare cifră exprimând vârsta unui nepot. Suma vârstelor celor trei este egală cu 93 de ani.

(2p) **a)** Stabilește dacă nepoții pot avea 6 ani, respectiv 7 ani.

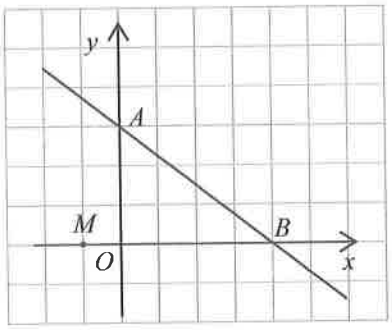
(3p) **b)** Determină vârsta bunicului.

2. Se consideră expresia $E(x) = (-x+5)^2 - (2-3x)(1-2x) - 5(2-x)(2+x) + x + 2$, unde x este număr real.

(2p) **a)** Fie a și b două numere reale astfel încât $a + b = 105$. Arată că $E(a) + E(b) = -200$.

(3p) **b)** Calculează $E(1) + E(2) + \ldots + E(104)$.

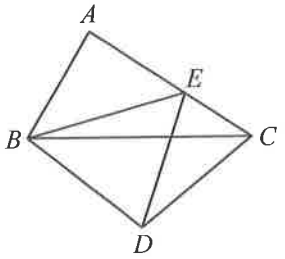
3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3 - \frac{3}{4}x$ și punctul $M(-1, 0)$.



(2p) **a)** Arată că punctul M **nu** este situat pe graficul funcției f.

(3p) **b)** Calculează distanța de la punctul M la graficul funcției f.

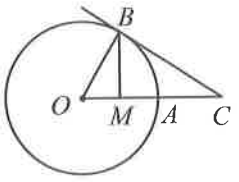
4. În figura alăturată, triunghiul ABC este dreptunghic în A și $BC = 2AB$, triunghiul BDC este dreptunghic isoscel în D, iar punctul E este situat pe latura AC, astfel încât $AE = AB$.



(2p) **a)** Arată că $\measuredangle EBC = 15°$.

(3p) **b)** Demonstrează că triunghiul BDE este echilateral.

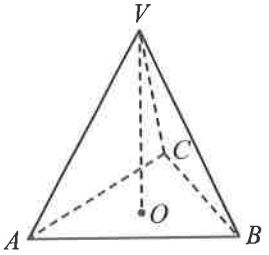
5. În figura alăturată este reprezentat cercul $\mathscr{C}$ de centru O, unde punctul A este situat pe cerc, punctul M este mijlocul segmentului OA, iar punctul B este situat la intersecția perpendicularei în M pe OA cu cercul $\mathscr{C}$. Tangenta în B la cerc intersectează dreapta OA în punctul C.



(2p) **a)** Arată că triunghiul OAB este echilateral.

(3p) **b)** Demonstrează că C este simetricul punctului O față de A.

6. În figura alăturată, $VABC$ este o piramidă triunghiulară regulată de înălțime VO, în care apotema piramidei este egală cu 6 cm, iar unghiul dintre planele (VBC) și (ABC) are măsura de 60°.



(2p) **a)** Arată că volumul piramidei este egal cu 81 cm^3.

(3p) **b)** Fie P un punct pe înălțimea VO, egal depărtat de planele (ABC) și (VBC). Calculează lungimea segmentului PO.

✦ TESTUL 10 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Restul împărțirii numărului 2023 la 21 este egal cu:
a) 96; **b)** 21; **c)** 17; **d)** 7.

(5p) **2.** Tabelul următor descrie o dependență funcțională:

x	-1	b	2
$y = -2x + 3$	a	-5	c

Suma $a + b + c$ este egală cu:
a) 8; **b)** 4; **c)** 0; **d)** 16.

(5p) **3.** Fie x, y două numere reale pozitive, astfel încât media geometrică a numerelor 2 și x este egală cu 3, iar media geometrică a numerelor 18 și y este egală cu 4. Media geometrică a numerelor x și y este egală cu:
a) 12; **b)** 8; **c)** 6; **d)** 2.

(5p) **4.** Cel mai mic număr natural de patru cifre, divizibil cu 45, este:
a) 1020; **b)** 1005; **c)** 1035; **d)** 1080.

(5p) **5.** Se consideră mulțimile $A = \{-1, 2, 4\}$ și $B = \{-2, 1, 4\}$. Mulțimea $A \setminus B$ este egală cu:
a) $\{4\}$; **b)** $\{-1, 2\}$; **c)** $\{-2, 1\}$; **d)** $\{-2, -1, 1, 4\}$.

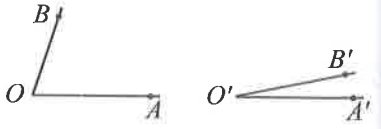
(5p) **6.** Într-un reper cartezian xOy se consideră punctul $A(-3, 4)$ și punctul A', simetricul punctului A față de punctul O. Maria afirmă: „Punctul A' are coordonatele $(4, -3)$". Afirmația Mariei este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată, A și B sunt două puncte situate pe dreapta d, astfel încât $AB = 2$ cm. Se consideră punctele M și N pe dreapta d, unde M este simetricul punctului A față de B, iar N este simetricul punctului M față de A. Lungimea segmentului MN este egală cu:

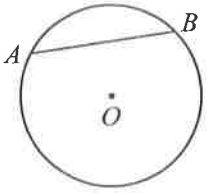
a) 5 cm; **b)** 6 cm;
c) 7 cm; **d)** 8 cm.

(5p) **2.** În figura alăturată, unghiurile AOB și $A'O'B'$ sunt complementare și $\measuredangle AOB = 2x + 72°$, $\measuredangle A'O'B' = 3x - 12°$. Valoarea lui x este egală cu:



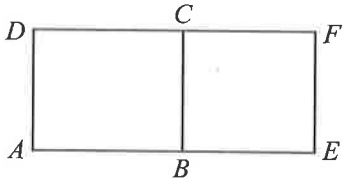
a) 5°; **b)** 6°;
c) 24°; **d)** 84°.

(5p) **3.** În figura alăturată, A și B sunt două puncte situate pe cercul $\mathscr{C}(O, R)$, cu $R = 6$ cm, astfel încât distanța de la O la coarda AB este egală cu 3 cm. Măsura unghiului AOB este egală cu:



a) 60°; **b)** 90°;
c) 30°; **d)** 120°.

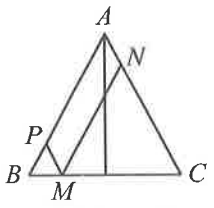
(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$ de arie 15 cm^2, iar $AEFD$ este un dreptunghi de arie 21 cm^2. Dacă $BE = 2$ cm, atunci perimetrul patrulaterului $BEFC$ este egal cu:



a) 20 cm; **b)** 8 cm;
c) 5 cm; **d)** 10 cm.

(5p) **5.** În figura alăturată, triunghiul ABC este isoscel cu $AB = AC = 10$ cm, iar M este un punct situat pe latura BC, astfel încât $MN \parallel AB$, $PM \parallel AC$, $N \in AC$, $P \in AB$. Suma $MN + MP$ este egală cu:

a) 5 cm; **b)** 20 cm;
c) 10 cm; **d)** 12 cm.



(5p) **6.** O placă de faianță are formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 62,5 cm, 40 cm și 0,5 cm. Mai multe astfel de plăci se împachetează în cutii de formă cubică având latura de 1 m. Numărul plăcilor dintr-o cutie este egal cu:

a) 80; **b)** 8000; **c)** 800; **d)** 1000.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Un turist și-a propus să viziteze, pe un traseu turistic, 52 de obiective în șase zile. În prima zi a vizitat cinci obiective, iar în fiecare dintre zilele următoare mai multe obiective decât în ziua precedentă.

(2p) **a)** Poate vizita turistul 10 obiective a doua zi? Justifică răspunsul.

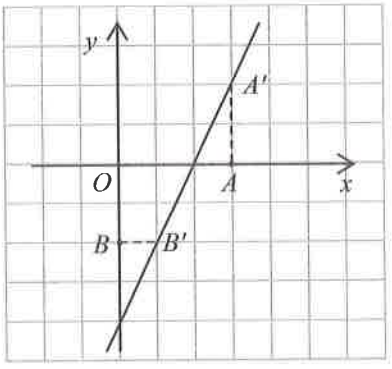
(3p) **b)** Care este numărul maxim de obiective pe care le poate vizita turisul a doua zi?

2. Se consideră expresiile $E_1(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{x^2 - 2x + 1}$ și $E_2(x) = \dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{x+2}{x-1} + \dfrac{x-3}{x^2-1}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

(2p) **a)** Calculează $E_1(-1) \cdot E_1\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

(3p) **b)** Arată că pentru orice număr natural n, $n \geq 2$, numărul $a = E_1(n) - \dfrac{1}{2} E_2(n)$ este natural.

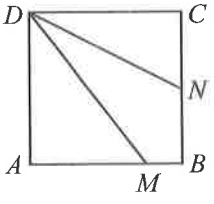
3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 4$ și punctele $A(3, 0)$ și $B(0, -2)$. Paralela prin A la axa Oy intersectează graficul funcției f în A', iar paralela prin B la axa Ox intersectează graficul funcției f în punctul B'.



(2p) **a)** Determină coordonatele punctelor A' și B'.

(3p) **b)** Arată că $A'B' = 2\sqrt{5}$.

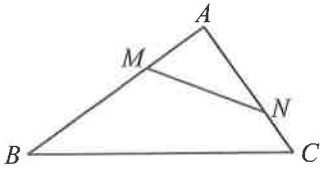
4. În figura alăturată, $ABCD$ este un pătrat cu latura de 4 cm. Punctul M este situat pe latura AB astfel încât $AM = 3$ cm, iar punctul N este mijlocul laturii BC.



(2p) **a)** Calculează aria triunghiului DMN.

(3p) **b)** Arată că $\sin(\sphericalangle MDN) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

5. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC dreptunghic în A, cu $AB = 8$ cm și $AC = 6$ cm, iar punctele M și N sunt situate pe laturile AB, respectiv AC, astfel încât $AM = 3$ cm și $AN = 4$ cm.



(2p) **a)** Arată că $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ACB$.

(3p) **b)** Perpendiculara din A pe BC intersectează segmentul MN în P. Demonstrează că punctul P este mijlocul segmentului MN.

6. Un ax din oțel, în formă de cilindru circular drept cu lungimea de 1,40 m și diametrul de 100 mm, se strunjește astfel încât noul diametru devine 80 mm, lungimea rămânând aceeași.

(2p) **a)** Arată că $v = 0{,}64 \cdot \mathcal{V}$, unde v este volumul axului după strunjire, iar $\mathcal{V}$ este volumul inițial al axului.

(3p) **b)** Cât la sută din masa inițială se pierde prin strunjire?

✦ TESTUL 11 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Suma divizorilor naturali ai numărului 21 este:
a) 11; **b)** 21; **c)** 31; **d)** 32.

(5p) **2.** O carte costă 36 de lei. După o ieftinire cu 20%, prețul cărții va fi:
a) 7,2 lei; **b)** 28,8 lei; **c)** 32 de lei; **d)** 34,2 lei.

(5p) **3.** Dacă $a = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot (-5)$ și $b = (-2)^3 : 2 + 3^5 : (-3)^4$, atunci diferența $a - b$ este egală cu:
a) 1; **b)** 2; **c)** 3; **d)** 4.

(5p) **4.** Dintre intervalele $(-2, 7)$, $[-4, 6)$, $(12, 21]$ și $[-16, -10]$, cel care conține cele mai multe numere întregi este:
a) $(-2, 7)$; **b)** $[-4, 6)$; **c)** $(12, 21]$; **d)** $[-16, -10]$.

(5p) **5.** Andrei, Barbu, Călin și Dan au calculat media geometrică a numerelor $a = \sqrt{8} + 2\sqrt{18}$ și $b = 2\sqrt{50} - \sqrt{162}$. Rezultatele obținute de ei sunt trecute în tabelul următor:

Andrei	Barbu	Călin	Dan
$\sqrt{2}$	4	$8\sqrt{2}$	16

Dintre cei patru elevi, cel care a obținut rezultatul corect este:
a) Andrei; **b)** Barbu; **c)** Călin; **d)** Dan.

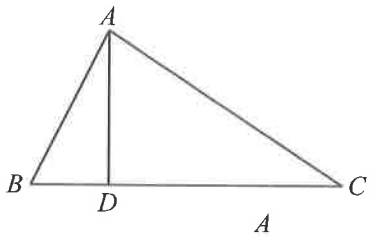
(5p) **6.** Cei 30 de elevi ai unei clase au ales prin vot șeful clasei, dintre colegii lor: Ana, Bogdan și Carmen. Procentele voturilor obținute de cei trei candidați sunt prezentate în tabelul de mai jos.

Ana	Bogdan	Carmen
$p\%$	50%	30%

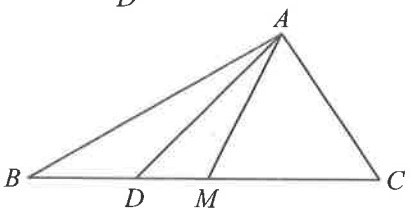
Numărul elevilor care au votat-o pe Ana este egal cu:
a) 5; **b)** 6; **c)** 10; **d)** 20.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

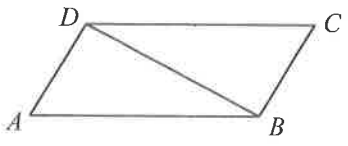
(5p) **1.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC, $AB \neq AC$ și punctul D situat pe latura BC, astfel încât unghiurile ADB și ADC au măsurile egale. Pentru triunghiul ABC, dreapta AD este:
a) bisectoare; **b)** mediană;
c) înălțime; **d)** mediatoare.



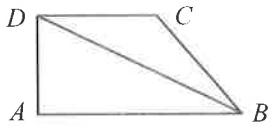
(5p) **2.** În figura alăturată este desenat un triunghi dreptunghic ABC cu ipotenuza BC și $\measuredangle C = 60°$. Dacă punctul M este mijlocul laturii BC, iar AD este bisectoarea unghiului BAM, atunci măsura unghiului ADC este egală cu:
a) 15°; **b)** 30°;
c) 45°; **d)** 60°.



(5p) **3.** Terenul din figura alăturată are forma unui paralelogram cu laturile $AB = 170$ m, $BC = 80$ m și diagonala $BD = 150$ m. Aria terenului este egală cu:
a) 6000 m^2; **b)** 12000 m^2;
c) 13600 m^2; **d)** 25500 m^2.

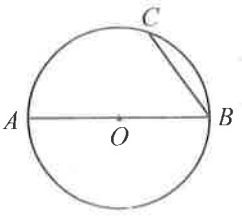


(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat trapezul dreptunghic $ABCD$, cu $AB \parallel CD$ și $\measuredangle A = 90°$. Diagonala BD este bisectoarea unghiului ABC, $AB = 8$ cm și $CD = 5$ cm. Lungimea laturii AD este egală cu:



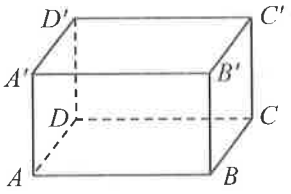
a) 3 cm; **b)** 4 cm;
c) $3\sqrt{2}$ cm; **d)** 5 cm.

(5p) **5.** În figura alăturată este reprezentat un cerc cu centrul O și raza egală cu 6 cm. Punctele A și B sunt diametral opuse, iar coarda BC are lungimea de 6 cm. Lungimea coardei AC este egală cu:



a) 6 cm; **b)** $6\sqrt{2}$ cm;
c) $6\sqrt{3}$ cm; **d)** 12 cm.

(5p) **6.** În figura alăturată este desenată o cutie în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $AB = 12$ dm, $BC = 3$ dm și $AA' = 4$ dm. Maria vrea să cumpere o coală de hârtie cu suprafața de x dm^2, pentru a împacheta cutia. Știind că 20% din x se pierde la ambalare, valoarea minimă a lui x este:



a) 96; **b)** 192;
c) 240; **d)** 300.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Într-o pungă sunt mai multe bomboane. Dacă toate bomboanele se împart în mod egal unui grup de 6 copii, atunci în pungă rămân 4 bomboane, iar dacă toate bomboanele se împart în mod egal unui grup de 8 copii, atunci în pungă rămân 6 bomboane.

(2p) **a)** Verifică dacă în pungă puteau fi 46 de bomboane. Justifică răspunsul dat.

(3p) **b)** Află care poate fi cel mai mic număr de bomboane din pungă.

2. Se consideră expresia $E(x) = (x+2)^2 + (x-3)^2 - (x-1)(x+2) - (3x+7)$, unde $x \in \mathbb{R}$.

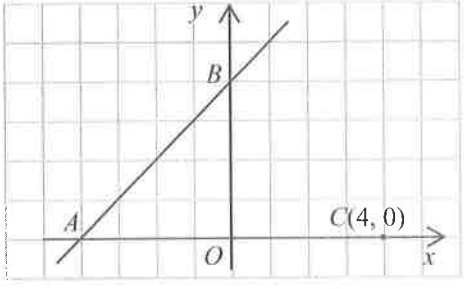
(2p) **a)** Calculează $E(3)$.

(3p) **b)** Demonstrează că $E(k)$ este un număr întreg divizibil cu 8, pentru orice număr întreg par k.

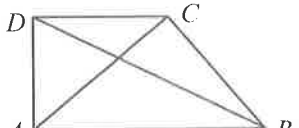
3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 4$.

(2p) **a)** Determină numărul real a pentru care are loc egalitatea $f(2a) = a^2 + 5$.

(3p) **b)** Reprezentarea geometrică a graficului funcției f intersectează axele Ox și Oy ale sistemului de axe ortogonale în punctele A, respectiv B. Determină distanța de la punctul $C(4, 0)$ la dreapta AB.



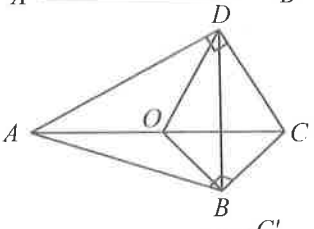
4. În figura alăturată este desenat trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $\measuredangle A = 90°$, $AB = 9$ cm, $CD = 4$ cm și $AD = 6$ cm.



(2p) **a)** Calculează lungimea laturii BC.

(3p) **b)** Arată că diagonalele AC și BD sunt perpendiculare.

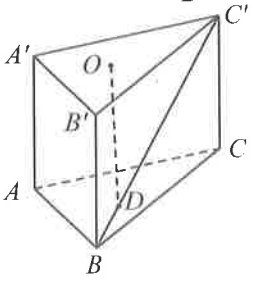
5. În figura alăturată este reprezentat patrulaterul convex $ABCD$, cu $\measuredangle B = \measuredangle D = 90°$, $AC = 12$ cm și $BD = 6$ cm. Punctul O este mijlocul diagonalei AC.



(2p) **a)** Calculează aria triunghiului BOD.

(3p) **b)** Află măsura unghiului BAD.

6. În figura alăturată este reprezentată o prismă triunghiulară regulată cu latura bazei $AB = 12$ cm și muchia laterală $AA' = 9$ cm. Punctul O este centrul bazei $A'B'C'$, iar punctul D este situat pe segmentul BC', astfel încât $BD = 5$ cm.



(2p) **a)** Calculează distanța de la punctul A' la planul (BCC').

(3p) **b)** Demonstrează că dreapta DO este paralelă cu planul (ABB').

✦ TESTUL 12 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Numerele $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^3$ și $2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^2$ au cel mai mare divizor comun $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$, unde x, y, z sunt numere naturale. Suma $x + y + z$ este egală cu:
a) 9; **b)** 10; **c)** 11; **d)** 14.

(5p) **2.** Dacă $\frac{x+1}{5x+1} = 0,(27)$, valoarea lui x este:
a) 7; **b)** 1; **c)** 2; **d)** 4.

(5p) **3.** Dacă $a = \sqrt{6}$ și $b = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, atunci $b^2 + 2a$ este egal cu:
a) $1 + 2\sqrt{6}$; **b)** 5; **c)** 1; **d)** $5\sqrt{6}$.

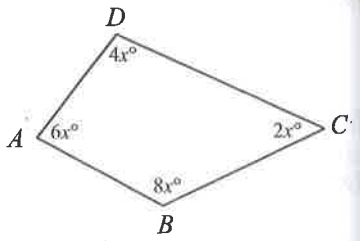
(5p) **4.** Mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |1 - x| \leq 2\}$ scrisă sub formă de interval este:
a) $[-2, 2]$; **b)** $[0, 2]$; **c)** $[0, 3]$; **d)** $[-1, 3]$.

(5p) **5.** Calculând $1 - 2 + 3 - 4 + ... + 99 - 100$, obținem:
a) -5050; **b)** -50; **c)** 50; **d)** 5050.

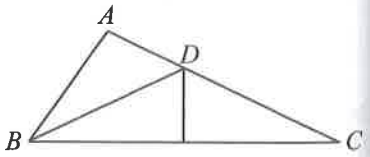
(5p) **6.** Mulțimea soluțiilor ecuației $(x + 3)^2 + 2(x + 1)^2 = 11$ este:
a) $\{-3, -1\}$; **b)** $\{-3, -2\}$; **c)** $\left\{0, \frac{10}{3}\right\}$; **d)** $\left\{-\frac{10}{3}, 0\right\}$.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

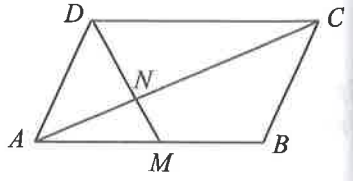
(5p) **1.** În figura alăturată este reprezentat un patrulater convex $ABCD$, cu $\measuredangle A = 6x°$, $\measuredangle B = 8x°$, $\measuredangle C = 2x°$ și $\measuredangle D = 4x°$. Valoarea lui x este egală cu:
a) 36; **b)** 30;
c) 18; **d)** 9.



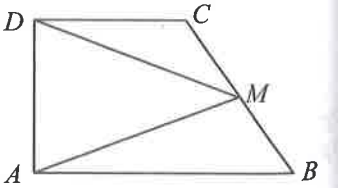
(5p) **2.** În figura alăturată este reprezentat un triunghi ABC cu $AB = 8$ cm și $AC = 12$ cm. Mediatoarea laturii BC intersectează latura AC în punctul D. Perimetrul triunghiului ABD este egal cu:
a) 14 cm; **b)** 20 cm;
c) 22 cm; **d)** 24 cm.



(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat un paralelogram $ABCD$ cu diagonala $AC = 12$ cm. Punctul M este mijlocul segmentului AB, iar N este punctul de intersecție a dreptelor AC și DM. Lungimea segmentului AN este egală cu:
a) 4 cm; **b)** 6 cm;
c) 8 cm; **d)** 10 cm.

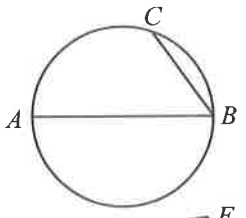


(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat trapezul dreptunghic $ABCD$, cu bazele $AB = 10$ cm și $CD = 4$ cm, iar înălțimea $AD = 6$ cm. Dacă punctul M este mijlocul laturii BC, atunci aria triunghiului AMD este egală cu:
a) 20 cm^2; **b)** 21 cm^2;
c) 42 cm^2; **d)** 60 cm^2.



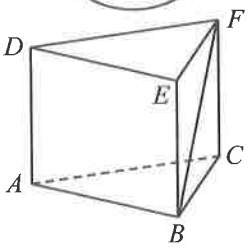
(5p) **5.** În figura alăturată este reprezentat un cerc cu raza $r = 6$ cm. Punctele A, B și C aparțin cercului și $AB = 12$ cm, iar măsura arcului mic BC este de 60°. Măsura unghiului ABC este egală cu:

a) 30°; **b)** 45°;
c) 60°; **d)** 90°.



(5p) **6.** În figura alăturată este desenată o prismă triunghiulară regulată $ABCDEF$ cu $AB = AD$. Măsura unghiului determinat de dreptele AD și BF este egală cu:

a) 30°; **b)** 45°;
c) 60°; **d)** 90°.



SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Trei numere naturale nenule a, b și c îndeplinesc următoarele condiții: a este diferit de 0, b împărțit la a dă câtul 2 și restul 3, iar c este de 4 ori mai mare dacât a.

(2p) **a)** Află cât la sută din c reprezintă numărul a.

(3p) **b)** Află cele trei numere, știind că suma lor este egală cu 87.

2. Se consideră expresia $E(x) = (5x + 1)(x + 6) + (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) - (x^2 + 2)^2 - 30x$, unde $x \in \mathbb{R}$.

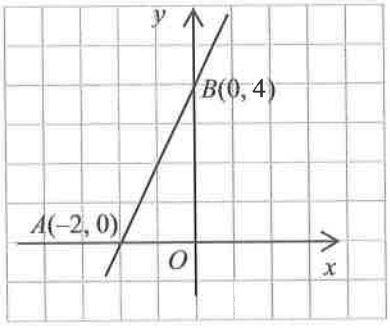
(2p) **a)** Arată că $n^2 < E(n) < (n + 1)^2$, pentru orice număr natural nenul n.

(3p) **b)** Determină toate numerele naturale n pentru care $E(n)$ este pătratul unui număr natural.

3. În figura alăturată este reprezentat graficul unei funcții $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, care trece prin punctele $A(-2, 0)$ și $B(0, 4)$.

(2p) **a)** Determină numerele a și b.

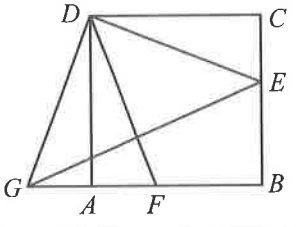
(3p) **b)** Arată că perimetrul triunghiului AOB este mai mic decât 11.



4. În figura alăturată este desenat un pătrat $ABCD$ și punctele E, F, G astfel încât $E \in (BC)$, $F \in (AB)$ și $A \in (BG)$. Se știe că $\measuredangle CDE = 30°$, $\measuredangle ADF = 15°$ și $AG = CE$.

(2p) **a)** Arată că triunghiul DEG este isoscel.

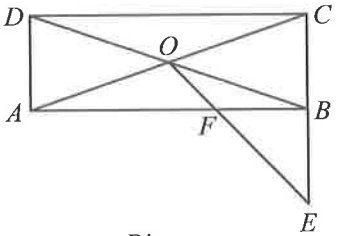
(3p) **b)** Află măsura unghiului determinat de dreptele DF și EG.



5. În figura alăturată este reprezentat un dreptunghi $ABCD$, cu O punctul de intersecție a diagonalelor și laturile $AB = 12$ cm și $BC = 4$ cm. Punctul E este simetricul lui C față de B, iar F este punctul de intersecție a dreptelor AB și EO.

(2p) **a)** Calculează aria triunghiului CEO.

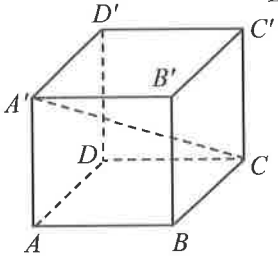
(3p) **b)** Determină măsura unghiului BFC.



6. În figura alăturată este reprezentat un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = BC = 4$ cm și $A'C = 4\sqrt{3}$ cm.

(2p) **a)** Arată că paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

(3p) **b)** Calculează distanța de la punctul B la dreapta $A'C$.



✦ TESTUL 13 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Dintre numerele 21, 18, 25 și 23, numărul cu cei mai mulți divizori întregi este:
a) 21; **b)** 18; **c)** 25; **d)** 23.

(5p) **2.** Dacă a și b sunt două numere reale, astfel încât $a = 25\%b$ și $a + b = 105$, atunci numărul b este egal cu:
a) 21; **b)** 25; **c)** 84; **d)** 100.

(5p) **3.** În tabelul de mai jos sunt înregistrate temperaturile medii zilnice dintr-o săptămână.

Ziua	L	M	M	J	V	S	D
Temperatura	–3°C	–2°C	–5°C	0°C	2°C	0°C	x°C

Dacă temperatura medie din această săptămână a fost –1°C, atunci x este egal cu:
a) –2; **b)** –1; **c)** 0; **d)** 1.

(5p) **4.** Cel mai mic dintre numerele raționale $-\frac{1}{2}$, –0,5(3), –0,(53), –0,53 este:
a) $-\frac{1}{2}$; **b)** –0,5(3); **c)** –0,(53); **d)** –0,53.

(5p) **5.** Dacă $a = 5\sqrt{12} - 2\sqrt{27} - \sqrt{75}$, atunci a^4 este egal cu:
a) 0; **b)** 3; **c)** 9; **d)** 81.

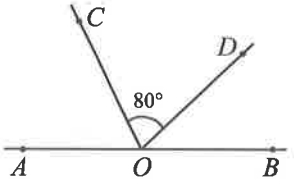
(5p) **6.** De la Iași la Pașcani sunt 80 km. Un biciclist care pleacă din Iași la ora 8:00 și merge cu viteza constantă de 15 km/h, va ajunge la Pașcani la ora:
a) 13:00; **b)** 13:20; **c)** 13:40; **d)** 14:00.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

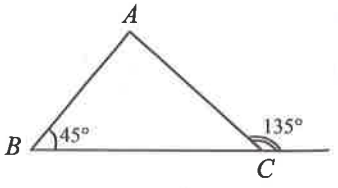
(5p) **1.** În figura alăturată, punctele A, M, N, B, P, Q, C sunt coliniare, în această ordine, iar $AM = MN = NB$ și $BP = PQ = QC$. Dacă $AC = 72$ cm, atunci lungimea segmentului MQ este egală cu:

a) 24 cm; **b)** 36 cm; **c)** 48 cm; **d)** 60 cm.

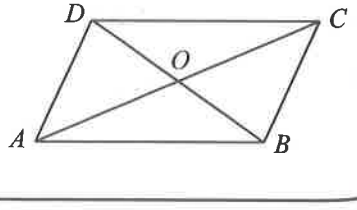
(5p) **2.** În figura alăturată, punctele A, O și B sunt coliniare, în această ordine, iar măsura unghiului COD este egală cu 80°. Măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor AOC și BOD este egală cu:
a) 130°; **b)** 135°;
c) 140°; **d)** 160°.



(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu $\measuredangle ABC = 45°$, $AB = 4$ cm și măsura unghiului exterior din vârful C egală cu 135°. Perimetrul triunghiului ABC este egal cu:
a) 12 cm; **b)** $(4+4\sqrt{2})$ cm;
c) $4(2+\sqrt{2})$ cm; **d)** $12\sqrt{2}$ cm.

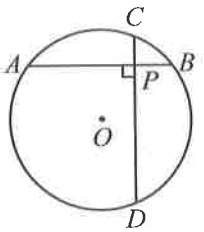


(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat paralelogramul $ABCD$, cu $AB = 12$ cm, $AD = 6$ cm și $\measuredangle BAD = 30°$. Dacă O este punctul de intersecție a diagonalelor AC și BD, atunci aria triunghiului AOB este egală cu:
a) 9 cm^2; **b)** 12 cm^2;
c) 24 cm^2; **d)** 36 cm^2.



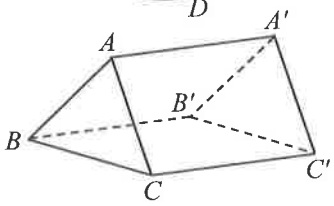
(5p) **5.** În figura alăturată, AB și CD sunt două coarde perpendiculare ale unui cerc cu centrul în O. Cele două coarde se intersectează în punctul P și distanțele de la O la dreptele AB și CD sunt de 3 cm, respectiv 4 cm. Lungimea segmentului OP este egală cu:

a) 3 cm; **b)** 5 cm;
c) 6 cm; **d)** 7 cm.



(5p) **6.** În figura alăturată este reprezentat un cort de campanie $ABCA'B'C'$, în formă de prismă, cu muchiile laterale $AA' = BB' = CC' = 100$ dm și $AB = AC = 25$ dm, $BC = 30$ dm. Se știe că dreapta AA' este perpendiculară pe planul (ABC). Pânza din care este confecționat cortul are aria (aria totală a prismei) egală cu:

a) 8000 dm^2; **b)** 8100 dm^2;
c) 8300 dm^2; **d)** 8600 dm^2.



SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. O echipă de muncitori termină de reparat $\frac{2}{3}$ dintr-un drum în 24 de zile.

(2p) **a)** În câte zile termină echipa de reparat restul drumului?

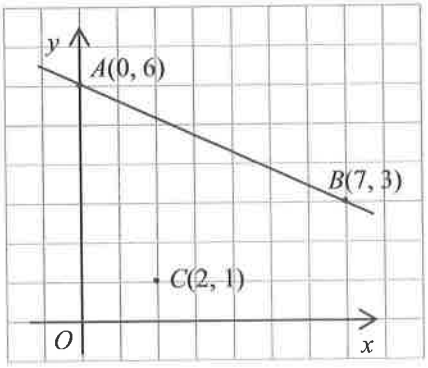
(3p) **b)** În câte zile ar termina echipa de reparat $\frac{3}{4}$ din întreg drumul?

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(1-\frac{1}{x+1}\right)\cdot\frac{x+1}{x^2+1}:\left(\frac{x+3}{4x-4}-\frac{1}{x-1}\right)$, unde $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$.

(2p) **a)** Arată că $E(x) = \frac{4x}{x^2+1}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$.

(3p) **b)** Demonstrează că $-2 \le E(x) \le 2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$.

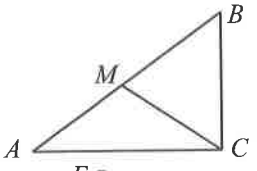
3. În figura alăturată sunt reprezentate punctele $A(0, 6)$, $B(7, 3)$ și $C(2, 1)$ în sistemul de axe de coordonate xOy.



(2p) **a)** Arată că dreapta AB reprezintă graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{42-3x}{7}$.

(3p) **b)** Demonstrează că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.

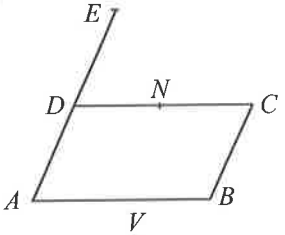
4. În figura alăturată reprezentat triunghiul ABC cu măsurile unghiurilor A, B și C direct proporționale cu 1, 2, respectiv 3. Lungimea laturii BC este egală cu 6 cm.



(2p) **a)** Află măsura unghiului C.

(3p) **b)** Calculează perimetrul triunghiului BMC, știind că M este mijlocul laturii AB.

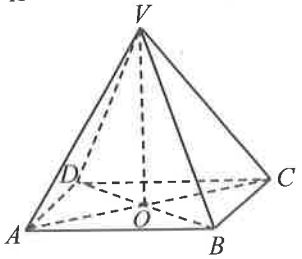
5. În figura alăturată este reprezentat un paralelogram $ABCD$. Punctul N este mijlocul laturii CD, iar punctul E este simetricul lui A față de punctul D.



(2p) **a)** Demonstrează că punctele B, N și E sunt coliniare.

(3p) **b)** Dacă $\mathcal{A}_{BNC} = p\% \cdot \mathcal{A}_{ABE}$, află numărul p.

6. În figura alăturată este reprezentată piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu latura $AB = 15\sqrt{2}$ cm și înălțimea $VO = 20$ cm.



(2p) **a)** Calculează volumul piramidei $VABCD$.

(3p) **b)** Determină tangenta unghiului format de planele (VAC) și (VBC).

✦ TESTUL 14 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $28 - 2 \cdot 8$ este:
a) 28; **b)** 208; **c)** 0; **d)** 12.

(5p) **2.** Dacă $\frac{1}{5}$ dintr-o oră înseamnă n minute, valoarea numărului n este:
a) 20; **b)** 15; **c)** 12; **d)** 10.

(5p) **3.** Patru elevi au calculat media geometrică a numerelor $x = 0{,}875$ și $y = 1\frac{1}{7}$. Rezultatele pe care le-au obținut sunt cele din tabelul următor.

Andrei	Barbu	Carmen	Daniela
0,9	1	1,1	1,7

Rezultatul corect este cel obținut de:
a) Andrei; **b)** Barbu; **c)** Carmen; **d)** Daniela.

(5p) **4.** Dintre următoarele secvențe de numere, cea care conține numai divizori ai lui 48 este:
a) 0, 1, 2, 12, 24; **b)** 3, 4, 6, 12, 36; **c)** 2, 3, 6, 8, 24; **d)** 1, 2, 3, 4, 5.

(5p) **5.** Dintre numerele de mai jos, cel care aparține intervalului $[-1, 0]$ este:
a) $2-\sqrt{3}$; **b)** $3-\sqrt{10}$; **c)** $5-\sqrt{20}$; **d)** $7-\sqrt{70}$.

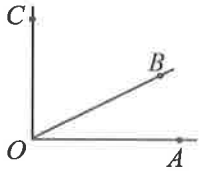
(5p) **6.** Trei robinete cu același debit umplu un bazin în patru ore. Barbu spune că șase robinete de același fel vor umple bazinul în două ore. Afirmația lui Barbu este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele coliniare A, B și C, astfel încât $AB = 4$ cm și $AC = 12$ cm. Lungimea segmentului BC este egală cu:

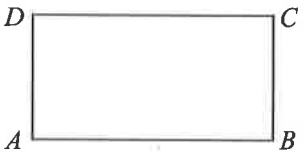
a) 16 cm; **b)** 10 cm;
c) 8 cm; **d)** 6 cm.

(5p) **2.** În figura alăturată sunt reprezentate unghiurile adiacente complementare AOB și BOC, cel de-al doilea având măsura de trei ori mai mare decât primul. Diferența dintre măsurile unghiurilor BOC și AOB este:



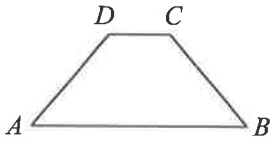
a) 45°; **b)** 60°;
c) 30°; **d)** 67°30′.

(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat schematic un teren agricol, având forma dreptunghiului $ABCD$, cu $AB = 500$ m și $AD = 300$ m. De pe fiecare hectar se recoltează câte 3 tone de cereale. Cantitatea totală de cereale care se recoltează de pe acest teren este:



a) 45 t; **b)** 15 t;
c) 4,5 t; **d)** 450 t.

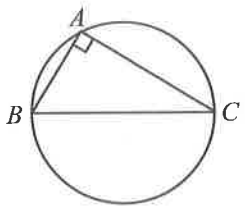
(5p) **4.** În figura alăturată este desenat un trapez isoscel $ABCD$ cu bazele $AB = 10$ cm și $CD = 2$ cm, iar $\measuredangle BAD = 45°$. Lungimea segmentului AD este:



a) 4 cm; **b)** $4\sqrt{2}$ cm;
c) 6 cm; **d)** $6\sqrt{2}$ cm.

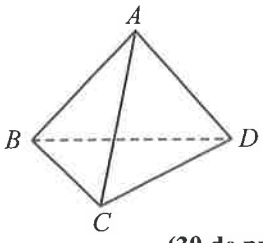
(5p) **5.** În figura alăturată este desenat un triunghi ABC înscris într-un cerc. Se știe că $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm și $\measuredangle A = 90°$. Lungimea razei cercului este egală cu:

a) 5 cm; **b)** 6 cm;
c) 10 cm; **d)** 8 cm.



(5p) **6.** În figura alăturată este reprezentat un tetraedru regulat $ABCD$. Suma lungimilor muchiilor acestuia este 36 cm. Suma ariilor fețelor tetraedrului este:

a) $144\sqrt{3}$ cm^2; **b)** 144 cm^2;
c) 36 cm^2; **d)** $36\sqrt{3}$ cm^2.



SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Într-o livadă se plantează meri și nuci, în total 160 de pomi. În prima zi se plantează 60% din meri și 40% din nuci, iar în a doua zi restul de 76 de pomi.

(2p) **a)** Ce procent din numărul total al pomilor reprezintă pomii plantați în prima zi?

(3p) **b)** Câți meri și câți nuci s-au plantat în livadă?

2. Se consideră expresia $E(x) = x^2 - (x+1)^2 - (x+2)^2 + (x+3)^2$, unde $x \in \mathbb{R}$.

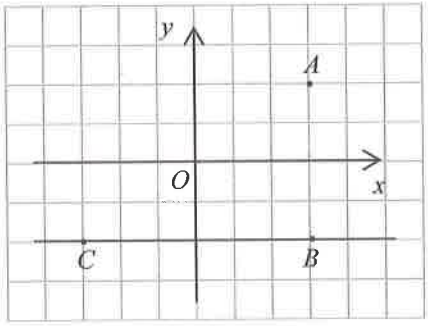
(2p) **a)** Arată că $E(x) = 4$, oricare ar fi numărul real x.

(3p) **b)** Calculează suma $S = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 + \ldots + 37^2 - 38^2 - 39^2 + 40^2$.

3. Într-un sistem de axe ortogonale xOy se consideră punctele: $A(3, 2)$, B este simetricul lui A față de Ox, iar C este simetricul lui A față de originea O.

(2p) **a)** Arată că punctul C are coordonatele $(-3, -2)$.

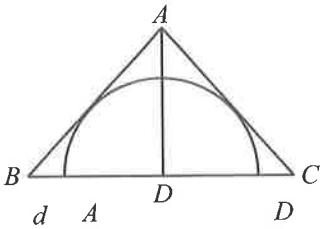
(3p) **b)** Determină legea de corespondență a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, al cărei grafic este dreapta BC.



4. În figura alăturată, semicercul de centru D este tangent laturilor congruente AB și AC ale triunghiului isoscel ABC, iar D aparține segmentului BC.

(2p) **a)** Demonstrează că punctul D este mijlocul laturii BC.

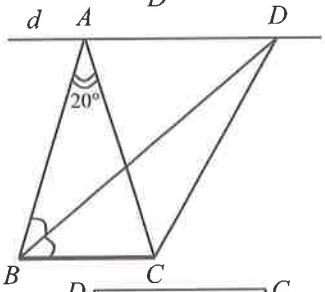
(3p) **b)** Știind că $BC = 30$ cm și $AD = 20$ cm, află lungimea razei semicercului.



5. Un topograf se află în punctul A al unei șosele d, paralelă cu podul BC, ca în figura alăturată. Punctul A este situat la egală distanță de capetele B și C ale podului, iar topograful vede podul sub unghiul BAC de 20°. Apoi topograful se deplasează pe șosea în punctul D, astfel încât BD este bisectoarea unghiului ABC.

(2p) **a)** Arată că segmentele AB și AD au lungimi egale.

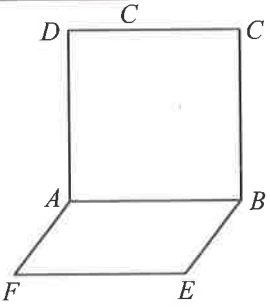
(3p) **b)** Determină măsura unghiului BDC sub care topograful vede podul din noua poziție.



6. Pătratele $ABCD$ și $ABEF$ sunt situate în plane perpendiculare, ca în figura alăturată.

(2p) **a)** Știind că $AB = 8$ cm, află lungimea segmentului BD.

(3p) **b)** Determină măsura unghiului format de dreptele BD și AE.



✦ TESTUL 15 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Cel mai mare divizor prim al numărului 156 este:
a) 2; **b)** 3; **c)** 39; **d)** 13.

(5p) **2.** Dacă $x = 8$ și $y = 12$, raportul numerelor x și y are aceeași valoare cu raportul:
a) $\frac{16}{12}$; **b)** $\frac{4}{8}$; **c)** $\frac{16}{36}$; **d)** $\frac{2}{3}$.

(5p) **3.** Cel mai mic număr natural care nu aparține mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid -3 \leq x < 2\}$ este:
a) –4; **b)** 2; **c)** 0; **d)** 3.

(5p) **4.** O pereche ordonată de numere reale (a, b) care verifică simultan condițiile $a > b$ și $|a| < |b|$ este:
a) (2, 0); **b)** (–3, –10); **c)** (0, 3); **d)** (–5, 14).

(5p) **5.** Patru elevi au aflat valoarea parametrului real m pentru care numărul $1-\sqrt{2}$ este soluție a ecuației $x^2 - x + m = 0$. Rezultatele obținute sunt trecute în tabelul următor:

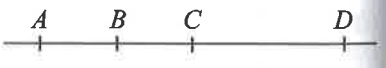
David	Miruna	Mihai	Diana
$2-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}-2$	$2\sqrt{2}+1$	$-\sqrt{2}-3$

Elevul care a obținut rezultatul corect este:
a) Diana; **b)** David; **c)** Mihai; **d)** Miruna.

(5p) **6.** Mihai are 24 de colegi în clasă. În catalog, numărul colegilor aflați înaintea sa reprezintă o treime din numărul colegilor aflați după el. Propoziția „Mihai este al șaptelea la catalog." este:
a) adevărată; **b)** falsă.

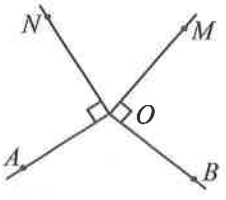
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată, punctul C este simetricul punctului A față de punctul B, iar D este simetricul punctului A față de punctul C. Dacă $BD = 9$ cm, lungimea segmentului AD este egală cu:



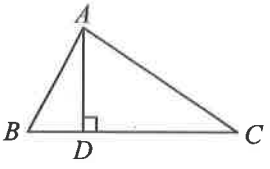
a) 3 cm; **b)** 6 cm;
c) 12 cm; **d)** 4 cm.

(5p) **2.** În figura alăturată este reprezentat unghiul AOB cu măsura egală cu 150°. În exteriorul său s-au construit semidreptele $OM \perp OB$ și $ON \perp OA$. Măsura unghiului MON este egală cu:



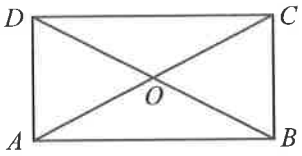
a) 40°; **b)** 120°;
c) 30°; **d)** 180°.

(5p) **3.** Fie ABC un triunghi oarecare, AD este perpendiculară pe BC, $D \in BC$, $AD = 4\sqrt{3}$ cm, $BC = 5$ cm și $BD = 1$ cm. Perimetrul triunghiului ABC este egal cu:



a) 15 cm; **b)** 20 cm;
c) $(15+4\sqrt{3})$ cm; **d)** $10\sqrt{3}$ cm.

(5p) **4.** În figura alăturată, $ABCD$ este un dreptunghi, O este punctul de intersecție a diagonalelor, $AC = 6$ cm și $\measuredangle DOC = 120°$. Aria dreptunghiului este egală cu:



a) $9\sqrt{3}$ cm²; **b)** $(6+6\sqrt{3})$ cm²;
c) 12 cm²; **d)** 36 cm².

(5p) **5.** Raza cercului circumscris unui pătrat cu latura de 6 cm are lungimea egală cu:
a) $6\sqrt{2}$ cm; **b)** 12 cm; **c)** 3 cm; **d)** $3\sqrt{2}$ cm.

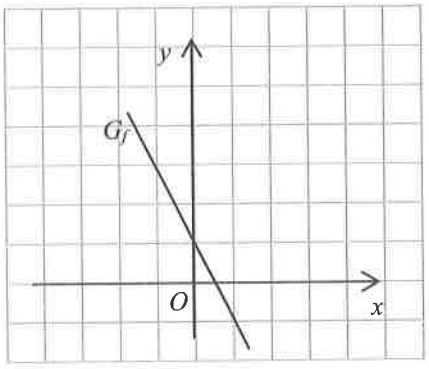
(5p) **6.** Un lingou metalic, având forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 20 cm, 30 cm, respectiv 40 cm, se topește și 25% din metalul obținut se transformă în piese cu formă de cub având latura de 5 mm. Știind că nu sunt pierderi de material, numărul pieselor obținute este:
a) 48000; **b)** 24000; **c)** 16000; **d)** 72000.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Un aprozar a vândut în prima zi o treime din întreaga cantitate de marfă pe care a primit-o, iar în a doua zi a vândut o treime din rest.
(2p) **a)** În care dintre primele două zile s-a vândut o cantitate mai mare de marfă? Justifică răspunsul.
(3p) **b)** Dacă a doua zi s-au vândut 180 kg de marfă, află câte kilograme de marfă s-au vândut în prima zi.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(4x - \frac{1}{1-x}\right) : \frac{2x^2+x-1}{2x^3+x^2-2x-1}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

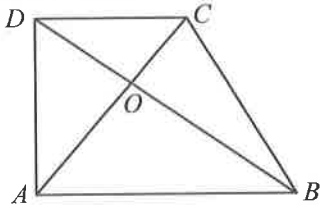
(2p) **a)** Arată că $2x^2 + x - 1 = (x+1)(2x-1)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$.



(3p) **b)** Rezolvă în mulțimea numerelor întregi inecuația $E(x) \leq 3$.

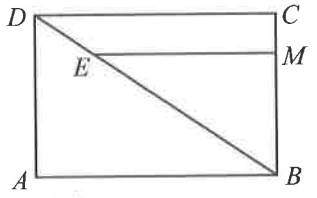
3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - 2x$.
(2p) **a)** Calculează $f(-1) - f(1)$.
(3p) **b)** Se consideră punctele A și B situate pe reprezentarea geometrică a graficului funcției f, astfel încât A are abscisa egală cu 1 și B are ordonata egală cu 7. Află coordonatele mijlocului segmentului AB.

4. În figura alăturată este reprezentat un trapez dreptunghic cu bazele AB și CD de lungimi 16 cm, respectiv 9 cm, iar $\measuredangle A = \measuredangle D = 90°$. Diagonalele AC și BD se intersectează în punctul O și sunt perpendiculare.



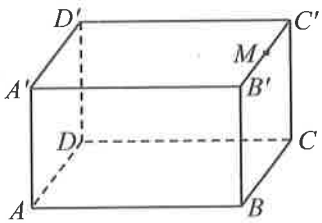
(2p) **a)** Arată că $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.
(3p) **b)** Determină aria trapezului $ABCD$.

5. Fie $ABCD$ un dreptunghi având $AD = 4$ cm și $AB = 4\sqrt{3}$ cm. Punctul E aparține segmentului DB, cu $BE = 3DE$, iar paralela dusă prin E la DC intersectează latura BC în punctul M.



(2p) **a)** Arată că $EM = 3\sqrt{3}$ cm.
(3p) **b)** Demonstrează că $AE \leq AF$, oricare ar fi punctul F pe segmentul BD.

6. În figura alăturată, $ABCDA'B'C'D'$ este o prismă patrulateră regulată, iar M este mijlocul muchiei $B'C'$. Se știe că $AB = 8$ cm și $BM = 5$ cm.



(2p) **a)** Determină aria totală a prismei.
(3p) **b)** Demonstrează că distanța de la punctul M la planul BDD' este egală cu $2\sqrt{2}$ cm.

✦ TESTUL 16 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Jumătatea numărului 4^6 este numărul:
a) 2^6; **b)** 4^3; **c)** 2^3; **d)** 2048.

(5p) **2.** Dacă 20% din n este 40, atunci 30% din n este:
a) 50; **b)** 30; **c)** 60; **d)** 90.

(5p) **3.** Suma numerelor întregi negative din intervalul $(-3, 2]$ este egală cu:
a) -6; **b)** -3; **c)** 0; **d)** 3.

(5p) **4.** Dintre următoarele seturi de numere, cel scris în ordine descrescătoare este:
a) $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}$; **b)** $\frac{1}{2}, \frac{7}{12}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$; **c)** $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 1$; **d)** $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{7}{12}, \frac{1}{2}$.

(5p) **5.** Eliza, Emilia, Eduard și Eugen au avut de aflat media geometrică a numerelor $a = \frac{4}{3+\sqrt{5}}$ și $b = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{2}$.

Rezultatele obținute sunt trecute în tabelul următor:

Eliza	Emilia	Eduard	Eugen
3	1	2	$2\sqrt{5}$

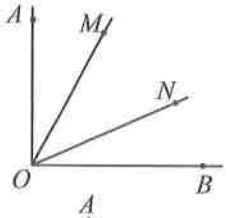
Copilul care a obținut rezultatul corect este:
a) Eliza; **b)** Emilia; **c)** Eduard; **d)** Eugen.

(5p) **6.** Se consideră intervalul $I = \left(1, \frac{3}{2}\right)$. Propoziția „Numărul $\sqrt{2}$ aparține intervalului I." este:
a) adevărată; **b)** falsă.

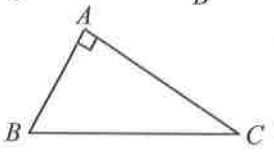
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Pe o semidreaptă cu originea în punctul A se consideră punctele B, C, D și E, astfel încât $AC = 2AB = 3AD = 4AE$. Dintre cele patru puncte, cel mai apropiat de originea semidreptei este punctul:
a) E; **b)** C;
c) D; **d)** B.

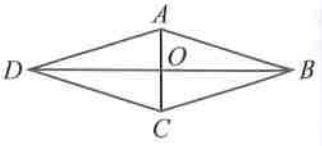
(5p) **2.** În figura alăturată, semidreptele OM și ON împart unghiul drept AOB în trei unghiuri congruente. Măsura unghiului MOB este egală cu:
a) 30°; **b)** 60°;
c) 90°; **d)** 45°.



(5p) **3.** Triunghiul dreptunghic ABC are ipotenuza $BC = 12$ cm și $\measuredangle C = 30°$. Lungimea proiecției ortogonale a catetei AB pe ipotenuză este egală cu:
a) 6 cm; **b)** 3 cm;
c) 9 cm; **d)** 12 cm.



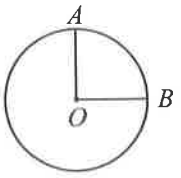
(5p) **4.** Rombul $ABCD$ are perimetrul egal cu 40 cm, $AC \cap BD = \{O\}$ și perimetrul triunghiului AOB este egal cu 24 cm. Suma lungimilor diagonalelor este egală cu:
a) 14 cm; **b)** 96 cm;
c) 28 cm; **d)** 24 cm.



(5p) **5.** Dacă OA și OB sunt două raze perpendiculare ale aceluiași cerc și lungimea arcului mic AB este egală cu 5π cm, atunci lungimea razei cercului este egală cu:

a) 10 cm; **b)** 5 cm;

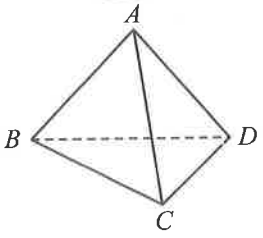
c) 20 cm; **d)** $5\sqrt{2}$ cm.



(5p) **6.** Aria laterală a unui tetraedru regulat $ABCD$ este egală cu $27\sqrt{3}$ cm^2. Suma lungimilor muchiilor care pornesc din vârful A este egală cu:

a) $9\sqrt{3}$ cm; **b)** 18 cm;

c) 12 cm; **d)** $18\sqrt{3}$ cm.



SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Un elev se pregătește pentru Evaluarea Națională la matematică rezolvând o fișă de probleme. În prima zi a rezolvat $\frac{2}{5}$ din numărul problemelor și încă 5 probleme, a doua zi $\frac{3}{5}$ din rest, iar în ultima zi cele 22 de probleme rămase.

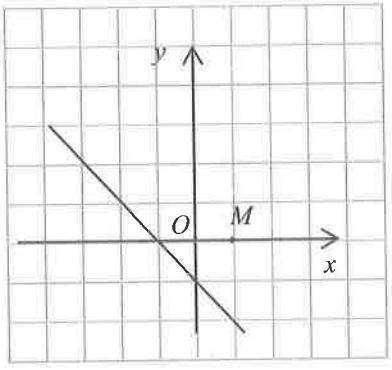
(2p) **a)** Este posibil ca a doua zi să fi rezolvat 30 de probleme? Justifică răspunsul.

(3p) **b)** Câte probleme erau pe fișă?

2. Se consideră expresia $E(x) = (x-1)^2 - x(x+2) + (x+3)^2$, unde $x \in \mathbb{R}$.

(2p) **a)** Arată că $E(x) = x^2 + 2x + 10$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

(3p) **b)** Află valoarea maximă a expresiei $\frac{1}{E(x)}$, unde $x \in \mathbb{R}$.



3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x - 1$.

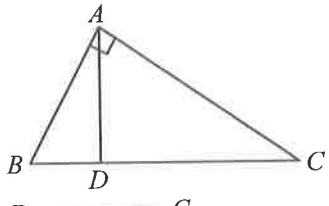
(2p) **a)** Arată că $f(-2) \cdot f(0) = -1$.

(3p) **b)** Determină distanța de la punctul $M(1, 0)$ la reprezentarea grafică a funcției f.

4. În figura alăturată, ABC este un triunghi dreptunghic cu $\sphericalangle A = 90°$, având înălțimea $AD = 4\sqrt{2}$ cm, $D \in BC$ și $\mathcal{A}_{ADC} = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABD}$.

(2p) **a)** Arată că $BC = 12$ cm.

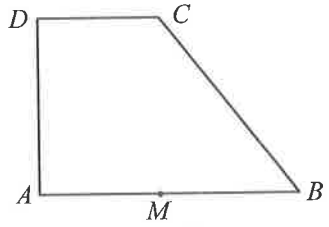
(3p) **b)** Demonstrează că $\sin(\sphericalangle BCA) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



5. În figura alăturată este reprezentat un trapez dreptunghic $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $CD = 6$ cm, $BC = 12$ cm și $\sphericalangle ABC = 60°$. Paralela prin D la dreapta BC intersectează latura AB în punctul M.

(2p) **a)** Arată că punctul M este mijlocul segmentului AB.

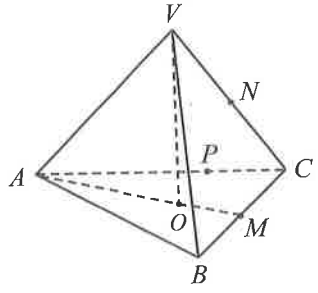
(3p) **b)** Demonstrează că aria trapezului $ABCD$ este mai mare de 90 cm^2.



6. În figura alăturată, $VABC$ este o piramidă triunghiulară regulată. Punctele M și N sunt mijloacele muchiilor BC, respectiv CV, $MN = 3{,}5$ cm, iar înălțimea piramidei este $VO = 1$ cm. Punctul P aparține laturii AC, astfel încât $AP = 3PC$.

(2p) **a)** Arată că $\mathcal{A}_{ABC} = 36\sqrt{3}$ cm^2.

(3p) **b)** Demonstrează că planele (MNP) și (VOB) sunt paralele.



✦ TESTUL 17 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Dintre următoarele secvențe, cea formată numai din numere prime este:
a) 1, 2, 3, 5; **b)** 2, 3, 4, 5; **c)** 5, 7, 9, 11; **d)** 11, 13, 17, 19.

(5p) **2.** Fracția supraunitară din mulțimea $\left\{\frac{3}{7}, \frac{5}{9}, \frac{6}{5}, \frac{11}{12}\right\}$ este:
a) $\frac{5}{9}$; **b)** $\frac{6}{5}$; **c)** $\frac{3}{7}$; **d)** $\frac{11}{12}$.

(5p) **3.** Rezultatul calculului $-12 + (3 - 4 \cdot 2) \cdot |-1|$ este:
a) 17; **b)** -7; **c)** -17; **d)** 7.

(5p) **4.** Patru elevi, Andrei, Cătălin, Eduard și George au avut de aflat media aritmetică a numerelor reale x și y care verifică relațiile $x^2 - y^2 = 16$ și $x - y = 2$. Rezultatele obținute sunt trecute în tabelul alăturat.

Andrei	Cătălin	Eduard	George
4	8	6	9

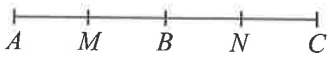
Elevul care a obținut rezultatul corect este:
a) Cătălin; **b)** George; **c)** Andrei; **d)** Eduard.

(5p) **5.** Scriind sub formă de interval mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1 \text{ și } x < 3\}$ obținem:
a) $A = (0, 2)$; **b)** $A = [-1, 3]$; **c)** $A = (-\infty, -1)$; **d)** $A = (-1, 3)$.

(5p) **6.** Fie a un număr real și intervalul $I = (-\infty, 1)$. Propoziția „Există numere reale a pentru care numărul $n = 1 + a^2$ aparține intervalului I." este:
a) adevărată; **b)** falsă.

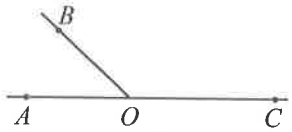
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată, punctul M este mijlocul segmentului AB, N este mijlocul segmentului BC, iar C este simetricul punctului A față de punctul B. Valoarea raportului dintre lungimile segmentelor AB și MC este:



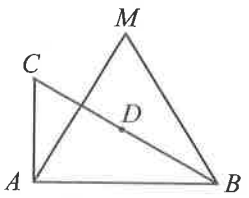
a) $\frac{2}{3}$; **b)** $\frac{3}{2}$; **c)** 1; **d)** 2.

(5p) **2.** În figura alăturată, unghiul AOB are măsura egală cu 30°, iar OC este semidreapta opusă semidreptei OA. Măsura unghiului BOC este egală cu:



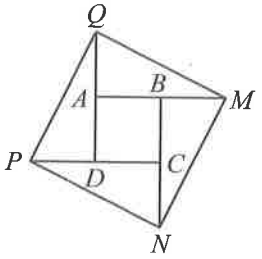
a) 60°; **b)** 120°; **c)** 150°; **d)** 180°.

(5p) **3.** În figura alăturată, ABC este un triunghi dreptunghic cu $\measuredangle A = 90°$, $\measuredangle B = 30°$, iar ABM este un triunghi echilateral, punctele M și C fiind de aceeași parte a dreptei AB. Punctul D este mijlocul segmentului BC, iar $AD = 6$ cm. Perimetrul patrulaterului $ADMC$ este egal cu:



a) 12 cm; **b)** 24 cm; **c)** 36 cm; **d)** 20 cm.

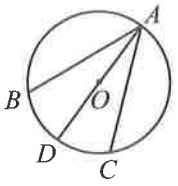
(5p) **4.** În figura alăturată, $ABCD$ este un pătrat cu latura de 2 cm. Punctul M este simetricul punctului A față de B, N este simetricul punctului B față de C, P este simetricul punctului C față de D și Q este simetricul punctului D față de A. Aria patrulaterului $MNPQ$ este egală cu:



a) 16 cm²; **b)** 18 cm²; **c)** 20 cm²; **d)** 40 cm².

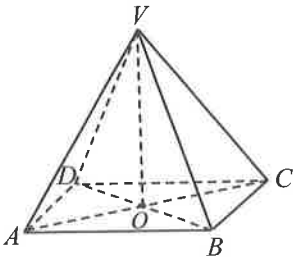
(5p) **5.** În figura alăturată este reprezentat un cerc. Diametrul AD este bisectoarea unghiului BAC cu măsura de $40°$. Măsura unghiului OBD este egală cu:

a) $20°$; **b)** $70°$;
c) $40°$; **d)** $160°$.



(5p) **6.** În figura alăturată, $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată, cu muchia bazei $BC = 6$ cm. Se secționează piramida cu un plan paralel cu baza, situat la o treime din înălțime față de bază. Aria secțiunii este egală cu:

a) $8\ cm^2$; **b)** $16\ cm^2$;
c) $4\ cm^2$; **d)** $18\ cm^2$.



SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. În urmă cu doi ani, vârsta mamei era de cinci ori mai mare decât vârsta fiicei. Peste șase ani, vârsta fiicei va fi de trei ori mai mică decât vârsta mamei.

(2p) **a)** Vârsta mamei în prezent poate fi egală cu 40 de ani? Justifică răspunsul.

(3p) **b)** Determină vârsta actuală a fiicei.

2. Se consideră expresia $E(x) = (2x-1)^2 + (1 - x\sqrt{3})(x\sqrt{3} + 1) + 2$, unde $x \in \mathbb{R}$.

(2p) **a)** Arată că $E(x) = (x-2)^2$, pentru orice număr real x.

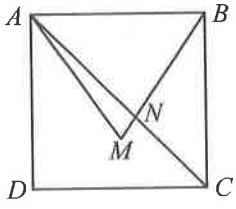
(3p) **b)** Găsește valorile naturale ale lui t pentru care $E(\sqrt{3}) + t\sqrt{3}$ este număr natural.

3. Fie $x = \left(\frac{5}{\sqrt{8}} - \frac{7}{\sqrt{2}}\right) : \frac{6}{\sqrt{2}}$ și $y = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{80}}\right) : \frac{1}{\sqrt{5}}$.

(2p) **a)** Arată că $x = -\frac{3}{4}$.

(3p) **b)** Demonstrează că $x + y$ este număr natural.

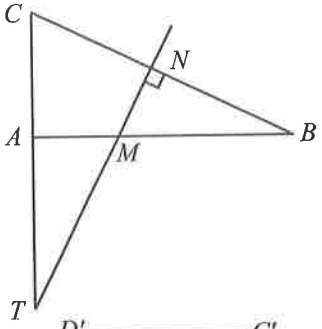
4. În figura alăturată, $ABCD$ este un pătrat având centrul O și MAB este un triunghi echilateral. Segmentele AC și MB se intersectează în punctul N.



(2p) **a)** Demonstrează că triunghiul MNC este isoscel.

(3p) **b)** Stabilește dacă punctele M, O și G sunt coliniare, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABM.

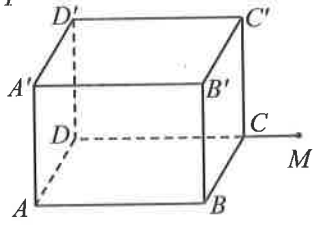
5. În figura alăturată, ABC este un triunghi dreptunghic având catetele $AB = 8$ cm și $AC = 6$ cm. Mediatoarea segmentului BC este NM, unde $N \in BC$, iar $M \in AB$ și intersectează dreapta AC în punctul T.



(2p) **a)** Demonstrează că $\mathcal{P}_{MBC} = 22{,}5$ cm.

(3p) **b)** Arată că $CM \perp TB$.

6. În figura alăturată este reprezentat un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ având $AB = 3\sqrt{3}$ cm, $AA' = 2\sqrt{3}$ cm și volumul egal cu $54\ cm^3$. Prelungim semidreapta DC cu segmentul $CM = \frac{DC}{3}$.



(2p) **a)** Arată că diagonala paralelipipedului este mai mică decât 7 cm.

(3p) **b)** Află distanța de la punctul M la planul (BDD').

✦ TESTUL 18 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Suma primelor trei zecimale ale numărului în care se transformă fracția $\frac{7}{6}$ este egală cu:

a) 6; **b)** 166; **c)** 18; **d)** 13.

(5p) **2.** În tabelul alăturat sunt trecute cantitățile de legume cu care a venit un agricultor la piață. Legumele care reprezintă 40% din cantitatea totală de marfă cu care a venit agricultorul sunt:

a) ardeii; **b)** vinetele;
c) cartofii; **d)** castraveții.

ardei	40 kg
cartofi	60 kg
castraveți	20 kg
vinete	30 kg

(5p) **3.** Suma dintre cel mai mare număr întreg negativ de două cifre și cel mai mic număr natural de două cifre este:

a) -1; **b)** 0; **c)** 1; **d)** 3.

(5p) **4.** Dintre numerele $\frac{10}{9}, \frac{11}{10}, \frac{12}{11}$ și $\frac{13}{12}$, cel mai mare este numărul:

a) $\frac{13}{12}$; **b)** $\frac{10}{9}$; **c)** $\frac{12}{11}$; **d)** $\frac{11}{10}$.

(5p) **5.** Claudia, Crina, Costel și Cristi au avut de efectuat calculul: $\frac{8}{\sqrt{2}} - \sqrt{18} + |\sqrt{2} - 2|$. Rezultatele obținute sunt trecute în tabelul alăturat. Copilul care a obținut rezultatul corect este:

Claudia	**Crina**	**Costel**	**Cristi**
$2\sqrt{2}$	-2	2	0

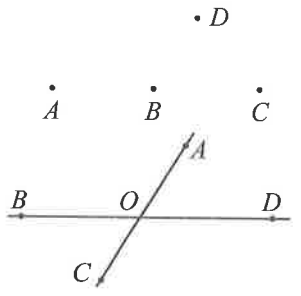
a) Cristi; **b)** Crina; **c)** Costel; **d)** Claudia.

(5p) **6.** Ioana are 14 ani, iar fratele ei are cu 10 ani mai puțin. Ioana afirmă: „Peste un an, vârsta mea va fi de trei ori mai mare decât vârsta fratelui meu". Afirmația Ioanei este:

a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată, A, B, C sunt puncte coliniare, iar D este un punct exterior dreptei AC. Numărul maxim de segmente care au capetele în două dintre cele patru puncte este:

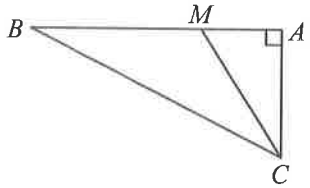


a) 2; **b)** 6;
c) 3; **d)** 4.

(5p) **2.** În figura alăturată, dreptele AC și BD sunt concurente în punctul O. Măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor AOD și BOC este egală cu:

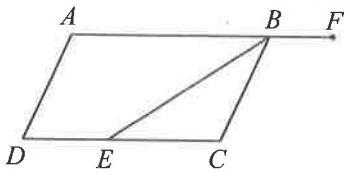
a) 150°; **b)** 0°;
c) 180°; **d)** 90°.

(5p) **3.** În figura alăturată, ABC este un triunghi dreptunghic în care unghiul B are măsura de 30°, iar lungimea bisectoarei CM, $M \in AB$, este egală cu 8 cm. Lungimea ipotenuzei BC este egală cu:



a) 16 cm; **b)** $2\sqrt{3}$ cm;
c) 12 cm; **d)** $8\sqrt{3}$ cm.

(5p) **4.** În figura alăturată, $ABCD$ este un paralelogram. Semidreapta BE este bisectoarea unghiului ABC, $E \in DC$, iar A, B, F sunt puncte coliniare. Știind că măsura unghiului EBF este egală cu 160°, măsura unghiului BAD este egală cu:

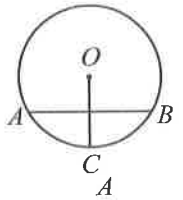


a) 140°; **b)** 40°;
c) 160°; **d)** 20°.

(5p) **5.** În cercul cu raza de 6 cm din figura alăturată, coarda AB este mediatoare a razei OC. Lungimea arcului mic AC este egală cu:

a) $60°$; **b)** 2π;

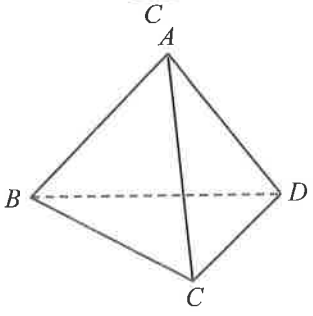
c) 3π; **d)** $120°$.



(5p) **6.** În figura alăturată, $ABCD$ este un tetraedru regulat care are suma lungimilor muchiilor egală cu $6\sqrt{6}$ cm. Distanța de la punctul A la planul BCD este egală cu:

a) 1 cm; **b)** 2 cm;

c) $2\sqrt{6}$ cm; **d)** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm.



SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Două kilograme de cireșe și un kilogram de roșii costă 21 de lei. Un kilogram de cireșe și două kilograme de roșii costă 18 lei.

(2p) **a)** Este posibil ca un kilogram de roșii și un kilogram de cireșe să coste 14 lei? Justifică răspunsul.

(3p) **b)** Determină prețul unui kilogram de cireșe.

2. Se consideră expresia $E(x) = (x-1)^2 + (x+2)^2 + 2(3+x)(3-x)$, unde $x \in \mathbb{R}$.

(2p) **a)** Arată că $E(x) = 2x + 23$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

(3p) **b)** Verifică egalitatea $E(\sqrt{8}) - E(\sqrt{2}) = E(\sqrt{18}) - E(\sqrt{8})$.

3. Se consideră numerele $x = \left(\frac{6}{\sqrt{63}} - \frac{4}{\sqrt{112}} + \frac{6}{\sqrt{28}}\right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^{-1}$ și $y = 2^{3^3} \cdot 4^3 : 8^{10}$.

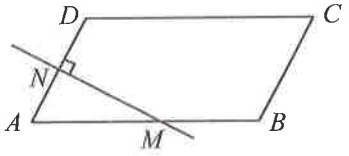
(2p) **a)** Arată că $x = 2$.

(3p) **b)** Demonstrează că media geometrică a numerelor x și y este număr natural pătrat perfect.

4. În figura alăturată, $ABCD$ este un paralelogram cu $BC = 8$ cm și $\measuredangle A = 60°$. Mediatoarea segmentului AD este MN, unde $N \in AD$ și $M \in AB$, iar semidreapta CM este bisectoarea unghiului BCD.

(2p) **a)** Demonstrează că perimetrul paralelogramului $ABCD$ este egal cu 48 cm.

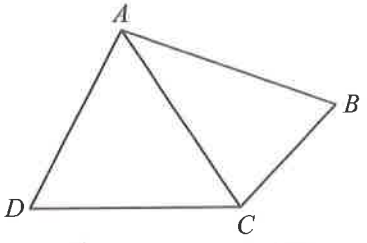
(3p) **b)** Determină distanța de la punctul M la dreapta BC.



5. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $AB = AC = AD$, $DC = 6$ cm, $\measuredangle ABC = 75°$ și $\measuredangle BAD = 90°$. Notăm cu G_1 și G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor ADC, respectiv ABC.

(2p) **a)** Demonstrează că $\mathcal{A}_{ADC} = 9\sqrt{3}$ cm^2.

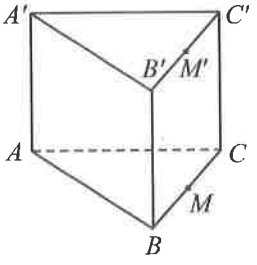
(3p) **b)** Arată că $G_1G_2 = 2\sqrt{2}$ cm.



6. În figura alăturată este reprezentată o prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, având $AA' = 6\sqrt{3}$ cm și aria laterală egală cu $216\sqrt{3}$ cm^2. Punctele M și M' sunt mijloacele muchiilor BC, respectiv $B'C'$.

(2p) **a)** Demonstrează că $AM' \perp A'M$.

(3p) **b)** Determină măsura unghiului format de dreapta BM' cu planul (MAA').



✦ TESTUL 19 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Cel mai mare număr natural care împărțit la 4 dă câtul egal cu 19 este:
a) 76; **b)** 77; **c)** 78; **d)** 79.

(5p) **2.** Un telefon costă 120 de lei. Prețul acestuia se mărește cu 10 lei. Noul preț este:
a) 132 de lei; **b)** 130 de lei; **c)** 1200 de lei; **d)** 12 lei.

(5p) **3.** Notele obținute de elevii unei clase la teza la matematică sunt prezentate în tabelul următor.

Nota	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Numărul de elevi	2	1	3	6	8	3	2	5

Numărul elevilor care au obținut cel puțin nota 6, dar cel mult nota 9 este egal cu:
a) 11; **b)** 17; **c)** 19; **d)** 13.

(5p) **4.** Numărul cu $\frac{1}{3}$ mai mare decât diferența numerelor $\frac{3}{4}$ și $\frac{5}{6}$ este egal cu:
a) $\frac{1}{4}$; **b)** $\frac{5}{12}$; **c)** $\frac{1}{3}$; **d)** $\frac{7}{12}$.

(5p) **5.** Media geometrică a numerelor $\sqrt{24}$ și $3\sqrt{6}$ este egală cu:
a) 3; **b)** 4; **c)** $\sqrt{6}$; **d)** 6.

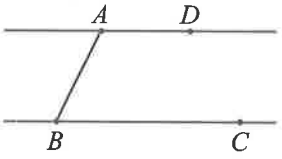
(5p) **6.** Maria afirmă: „Fracția $\frac{105}{119}$ este ireductibilă". Afirmația Mariei este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Pe segmentul AB considerăm punctele $A_1, A_2, ..., A_9$, astfel încât $AA_1 = A_1A_2 = ... = A_9B$, ca în figura de mai jos.
Valoarea raportului $\frac{A_2A_6}{AB}$ este:

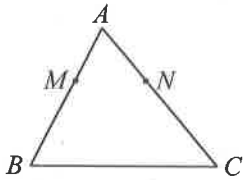
a) $\frac{1}{3}$; **b)** $\frac{2}{5}$; **c)** $\frac{4}{9}$; **d)** $\frac{1}{2}$.

(5p) **2.** În figura alăturată, dreptele AD și BC sunt paralele. Dacă $\measuredangle DAB = 3x - 10°$ și $\measuredangle ABC = x + 30°$, atunci x are valoarea:



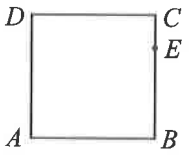
a) 30°; **b)** 40°;
c) 50°; **d)** 20°.

(5p) **3.** Fie ABC un triunghi, iar punctele M și N sunt puncte situate pe laturile AB, respectiv AC. Dacă $AM = 4$ cm, $MB = 6$ cm, $BC = 15$ cm și $\frac{AN}{NC} = \frac{2}{3}$, lungimea segmentului MN este:



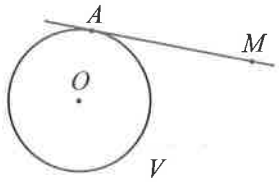
a) 5 cm; **b)** 7 cm;
c) 6 cm; **d)** 10 cm.

(5p) **4.** În figura alăturată, $ABCD$ este un pătrat cu latura $AB = 20$ cm, iar E este un punct pe latura BC, astfel încât $BE = 15$ cm. Aria triunghiului AED este egală cu:



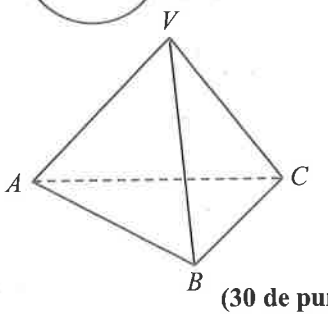
a) 100 cm²; **b)** 150 cm²;
c) 200 cm²; **d)** 250 cm².

(5p) **5.** În figura alăturată, dreapta MA este tangentă cercului $\mathcal{C}(O, R)$. Știind că $R = 3$ cm, iar lungimea segmentului MO este egală cu 5 cm, lungimea segmentului MA este:



a) 2 cm; **b)** $\sqrt{34}$ cm;
c) 3 cm; **d)** 4 cm.

(5p) **6.** În figura alăturată, $VABC$ este o piramidă triunghiulară regulată cu baza ABC și fețele laterale triunghiuri dreptunghice în V. Dacă $AB = 6$ cm, atunci aria totală a piramidei $VABC$ este egală cu:



a) $9(3+\sqrt{3})$ cm²; **b)** 27 cm²;
c) $9(3+\sqrt{2})$ cm²; **d)** $9\sqrt{3}$ cm².

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

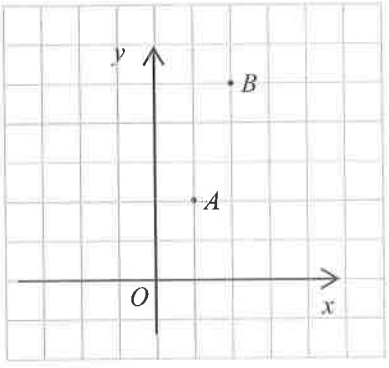
1. Se consideră două numere naturale a, b și fracția $\frac{7a+5b}{84}$.

(2p) **a)** Stabilește dacă pentru $a = 7$ și $b = 5$ fracția este echiunitară.
(3p) **b)** Determină a și b știind că fracția dată este echiunitară și $a + b$ are valoare maximă.

2. Se consideră expresia $E(x) = (2 - 3x)^2 - 2(1 - 2x)(x + 3) - (2x - 1)(2x + 1) + 5x + 1$, unde $x \in \mathbb{R}$.

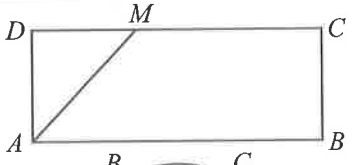
(2p) **a)** Arată că $E(x) = 9x^2 + 3x$.
(3p) **b)** Demonstrează că $E(n)$ se divide cu 6 pentru orice număr natural n.

3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$ și punctele $A(1, 2)$, $B(2, 5)$.



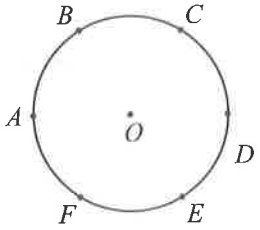
(2p) **a)** Arată că punctele A și B sunt situate pe graficul funcției f.
(3p) **b)** Dacă A', B' sunt proiecțiile punctelor A și B pe axa Ox, calculează aria patrulaterului $AA'B'B$.

4. În figura alăturată, $ABCD$ este un dreptunghi cu $AB = (2+2\sqrt{3})$ cm și $BC = 2$ cm. Bisectoarea unghiului BAD intersectează latura CD în punctul M.



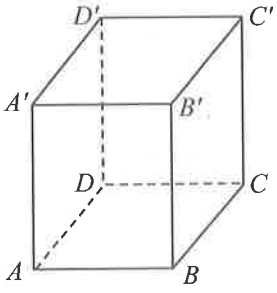
(2p) **a)** Arată că triunghiul ADM este isoscel.
(3p) **b)** Determină lungimea segmentului MB.

5. În figura alăturată, punctele A, B, C, D, E și F sunt situate pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$ și împart cercul în șase arce egale.



(2p) **a)** Arată că punctele A, O și D sunt coliniare.
(3p) **b)** Dacă $AD = 6$ cm, calculează perimetrul triunghiului ACE.

6. Se consideră paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ din figura alăturată, cu dimensiunile $AB = 5$ cm, $BC = 4$ cm și $CC' = 12$ cm.



(2p) **a)** Arată că volumul paralelipipedului este egal cu 240 cm³.
(3p) **b)** Calculează sinusul unghiului format de dreptele AB' și CC'.

✦ TESTUL 20 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Numărul 238 este un multiplu al numărului:
a) 12; **b)** 13; **c)** 14; **d)** 19.

(5p) **2.** Valoarea lui x care verifică egalitatea $\frac{x}{15}=\frac{12}{20}$ este egală cu:
a) 25; **b)** 16; **c)** $\frac{27}{20}$; **d)** 9.

(5p) **3.** Rezultatele obținute de elevii unei clase la teza la matematică sunt prezentate în tabelul următor.

Nota	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Numărul de elevi	2	1	2	2	8	3	7	5

Media generală a clasei este egală cu:
a) 7,5; **b)** 7,6; **c)** 7; **d)** 8.

(5p) **4.** Dintre numerele $\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6}$, mai mare este numărul:
a) $\frac{2}{3}$; **b)** $\frac{3}{4}$; **c)** $\frac{4}{5}$; **d)** $\frac{5}{6}$.

(5p) **5.** Media aritmetică a numerelor $4+\sqrt{12}$ și $4-2\sqrt{3}$ este egală cu:
a) 2; **b)** 8; **c)** $\sqrt{3}$; **d)** 4.

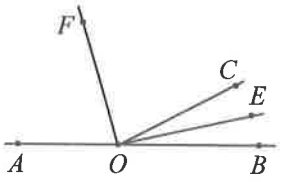
(5p) **6.** Ana afirmă: „O optime din numărul 2^{10} înseamnă 256". Afirmația Anei este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată, punctele A, M, N și B sunt coliniare, $AM = 2$ cm, $AB = 8$ cm, iar N este mijlocul segmentului MB. Lungimea segmentului AN este:

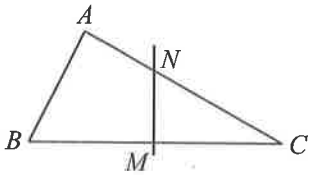
a) 4 cm; **b)** 6 cm;
c) 5 cm; **d)** 3 cm.

(5p) **2.** În figura alăturată, punctele A, O, B sunt coliniare, semidreapta OE este bisectoarea unghiului BOC, iar dreptele OF și OE sunt perpendiculare. Dacă unghiul BOC are măsura de 20°, măsura unghiului AOF este:



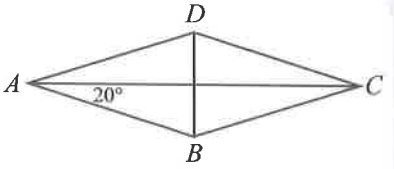
a) 70°; **b)** 80°;
c) 90°; **d)** 100°.

(5p) **3.** În figura alăturată, triunghiul ABC este dreptunghic în A, $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm, iar MN este mediatoarea laturii BC. Lungimea segmentului MN este:



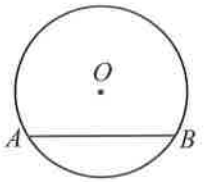
a) 8 cm; **b)** 10 cm;
c) 7,5 cm; **d)** 6 cm.

(5p) **4.** În rombul $ABCD$ din figura alăturată, măsura unghiului $\sphericalangle BAC$ este de 20°. Măsura unghiului BDC este:



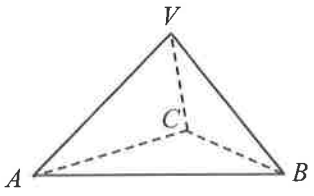
a) 50°; **b)** 60°;
c) 70°; **d)** 80°.

(5p) **5.** Pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$ din figura alăturată, cu $R = 4$ cm, se consideră punctele A și B, astfel încât măsura arcului AB este $120°$. Distanța de la O la AB este egală cu:



a) 2 cm; **b)** $2\sqrt{3}$ cm;
c) $\sqrt{3}$ cm; **d)** 3 cm.

(5p) **6.** În figura alăturată, piramida triunghiulară regulată $VABC$ are aria laterală egală cu $6\sqrt{3}$ cm² și aria totală egală cu $10\sqrt{3}$ cm². Latura bazei, AB, este egală cu:



a) 2 cm; **b)** 3 cm;
c) 4 cm; **d)** 6 cm.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Numerele 145, 207 și 329, împărțite la un număr natural nenul n, dau resturile 1, 3, respectiv 5.

(2p) **a)** Stabilește dacă n poate fi egal cu 16.

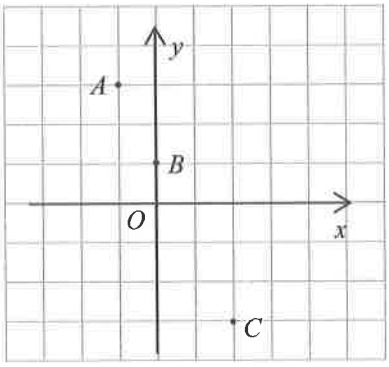
(3p) **b)** Determină valorile numărului n.

2. Se consideră expresia $E(x) = (2x-3)^2 - (x-1)(3x+4) + 7x - 6$, unde $x \in \mathbb{R}$.

(2p) **a)** Arată că $E(x) = x^2 - 6x + 7$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(3p) **b)** Arată că există o infinitate de valori $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ pentru care $E(a) \in \mathbb{N}$.

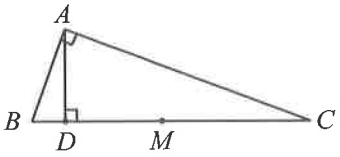
3. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - 2x$ și punctele $A(-1, 3)$, $B(0, 1)$, $C(2, -3)$.



(2p) **a)** Arată că $f(-1) - f(2) = 6$.

(3p) **b)** Demonstrează că punctele A, B și C sunt coliniare.

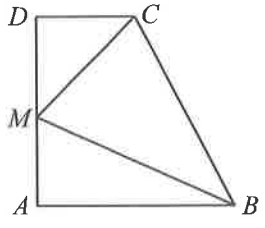
4. Triunghiul ABC din figura alăturată este dreptunghic în A, $\measuredangle ACB = 15°$ și $BC = 12$ cm. Punctul M este mijlocul segmentului BC, iar D este proiecția punctului A pe BC.



(2p) **a)** Arată că $\measuredangle AMB = 30°$.

(3p) **b)** Demonstrează că $DM < 5{,}2$ cm.

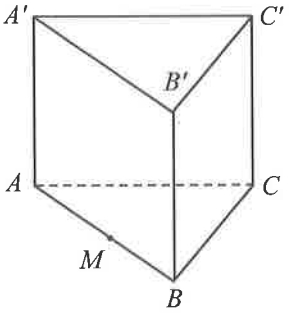
5. În figura alătură, $ABCD$ este un trapez dreptunghic cu $\measuredangle A = \measuredangle D = 90°$, $AB = 4$ cm, $CD = 2$ cm și $AD = 4\sqrt{2}$ cm. Punctul M este mijlocul segmentului AD.



(2p) **a)** Arată că $BC = 6$ cm.

(3p) **b)** Arată că $\measuredangle BMC = 90°$.

6. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată cu muchia bazei $AB = 4\sqrt{3}$ cm și înălțimea $AA' = 6\sqrt{3}$ cm. Notăm cu M mijlocul muchiei AB.



(2p) **a)** Arată că volumul prismei este egal cu 216 cm³.

(3p) **b)** Determină măsura unghiului dintre planele (MCC') și $(B'BC)$.

✦ TESTUL 21 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Suma numerelor prime care divid numărul 420 este egală cu:
a) 15; **b)** 17; **c)** 18; **d)** 19.

(5p) **2.** În tabelul alăturat sunt prezentate rezultatele obținute de patru elevi la câte un test. Elevii care au același procent de probleme rezolvate din totalul problemelor date la test sunt:
a) Maria și Ioana; **b)** Ioana și Matei;
c) Ioana și Alex; **d)** Alex și Matei.

	Nr. probleme rezolvate	Nr. probleme test
Maria	15	20
Ioana	20	25
Matei	20	30
Alex	8	10

(5p) **3.** Temperaturile medii zilnice din luna ianuarie a anului 2021 sunt înregistrate în tabelul următor.

Număr zile	4	10	11	6
Temperatura	–10°C	–6°C	3°C	6°C

Temperatura medie din luna ianuarie 2021 a fost:
a) –6°C; **b)** –1°C; **c)** –2°C; **d)** 3°C.

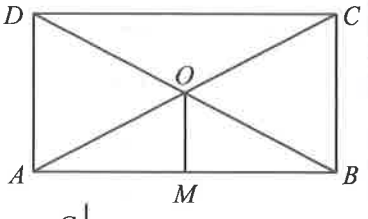
(5p) **4.** Inversul numărului $a = 0{,}5 + 0{,}(3)$ este egal cu:
a) $\frac{5}{6}$; **b)** $\frac{6}{5}$; **c)** $\frac{5}{4}$; **d)** $\frac{15}{8}$.

(5p) **5.** Numărul real $x = \sqrt{3^6 + 3^7}$ este egal cu:
a) $2 \cdot 3^3$; **b)** $\sqrt{3^{13}}$; **c)** 3^{12}; **d)** $3^3\sqrt{3}$.

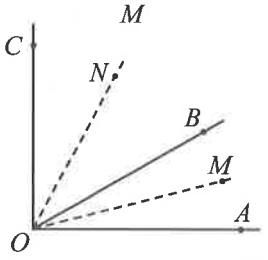
(5p) **6.** Rareș afirmă: „Reuniunea dintre mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ și mulțimea $B = \{-1, 0, 3, 7, 8, 9\}$ este o mulțime cu douăsprezece elemente”. Afirmația lui Rareș este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

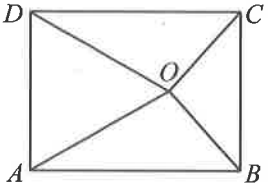
(5p) **1.** În figura alăturată este desenat un dreptunghi $ABCD$. Punctul O este intersecția diagonalelor, iar punctul M este mijlocul laturii AB. Simetricul punctului A față de dreapta OM este punctul:
a) M; **b)** B;
c) C; **d)** D.



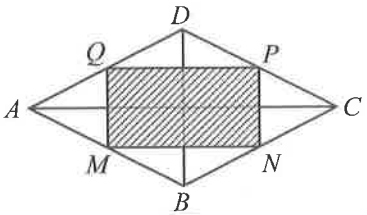
(5p) **2.** În figura alăturată sunt desenate două unghiuri adiacente complementare, AOB și BOC, și bisectoarele lor, OM, respectiv ON. Măsura unghiului MON este egală cu:
a) 15°; **b)** 30°;
c) 45°; **d)** 90°.



(5p) **3.** Figura alăturată reprezintă schița unui covor, având forma unui dreptunghi $ABCD$ cu $AD = 4$ m. Modelul covorului este format din triunghiul echilateral AOD și triunghiul dreptunghic BOC cu ipotenuza BC. Lungimea covorului este:
a) 4 m; **b)** $2\sqrt{3}$ m;
c) $2(1+\sqrt{3})$ m; **d)** 8 m.

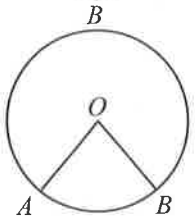


(5p) **4.** Figura alăturată reprezintă schița unei grădini în formă de romb $ABCD$ cu diagonalele $AC = 8$ m și $BD = 6$ m. Mijloacele laturilor rombului sunt vârfurile dreptunghiului $MNPQ$, iar în interiorul acestui dreptunghi au fost plantate flori. Aria suprafeței acoperite cu flori este:



a) 48 m^2; **b)** 24 m^2;
c) 12 m^2; **d)** 6 m^2.

(5p) **5.** Cercul din figura alăturată are centrul în O și raza de 8 cm. Arcul AB al cercului are măsura de 60°. Lungimea segmentului AB este:



a) 4 cm; **b)** $4\sqrt{3}$ cm;
c) 8 cm; **d)** $8\sqrt{3}$ cm.

(5p) **6.** O cutie pentru bomboane are forma unui tetraedru regulat cu latura de 10 cm și este confecționată din carton. Pentru confecționarea cutiei este nevoie de o coală de carton cu suprafața minimă de:

a) 40 cm^2; **b)** 100 cm^2; **c)** 150 cm^2; **d)** $100\sqrt{3}$ cm^2.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Andrei și Bogdan au împreună 210 lei. Dacă Andrei i-ar da lui Bogdan o șesime din suma pe care o are, atunci Bogdan ar avea jumătate din suma rămasă lui Andrei.

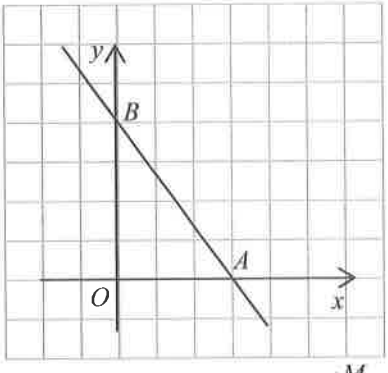
(2p) **a)** Este posibil ca Andrei să aibă 162 de lei? Justifică răspunsul dat.

(3p) **b)** Află ce sumă are Andrei.

2. Se consideră expresia $E(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1} : \left(\dfrac{x+3}{4x-4} - \dfrac{1}{x-1}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{x+1}\right)$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

(2p) **a)** Arată că $E(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

(3p) **b)** Demonstrează că $-2 < E(x) < 2$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

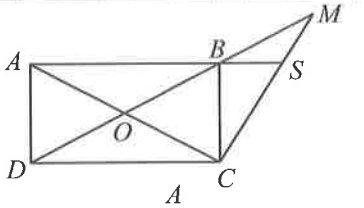


3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{12-4x}{3}$.

(2p) **a)** Calculează $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot f(4)$.

(3p) **b)** Dacă A și B sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox, respectiv Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy, determină lungimea segmentului AB.

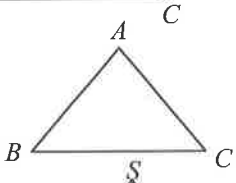
4. În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$ de centru O, cu $AB = 6\sqrt{3}$ cm și $AO = 6$ cm. Fie M simetricul punctului O față de punctul B și S punctul de intersecție dintre dreptele AB și CM.



(2p) **a)** Arată că aria dreptunghiului $ABCD$ este egală cu $36\sqrt{3}$ cm^2.

(3p) **b)** Află lungimea segmentului SB.

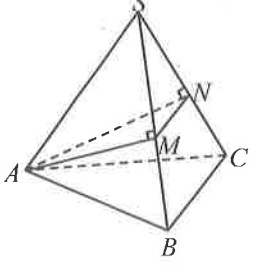
5. În figura alăturată este reprezentat triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC = 25$ cm și $BC = 30$ cm.



(2p) **a)** Arată că aria triunghiului ABC este egală cu 300 cm^2.

(3p) **b)** Dacă punctul D aparține dreptei AC, astfel încât $BD = 24$ cm, demonstrează că dreptele AC și BD sunt perpendiculare.

6. În figura alăturată este reprezentată piramida triunghiulară regulată $SABC$ cu latura bazei $AB = 10$ cm și muchia laterală $SA = 13$ cm. Punctele M și N sunt proiecțiile punctului A pe dreptele SB, respectiv SC.



(2p) **a)** Arată că aria feței SBC este egală cu 60 cm^2.

(3p) **b)** Demonstrează că dreapta MN este paralelă cu planul ABC.

✦ TESTUL 22 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $12 - 6 : (1 + 2)$ este:
a) 2; **b)** 4; **c)** 6; **d)** 10.

(5p) **2.** O bluză costă 240 de lei. După o ieftinire cu 30%, prețul bluzei va fi egal cu:
a) 72 de lei; **b)** 80 de lei; **c)** 168 de lei; **d)** 210 lei.

(5p) **3.** În tabelul de mai jos sunt prezentate temperaturile medii din primele cinci luni ale anului 2021.

Ianuarie	Februarie	Martie	Aprilie	Mai
–8°C	–3°C	4°C	8°C	15°C

Variația maximă (diferența dintre cea mai mare și cea mai mică temperatură medie) a temperaturii medii în cele cinci luni este:
a) –8°C; **b)** –5°C; **c)** 15°C; **d)** 23°C.

(5p) **4.** Cel mai mic dintre numerele raționale 5,(3); 5,3(2); 5,33; 5,(32) este:
a) 5,(3); **b)** 5,3(2); **c)** 5,33; **d)** 5,(32).

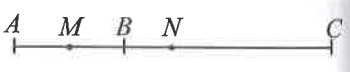
(5p) **5.** Patru elevi calculează produsul numerelor $-2\sqrt{2}$, $-3\sqrt{6}$ și $\sqrt{12}$ și obțin rezultatele înregistrate în tabelul alăturat. Dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect produsul celor trei numere este:
a) Andrei; **b)** Barbu;
c) Cristina; **d)** Dana.

Andrei	-72
Barbu	$-6\sqrt{6}$
Cristina	$6\sqrt{12}$
Dana	$36\sqrt{4}$

(5p) **6.** Sonia a plecat spre școală cu 20 de minute înainte de ora 8 și s-a întors acasă la ora 14:30. Ea i-a spus mamei sale că a fost plecată de acasă timp de 410 minute. Afirmația Soniei este:
a) adevărată; **b)** falsă.

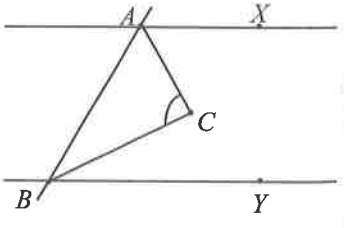
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele coliniare A, B, C, în această ordine. Punctul M este mijlocul lui AB, iar N este mijlocul lui AC. Dacă $AB = 6$ cm și $MN = 5$ cm, atunci lungimea segmentului BC este egală cu:



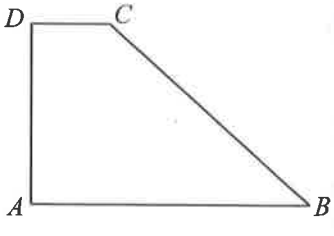
a) 20 cm; **b)** 12 cm; **c)** 2 cm; **d)** 10 cm.

(5p) **2.** În figura alăturată dreptele AX și BY sunt paralele, iar semidreptele AC și BC sunt bisectoarele unghiurilor XAB, respectiv YBA. Măsura unghiului ACB este egală cu:



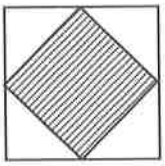
a) 30°; **b)** 45°;
c) 60°; **d)** 90°.

(5p) **3.** În figura alăturată sunt reprezentate patru mici localități A, B, C, D amplasate în vârfurile trapezului dreptunghic $ABCD$ cu $\measuredangle A = \measuredangle D = 90°$ și $AB = 50$ km, $AD = 30$ km și $DC = 10$ km. Lungimea celui mai scurt drum de la A la șoseaua care unește B cu C este:



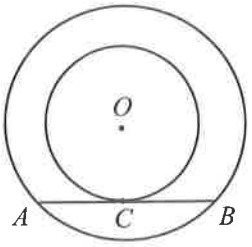
a) $10\sqrt{10}$ km; **b)** 30 km;
c) 40 km; **d)** 50 km.

(5p) **4.** Pardoseala unei băi este acoperită cu 80 de plăci de gresie în formă de pătrat cu latura de 0,3 m, ca în figura alăturată. Fiecare placă de gresie are pătratul cu vârfurile în mijlocul laturilor sale de culoare albastră, iar restul plăcii este de culoare albă. Suprafața albastră a pardoselei băii are aria egală cu:



a) 3 m^2; **b)** 3,6 m^2;
c) 4 m^2; **d)** 7,2 m^2.

(5p) **5.** Cele două cercuri din figura alăturată au același centru O, iar coarda AB este tangentă cercului interior în C. Dacă raza cercului exterior este de 10 cm și coarda AB are 16 cm, atunci raza cercului interior este:



a) 6 cm; **b)** 7 cm;
c) 8 cm; **d)** 9 cm.

(5p) **6.** Un cub de brânză $ABCDA'B'C'D'$ are bazele $ABCD$, $A'B'C'D'$, muchiile laterale AA', BB', CC', DD' și muchia $AB = 8$ cm. Ileana taie cubul cu un cuțit după un plan care trece prin punctele A, M, C' și N, unde M și N sunt mijloacele muchiilor BB', respectiv DD'. Aria secțiunii este:

a) $16\sqrt{3}$ cm^2; **b)** $24\sqrt{3}$ cm^2; **c)** $32\sqrt{6}$ cm^2; **d)** $48\sqrt{2}$ cm^2.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Un turist a parcurs un drum în trei zile. În prima zi a mers 18 km, a doua zi a parcurs $\frac{3}{5}$ din distanța rămasă, iar pentru ultima zi i-a rămas de făcut 25% din distanța inițială.

(2p) **a)** Află ce procent din distanța inițială a parcurs turistul în primele două zile.

(3p) **b)** Determină lungimea totală a drumului.

2. Se consideră expresia $E(x) = (2x+1)^2 - 2(x-1)^2 + (1-x)(x+3)$. unde $x \in \mathbb{R}$.

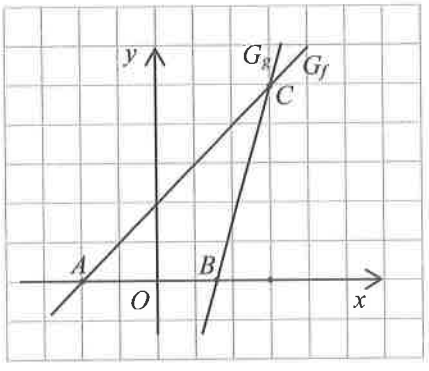
(2p) **a)** Arată că $E(x) = x^2 + 6x + 2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(3p) **b)** Determină valoarea minimă a lui $E(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

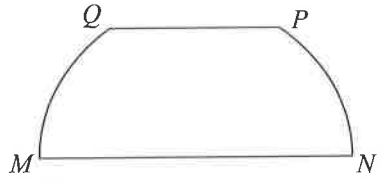
3. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 2$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 3x - 4$.

(2p) **a)** Determină numărul real a pentru care $f(a) = g(a)$.

(3p) **b)** Fie A și B punctele de intersecție a reprezentărilor grafice ale funcțiilor f, respectiv g cu axa Ox a sistemului de axe ortogonale xOy și C punctul lor comun. Calculează aria triunghiului ABC.



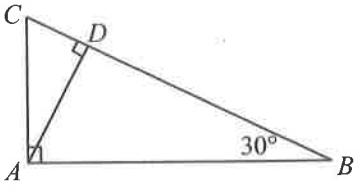
4. În figura alăturată este reprezentată podeaua unui balcon. Arcele MQ și NP aparțin cercului de diametru $MN = 12$ m și fiecare dintre ele are măsura de 60°.



(2p) **a)** Demonstrează că $PQ = 6$ m.

(3p) **b)** Determină lungimea conturului podelei.

5. În figura alăturată este desenat triunghiul dreptunghic ABC, cu ipotenuza $BC = 24$ cm și $\measuredangle B = 30°$.



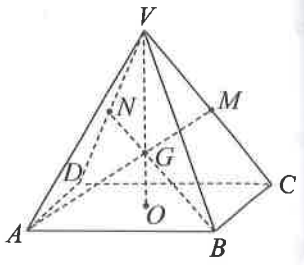
(2p) **a)** Arată că măsura unghiului CAD este de 30°.

(3p) **b)** Determină lungimea segmentului CD.

6. În figura alăturată este reprezentată piramida patrulateră regulată $VABCD$, în care O este centrul bazei $ABCD$, $G \in (VO)$, $VG = 2GO$, $\{M\} = AG \cap CV$ și $\{N\} = BG \cap VD$.

(2p) **a)** Demonstrează că M este mijlocul muchiei CV.

(3p) **b)** Demonstrează că planele MON și ABV sunt paralele.



✦ TESTUL 23 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Numărul divizorilor naturali ai numărului 24 este:
a) 2; **b)** 4; **c)** 6; **d)** 8.

(5p) **2.** Andrei și Bianca au vârstele (exprimate în ani) invers proporționale cu 3, respectiv 4, iar suma acestor vârste este egală cu 49 ani. Bianca are:
a) 28 ani; **b)** 27 ani; **c)** 24 ani; **d)** 21 ani.

(5p) **3.** În tabelul următor sunt prezentate datele celor trei războaie punice purtate între Roma și Cartagina.

Primul război punic	264 – 241 î.Hr.
Al doilea război punic	218 – 201 î.Hr.
Al treilea război punic	149 – 146 î.Hr.

În câți ani din perioada 264 – 146 î.Hr., Roma și Cartagina nu s-au luptat?
a) 71; **b)** 72; **c)** 73; **d)** 74.

(5p) **4.** Rezultatul calculului $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)\cdot 2{,}4$ este:
a) 0,4; **b)** 1,2; **c)** 2; **d)** 4.

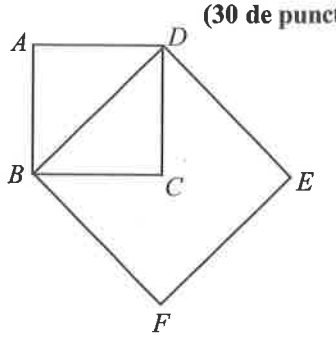
(5p) **5.** În tabelul alăturat sunt trecute aproximările găsite de patru elevi pentru numărul irațional $2\sqrt{3}$. Dintre cei patru elevi, cea mai bună aproximare a găsit-o:
a) Alexandra; **b)** Ilinca;
c) Maria; **d)** Victor.

Alexandra	2
Ilinca	3
Maria	5
Victor	6

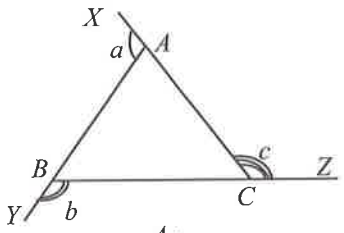
(5p) **6.** Bunica lui Radu are de urmat un tratament de 10 zile în care trebuie să ia câte o pastilă galbenă la 6 ore și câte două pastile verzi la 8 ore. Radu a cumpărat de la farmacie, pentru tratamentul bunicii, 40 de pastile galbene și 60 de pastile verzi. Radu a procedat bine?
a) da; **b)** nu.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată sunt reprezentate două pătrate, $ABCD$ și $BDEF$. Triunghiul CEF este:
a) ascuțitunghic; **b)** echilateral;
c) obtuzunghic; **d)** dreptunghic isoscel.

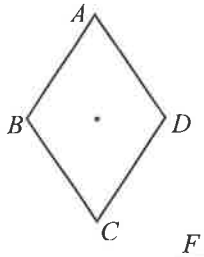


(5p) **2.** În figura alăturată, a, b, c sunt măsurile unghiurilor exterioare XAB, YBC, respectiv ZCA ale triunghiului ABC. Suma $a + b + c$ este egală cu:



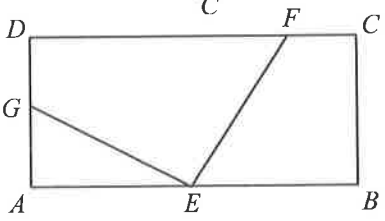
a) 90°; **b)** 180°;
c) 360°; **d)** 540°.

(5p) **3.** O ramă are forma unui romb $ABCD$, cu $\measuredangle B = 120°$ și $BD = 70$ cm, ca în figura alăturată. Lungimea minimă a unei ghirlande care se aplică pe ramă este:



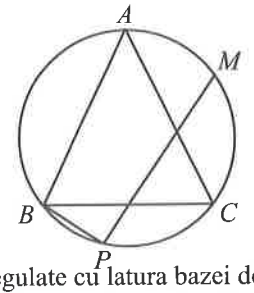
a) 1,4 m; **b)** 2 m;
c) 2,8 m; **d)** 3 m.

(5p) **4.** Figura alăturată reprezintă schița unei grădini în formă de dreptunghi $ABCD$ cu $AB = 16$ m și $BC = 12$ m. Punctele E, F, G sunt situate pe laturile AB, CD, respectiv AD, astfel încât $AE = EB$, $EG = 10$ m și $CF = 3$ m. În interiorul patrulaterului $EFDG$ au fost plantate flori, iar restul grădinii a fost acoperit cu gazon. Aria suprafeței plantate cu flori este:



a) 90 m^2; **b)** 102 m^2;
c) 160 m^2; **d)** 192 m^2.

(5p) **5.** În figura alăturată este reprezentat un cerc în care este înscris triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC$ și $\measuredangle BAC = 80°$. Punctul M este mijlocul arcului mic AC, iar P este un punct oarecare pe arcul mic BC. Măsura unghiului MPB este egală cu:



a) 50°; **b)** 75°;
c) 100°; **d)** 150°.

(5p) **6.** Corina are două cutii de suc. Prima cutie are forma unei prisme triunghiulare regulate cu latura bazei de 6 cm și muchia laterală de 8 cm. A doua cutie are forma unui cub cu latura de 5 cm. Dintre cele două cutii, cea cu volumul mai mare este:

a) prima cutie; **b)** a doua cutie; **c)** au același volum; **d)** nu se poate preciza.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. O fermă a vândut, în trei zile, 1000 kg de struguri. În primele două zile a vândut 640 kg de struguri, iar cantitatea vândută în a doua zi este cu 40 kg mai mare decât dublul cantității vândute în prima zi.

(2p) **a)** Află ce cantitate de struguri a vândut ferma în a treia zi.

(3p) **b)** Determină cantitatea de struguri vândută în prima zi.

2. Se consideră expresia $E(x) = (x + 1)^2 - (x - 2)^2 - 2(2x - 1)$, unde $x \in \mathbb{R}$.

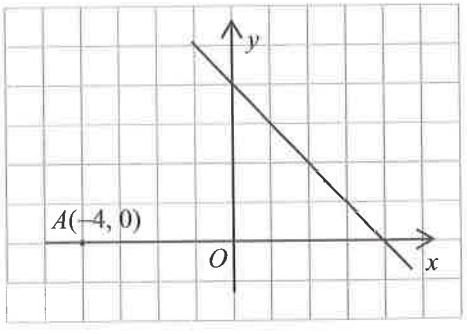
(2p) **a)** Arată că $E(x) = 2x - 1$, oricare ar fi numărul real x.

(3p) **b)** Determină numerele întregi negative n cu proprietatea că $E(n) \geq -6$.

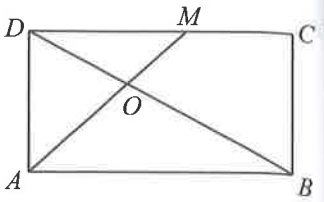
3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4 - x$.

(2p) **a)** Determină $m \in \mathbb{R}$, pentru care punctul $P(m, 3m)$ aparține graficului funcției f.

(3p) **b)** Calculează distanța de la punctul $A(-4, 0)$ la reprezentarea grafică a funcției f.



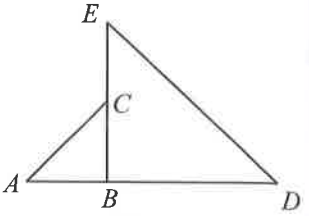
4. Dreptunghiul $ABCD$ din figura alăturată are dimensiunile $AB = 4\sqrt{3}$ cm și $AD = 4$ cm. Se știe că AM este bisectoarea unghiului BAD și $\{O\} = AM \cap BD$.



(2p) **a)** Arată că măsura unghiului BOM este 75°.

(3p) **b)** Calculează lungimea segmentului DO.

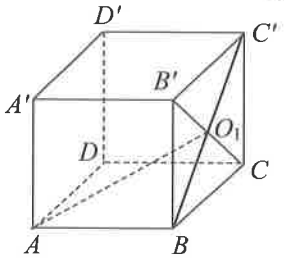
5. În figura alăturată sunt desenate două triunghiuri dreptunghice isoscele ABC și BDE cu ipotenuzele $AC = 4\sqrt{2}$ cm, respectiv $DE = 8\sqrt{2}$ cm.



(2p) **a)** Află lungimea segmentului AE.

(3p) **b)** Demonstrează că dreptele AE și CD sunt perpendiculare.

6. În figura alăturată este reprezentată o cutie în formă de cub $ABCDA'B'C'D'$. Punctul O_1 este centrul feței $BCC'B'$ și $AO_1 = 3\sqrt{6}$ dm.



(2p) **a)** Arată că 240 dm^2 de carton ajung pentru a confecționa cutia, știind că în procesul de fabricație se pierde 10% din cartonul folosit.

(3p) **b)** Arată că dreapta $A'C$ este perpendiculară pe planul $C'BD$.

✦ TESTUL 24 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Dintre numerele 20, 111, 13 și 91, este prim numărul:
a) 20; **b)** 13; **c)** 111; **d)** 91.

(5p) **2.** În tabelul alăturat sunt informații cu privire la numărul elevilor de gimnaziu, pe clase, dintr-o școală. Clasele pentru care raportul dintre numărul fetelor și numărul băieților este subunitar sunt:
a) a V-a și a VIII-a; **b)** a VI-a și a VII-a;
c) a V-a și a VII-a; **d)** a VI-a și a VIII-a.

Clasa	Număr fete	Număr băieți
a V-a	24	26
a VI-a	28	22
a VII-a	25	25
a VIII-a	23	28

(5p) **3.** Într-o piscină exterioară, valoarea maximă pe care a atins-o apa pe timpul zilei a fost de 24°C. Pe timpul nopții, temperatura apei a scăzut cu 2,5°C. Cea mai mică valoare a temperaturii apei în acele 24 de ore a fost:
a) 28°C; **b)** 22,5°C; **c)** 23°C; **d)** 21,5°C.

(5p) **4.** Se dau numerele $x = 2,(375)$, $y = 2,37(5)$, $z = 2,3(75)$ și $t = 2,(37)$. Ordinea descrescătoare a numerelor este:
a) z, y, x, t; **b)** t, x, y, z; **c)** x, z, y, t; **d)** z, y, t, x.

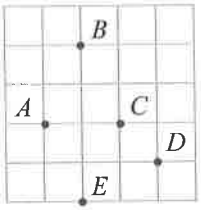
(5p) **5.** Patru elevi calculează $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}$ pentru $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{8}$, $c = \sqrt{18}$ și obțin rezultatele înregistrate în tabelul alăturat. Elevul care a obținut rezultatul corect este:
a) Alin; **b)** Bianca;
c) Daniela; **d)** Codrin.

Alin	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
Bianca	$-\sqrt{2}$
Codrin	$-6\sqrt{2}$
Daniela	$\frac{11}{6\sqrt{2}}$

(5p) **6.** Gigel desfășoară activități școlare, folosind aplicația Zoom, fiecare activitate având durata de 40 minute. La 12:10 a început ultima activitate a zilei. Gigel afirmă: „La ora 12:45 am terminat ultima activitate școlară". Afirmația lui Gigel este:
a) adevărată; **b)** falsă.

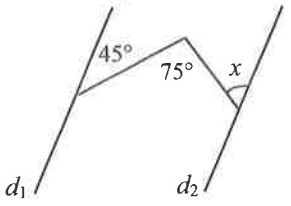
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele A, B, C, D și E. Dreapta AB este paralelă cu dreapta:



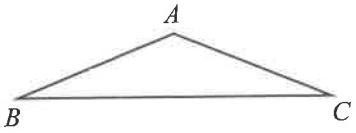
a) DE; **b)** CD;
c) CE; **d)** BE.

(5p) **2.** În figura alăturată, dreptele d_1 și d_2 sunt paralele, iar măsurile a trei dintre unghiurile care se formează sunt 45°, 75° și $x°$. Valoarea lui x este egală cu:



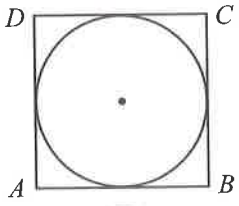
a) 25; **b)** 45;
c) 120; **d)** 30.

(5p) **3.** Un teren agricol are forma triunghiului isoscel ABC din figura alăturată, în care $AB = AC = 0{,}6$ km și $\measuredangle B = 15°$. Distanța de la punctul B la dreapta AC este:



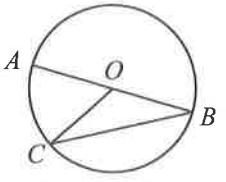
a) 300 m; **b)** 150 m;
c) 1200 m; **d)** 600 m.

(5p) **4.** În figura alăturată este un reprezentat teren pătratic $ABCD$, în interiorul căruia este un rond circular cu flori cu aria de 49π m^2. Aria terenului $ABCD$ este egală cu:



a) 98 m^2; **b)** 56 m^2;
c) 49 m^2; **d)** 196 m^2.

(5p) **5.** Pe cercul de centru O, având diametrul AB, se consideră punctul C, ca în figura alăturată. Dacă $\measuredangle BCO = 30°$, atunci arcul $\overset{\frown}{AC}$ are măsura de:



a) 60°; **b)** 120°;
c) 15°; **d)** 45°.

(5p) **6.** Un magazin deține o ladă frigorifică în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 80 cm, 120 cm și 100 cm. Numărul maxim de cutii cubice cu latura de 40 cm care pot fi depozitate în acea ladă frigorifică este:

a) 15; **b)** 12; **c)** 10; **d)** 8.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. În curtea bunicii sunt oi și rațe, care au în total 16 capete și 50 de picioare.

(2p) **a)** Stabilește dacă este posibil să fie 13 oi. Justifică răspunsul.

(3p) **b)** Determină numărul rațelor din curte.

2. Fie $E(x) = x(3x + 1) - (x - 2)^2 - (x + 1)^2 + 5$, unde x este un număr real.

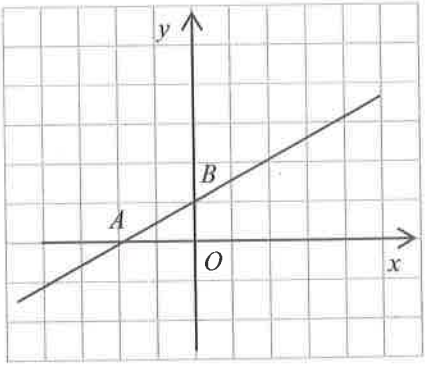
(2p) **a)** Arată că $E(x) = x^2 + 3x$, pentru orice număr real x.

(3p) **b)** Demonstrează că $E(n)$ este număr natural par, oricare ar fi numărul natural n.

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{2} + 1$.

(2p) **a)** Calculează $f(-1) \cdot f(2)$.

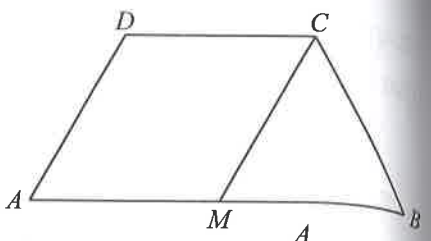
(3p) **b)** Știind că A și B sunt punctele de intersecție dintre graficul funcției f și axele Ox, respectiv Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy, determină aria triunghiului OAB.



4. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AD = BC = CD = 12$ cm și măsura unghiului ABC de $60°$. Punctul M este mijlocul bazei AB.

(2p) **a)** Arată că $AM = 12$ cm.

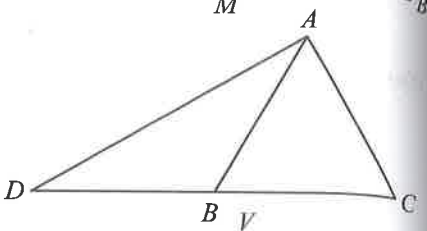
(3p) **b)** Determină lungimea segmentului AC.



5. Fie ABC un triunghi echilateral cu latura de 6 cm. Perpendiculara în A pe AC intersectează dreapta BC în punctul D, ca în figura alăturată.

(2p) **a)** Arată că $DC = 12$ cm.

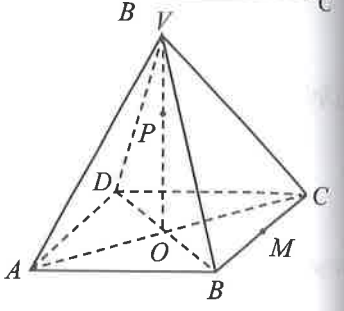
(3p) **b)** Demonstrează că perimetrul triunghiului ADC este mai mare de 28 cm.



6. Acoperișul unui turn are forma piramidei patrulatere regulate $VABCD$, ca în figura alăturată. Punctul O este centrul bazei, M este mijlocul laturii BC, iar P este un punct pe înălțimea VO astfel încât $OP = 3VP$. Se știe că $VO = 12$ m și $VM = 15$ m.

(2p) **a)** Arată că 200 kg de vopsea sunt suficiente pentru a vopsi pereții laterali ai acoperișului, știind că pentru a vopsi 13,5 m^2 de suprafață se folosesc 5 kg de vopsea.

(3p) **b)** Determină măsura unghiului planelor (PBC) și (ADC).



✦ TESTUL 25 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $2^5 : 2^3 \cdot 2 - 1$ este:

a) 1; **b)** 4; **c)** 7; **d)** 0.

(5p) **2.** Activitatea unei unități de triaj în patru zile consecutive este sintetizată în tabelul alăturat. Zilele în care raportul dintre numărul pacienților consultați și al celor internați este același sunt:

a) luni și marți; **b)** miercuri și joi;
c) luni și miercuri; **d)** marți și joi.

	Nr. pacienți consultați	Nr. pacienți internați
Luni	30	6
Marți	12	1
Miercuri	15	3
Joi	16	2

(5p) **3.** Știind că $x \in \mathbb{N}$ și $|x| \leq 1$, atunci x poate fi:

a) $\{0, 1\}$; **b)** $\{-1, 0, 1\}$; **c)** $\{-1, 0\}$; **d)** $\{-1, 1\}$.

(5p) **4.** Se dau numerele: $x = -\frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{4}$, $z = -\frac{1}{2}$ și $t = -\frac{1}{5}$. Ordinea crescătoare a numerelor este:

a) x, y, z, t; **b)** z, x, y, t; **c)** z, y, t, x; **d)** y, x, t, z.

(5p) **5.** Calculând $\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)(b-a)$, pentru $a = \sqrt{3}$ și $b = \sqrt{27}$, patru elevi au obținut rezultatele din tabelul alăturat. Copilul care a obținut rezultatul corect este:

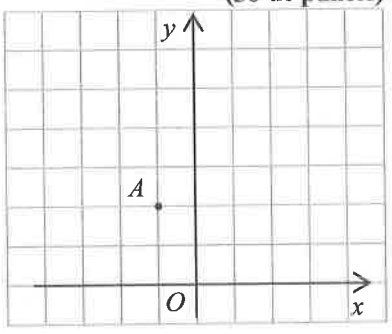
a) Andrei; **b)** Ingrid;
c) Toma; **d)** Vlad.

Toma	12
Vlad	6
Ingrid	$-\frac{5}{2}$
Andrei	$4\sqrt{3}$

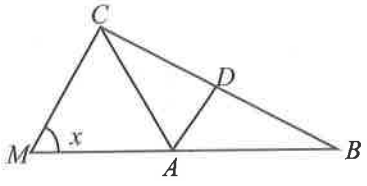
(5p) **6.** Cătălin a prins trei pești, cel mai mare având 3,5 kg. Valoarea de adevăr a propoziției „Cătălin are cel puțin 12 kg de pește." este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

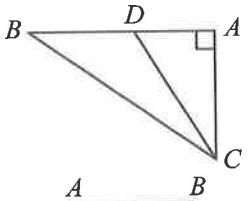
(5p) **1.** În raport cu sistemul de axe ortogonale xOy din figura alăturată, coordonatele punctului A sunt:
a) $(1, -2)$; **b)** $(-2, 1)$;
c) $(-1, 2)$; **d)** $(2, -1)$.



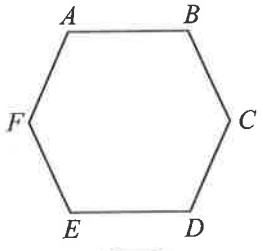
(5p) **2.** În figura alăturată este reprezentat un triunghi ABC cu măsura unghiului BAC de 110°. Paralela prin C la bisectoarea AD a unghiului BAC intersectează dreapta AB în M. Măsura unghiului marcat cu x este:
a) 110°; **b)** 70°;
c) 45°; **d)** 55°.



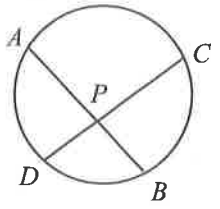
(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC, având măsura unghiului BAC egală cu 90°, măsura unghiului ABC egală cu 30°, $AB = 12$ cm și CD este bisectoarea unghiului ACB, cu $D \in AB$. Lungimea segmentului AD este:
a) 4 cm; **b)** 8 cm;
c) $4\sqrt{3}$ cm; **d)** $8\sqrt{3}$ cm.



(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat hexagonul $ABCDEF$, având perimetrul egal cu 24 cm. Aria hexagonului este egală cu:
a) 24 cm²; **b)** $36\sqrt{3}$ cm²;
c) $24\sqrt{3}$ cm²; **d)** $18\sqrt{3}$ cm².



(5p) **5.** În figura alăturată, AB și CD sunt două coarde concurente în punctul P. Dacă arcele $\overset{\frown}{AC}$ și $\overset{\frown}{BD}$ au măsurile 120°, respectiv 100°, atunci măsura unghiului APD este:
a) 70°; **b)** 110°;
c) 20°; **d)** 10°.



(5p) **6.** Un corp metalic, având forma unei piramide patrulatere regulate cu latura bazei de 8 m și înălțimea de 6 m se transformă, prin topire, în piese cubice cu latura de 2 dm, fără pierderi de material. Numărul de piese cubice obținute este:
a) 24000; **b)** 160; **c)** 1600; **d)** 16000.

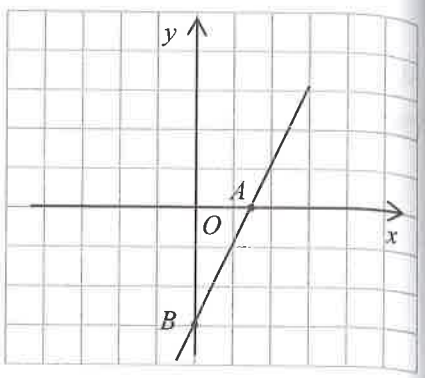
SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Două kilograme de roșii și trei kilograme de cartofi costă, împreună, 16 lei. Patru kilograme de roșii și două kilograme de cartofi, de același fel, costă 24 de lei.
(2p) **a)** Este posibil ca un kilogram de roșii să coste 6 lei? Justifică răspunsul.
(3p) **b)** Determină prețul unui kilogram de cartofi.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{2x^2+3x+11}{x^2+2x-3} - \frac{x-2}{x+3}\right) : \frac{1}{x^2-1}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1\}$.

(2p) **a)** Arată că $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$, pentru orice număr real x.

(3p) **b)** Demonstrează că numărul $1 + E(n)$ este pătrat perfect, pentru orice număr natural n, diferit de 1.

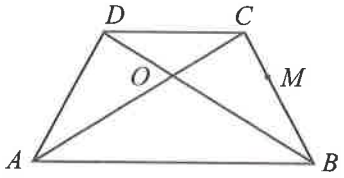


3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x\sqrt{3} - 3$.

(2p) **a)** Calculează $f(\sqrt{3}) - f(0)$.

(3p) **b)** Știind că A și B sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox, respectiv Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy, determină distanța de la punctul O la dreapta AB.

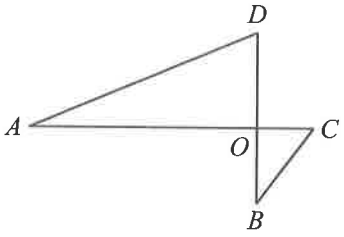
4. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB = 10$ cm, $CD = 5$ cm și perimetrul de 27 cm. Diagonalele trapezului se intersectează în punctul O, iar M este un punct pe latura BC, astfel încât $BM = 4$ cm.



(2p) **a)** Arată că $BC = 6$ cm.

(3p) **b)** Determină lungimea segmentului OM.

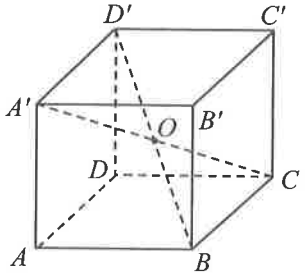
5. Patru localități A, B, C și D sunt unite prin șoselele AC, AD, BC și BD, ca în figura alăturată. Drumurile AC și BD sunt perpendiculare și se întâlnesc în O. Se știe că $OA = 24$ km, $OB = 8$ km, $OC = 6$ km și $OD = 10$ km.



(2p) **a)** Demonstrează că $BC = OD$.

(3p) **b)** Plecând din B pe bicicleta sa, poștașul Vasile dorește să ajungă la șoseaua AD, mergând peste câmpuri, pe drumul cel mai scurt. Viteza sa este 18 km/h. Arată că el va parcurge drumul dorit în mai puțin de o oră.

6. În figura alăturată, $ABCDA'B'C'D'$ este un cub cu latura 30 cm.



(2p) **a)** Putem împacheta cubul, acoperindu-l în întregime, cu o coală de hârtie având suprafața 0,5 m^2?

(3p) **b)** Diagonalele BD' și CA' ale cubului se intersectează în punctul O. Calculează sinusul unghiului BOC.

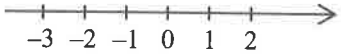
✦ TESTUL 26 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Dacă a și b sunt numere prime, $a < b$ și $a + 2b = 17$, atunci valoarea lui a este:
a) 7; **b)** 5; **c)** 2; **d)** 3.

(5p) **2.** La deschiderea bursei, o acțiune valora 80€. Pe parcursul zilei, valoarea acțiunilor a scăzut cu 15%. La sfârșitul programului, prețul acțiunii este:
a) 65€; **b)** 68€; **c)** 70€; **d)** 92€.

(5p) **3.** Pe axa numerelor sunt reprezentate câteva numere întregi. Numărul întreg al cărui opus nu se află în reprezentare este:



a) 1; **b)** 0; **c)** –2; **d)** –3.

(5p) **4.** Ionel a avut de transcris tabelul alăturat și de completat ultimele două coloane. Singurul rezultat greșit este în dreptul numărului:

a) t; **b)** z;
c) x; **d)** y.

Numărul	Opusul numărului	Inversul numărului
$x=\frac{7}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$\frac{3}{7}$
$y=-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{5}{2}$
$z=-0,1(6)$	$0,1(6)$	6
$t=1\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$0,8$

(5p) **5.** Rezolvând inecuația $\frac{x}{3}+\frac{1-x}{2}<1$ în mulțimea numerelor reale, patru copii au obținut rezultatele înregistrate în tabelul de mai jos.

Cosmin	Raluca	Ioana	Matei
$x\in\left(-\infty,\frac{3}{5}\right)$	$x\in(-\infty,-3)$	$x\in(-3,\infty)$	$x\in(-\infty,-3]$

Dintre cei patru copii, a rezolvat corect inecuația:
a) Matei; **b)** Cosmin; **c)** Ioana; **d)** Raluca.

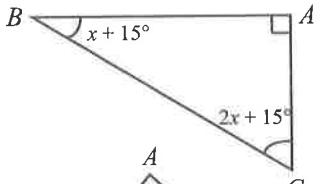
(5p) **6.** Claudiu așteaptă un tren care trebuie să sosească la ora 17:15. La ora 17:05 aude la stație anunțul că trenul întârzie 10 minute. Claudiu spune că mai are de așteptat 25 de minute. Afirmația lui Claudiu este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele coliniare A, B, C, D. Numărul segmentelor care au capetele în două dintre punctele date este:

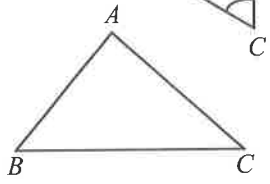
a) 3; **b)** 6; **c)** 10; **d)** 5.

(5p) **2.** În figura alăturată este reprezentat un triunghi dreptunghic ABC, având $\measuredangle A=90°$, $\measuredangle B=x+15°$ și $\measuredangle C=2x+15°$. Valoarea lui x este:



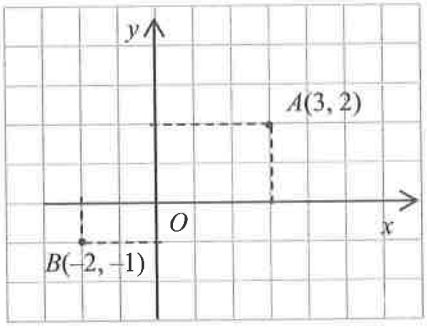
a) 20°; **b)** 45°;
c) 15°; **d)** 30°.

(5p) **3.** În figura alătură se consideră triunghiul ABC, cu $AB=13$ cm, $BC=14$ cm și distanța de la A la dreapta BC egală cu 12 cm. Perimetrul triunghiului ABC este egal cu:



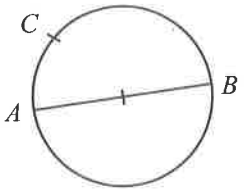
a) 42 cm; **b)** 30 cm;
c) 35 cm; **d)** 40 cm.

(5p) **4.** În figura alăturată sunt reprezentate, într-un sistem de axe ortogonale xOy, punctele $A(3, 2)$ și $B(-2, -1)$. Dacă M și N sunt proiecțiile ortogonale pe axa Ox ale punctelor A, respectiv B, atunci aria patrulaterului $AMBN$ este:



a) 10; **b)** 15;
c) 7,5; **d)** 6.

(5p) **5.** În cercul din figura alăturată, segmentul AB este un diametru, iar C este un punct pe cerc, astfel încât măsura unghiului CBA este egală cu 30°. Măsura arcului mic $\overset{\frown}{CB}$ este:

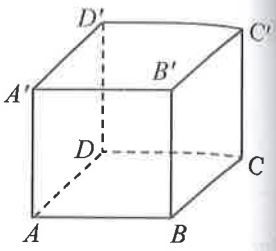


a) 150°; **b)** 180°;
c) 90°; **d)** 120°.

(5p) **6.** În cubul $ABCDA'B'C'D'$, din figura alăturată, se cunoaște că perimetrul triunghiului ACD' este $12\sqrt{2}$ cm. Aria totală a cubului este egală cu:

a) 48 cm^2; **b)** 64 cm^2;

c) 96 cm^2; **d)** 112 cm^2.



SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Într-un bloc sunt apartamente cu două și trei camere, în total 20 de apartamente și 49 de camere.

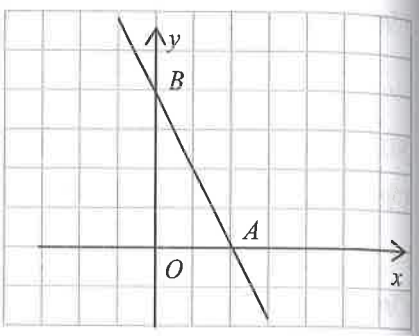
(2p) **a)** Este posibil să fie în bloc 10 apartamente cu trei camere? Justifică răspunsul.

(3p) **b)** Află numărul apartamentelor cu două camere.

2. Se consideră expresia $E(x)=\left(\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x^2+1}{1+2x+x^2}\right):\dfrac{3x-3}{x^3+2x^2+x}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$.

(2p) **a)** Arată că $x^3+2x^2+x=x(x+1)^2$, pentru orice număr real x.

(3p) **b)** Demonstrează că media aritmetică a numerelor $a=E(2+\sqrt{3})$ și $b=E(4-\sqrt{3})$ este număr natural.

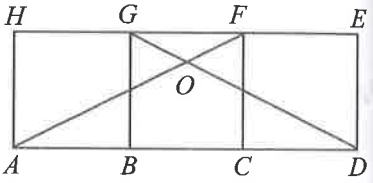


3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+4$.

(2p) **a)** Calculează $f(\sqrt{3})+f(-\sqrt{3})$.

(3p) **b)** Știind că A și B sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției cu axele Ox, respectiv Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy, determină perimetrul triunghiului AOB.

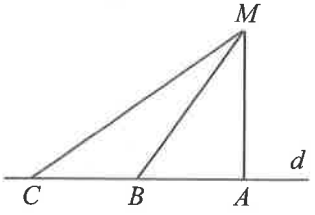
4. În figura alăturată sunt reprezentate trei pătrate cu laturile egale: $ABGH$, $BCFG$ și $CDEF$. O este punctul de intersecție a dreptelor AF și DG, iar aria dreptunghiului $ADEH$ este egală cu 48 cm^2.



(2p) **a)** Arată că $AD=12$ cm.

(3p) **b)** Determină lungimea segmentului OF.

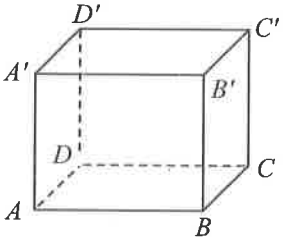
5. În figura alăturată sunt reprezentate o dreaptă d și un punct M, aflat la distanța de 12 cm de dreapta d. Din punctul M construim perpendiculara MA pe dreapta d și oblicele MB și MC, astfel încât $MB=15$ cm, iar $MC=20$ cm.



(2p) **a)** Arată că $BC=7$ cm.

(3p) **b)** Demonstrează că sinusul unghiului BMC are valoarea mai mică decât $\dfrac{2}{7}$.

6. Cristina are un acvariu din sticlă, având forma prismei patrulatere regulate $ABCDA'B'C'D'$ (fără baza superioară) din figura alăturată. Înălțimea prismei este egală cu 30 cm, iar latura bazei este egală cu 40 cm. Cristina toarnă în acvariu 32 litri de apă.



(2p) **a)** Determină suprafața sticlei necesare pentru fabricarea acvariului.

(3p) **b)** O tijă cu lungimea de 60 cm este scufundată în acvariu. Demonstrează că putem proceda astfel încât tija să fie complet acoperită de apă.

✦ TESTUL 27 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Cel mai mare număr natural de forma $\overline{3ab}$ divizibil cu 5 și cu 9 este:
a) 315; **b)** 330; **c)** 945; **d)** 360.

(5p) **2.** Mai jos este prezentat tabelul unei dependențe funcționale.

x	0	1	2	...	50
$y=\frac{x}{14}$	0	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	...	$\frac{50}{14}$

Numărul valorilor lui x pentru care y aparține mulțimii $\mathbb{N}$ este:
a) 1; **b)** 2; **c)** 3; **d)** 4.

(5p) **3.** Fie $A=[-7, 7)$. Suma numerelor întregi din intervalul A este:
a) –7; **b)** –6; **c)** 0; **d)** 21.

(5p) **4.** Dacă 12 caiete de același fel costă 66 de lei, atunci 16 caiete ca acestea costă:
a) 77 de lei; **b)** 88 de lei; **c)** 90 de lei; **d)** 99 de lei.

(5p) **5.** Numărul $a=\frac{1}{1-\sqrt{2}}-\frac{7}{3-\sqrt{2}}+\sqrt{8}$ este egal cu:
a) $-\sqrt{2}$; **b)** –6; **c)** –4; **d)** –2.

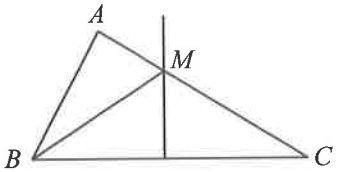
(5p) **6.** Afirmația „Numărul $a=2^{10}\cdot 3^6 : 6^8$ este natural, pătrat perfect.” este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

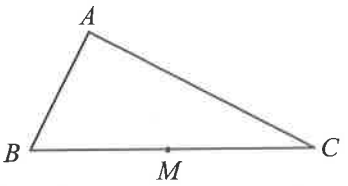
(5p) **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele coliniare A, B, C, în această ordine. Se știe că M este mijlocul lui BC și N este mijlocul lui AC. Dacă $AM = 12$ cm și $AN = 10$ cm, atunci lungimea segmentului AB este egală cu:

a) 1 cm; **b)** 4 cm; **c)** 10 cm; **d)** 8 cm.

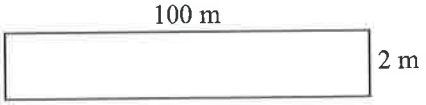
(5p) **2.** În figura alăturată este reprezentat un triunghi ABC cu $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm. Mediatoarea laturii BC intersectează latura AC în M. Perimetrul triunghiului ABM este:
a) 11 cm; **b)** 10 cm;
c) 14 cm; **d)** 12 cm.



(5p) **3.** În figura alăturată sunt reprezentate trei obiective turistice A, B și C. Unghiul BAC are măsura de 90°, iar distanța dintre B și C este de 30 km. Lungimea traseului A–M–C, M fiind mijlocul lui BC, este:
a) 30 km; **b)** 45 km;
c) 50 km; **d)** 15 km.



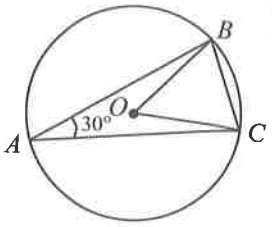
(5p) **4.** O alee lungă de 100 m și lată de 2 m, ca în figura alăturată, se pavează cu dale pătratice cu latura de 25 cm. Numărul de dale folosite pentru pavarea aleii este:
a) 400; **b)** 500;
c) 600; **d)** 3200.



(5p) **5.** În figura alăturată, cercul $\mathcal{C}(O, R)$ este circumscris triunghiului ABC. Măsura unghiului A este de 30°, iar $BC = 5$ cm. Perimetrul triunghiului OBC este:

a) 15 cm; **b)** $12\sqrt{3}$ cm;

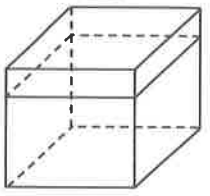
c) $20\sqrt{2}$ cm; **d)** $5\sqrt{3}$ cm.



(5p) **6.** În figura alăturată este reprezentat un vas în formă de cub cu latura de 0,75 m. În vas se toarnă 225 litri de apă. Înălțimea la care se ridică apa este:

a) 0,2 m; **b)** 0,8 m;

c) 0,4 m; **d)** 0,75 m.



SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Numărul $\overline{ab}$, cu a, b cifre nenule, are proprietatea că $\overline{ba} + 8(a + b) = 90$.

(2p) **a)** Numărul 24 verifică ipoteza problemei?

(3p) **b)** Câte numere $\overline{ab}$ au proprietatea din enunțul problemei?

2. Se consideră expresia $E(x) = (x + 1)^3 - (x^2 - 1)(x + 1)$, unde $x \in \mathbb{R}$.

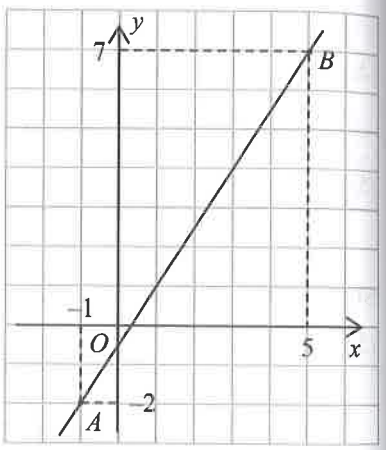
(2p) **a)** Arată că $E(x) = 2(x + 1)^2$, oricare ar fi numărul real x.

(3p) **b)** Demonstrează că, oricare ar fi numărul întreg impar n, numărul $E(n)$ este multiplu al lui 8.

3. Se dă funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{3}{2}x - 0{,}5$.

(2p) **a)** Verifică dacă punctele $A(-1, -2)$ și $B(5, 7)$ sunt situate pe graficul funcției f.

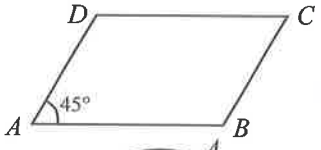
(3p) **b)** Determină punctele de coordonate întregi situate pe segmentul AB (fără punctele A și B).



4. Un teren agricol are forma paralelogramului $ABCD$ din figura alăturată și are dimensiunile $AB = 200$ m, $AD = 50\sqrt{2}$ m și $\measuredangle BAD = 45°$.

(2p) **a)** Calculează lungimea gardului ce împrejmuiește terenul.

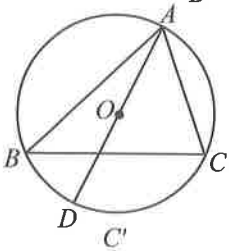
(3p) **b)** Arată că aria terenului este de un hectar.



5. În figura alăturată, triunghiul ABC este înscris în cercul $\mathcal{C}(O, R)$, $AB = 12$ cm, $\measuredangle ACB = 60°$, iar D este punctul diametral opus lui A în cercul dat.

(2p) **a)** Arată că $\measuredangle BAD = 30°$.

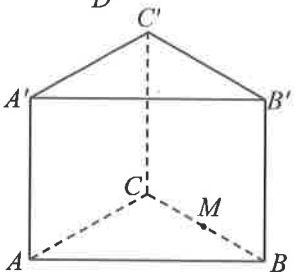
(3p) **b)** Determină lungimea razei cercului $\mathcal{C}(O, R)$.



6. În figura alăturată este reprezentată o prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, cu $AB = 6$ cm și $AA' = 3$ cm. Punctul M este mijlocul laturii BC.

(2p) **a)** Calculează volumul prismei.

(3p) **b)** Demonstrează că planele $(AB'M)$ și $(AC'M)$ sunt perpendiculare.



✦ TESTUL 28 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Suma numerelor prime de o cifră este:
a) 16; **b)** 17; **c)** 18; **d)** 26.

(5p) **2.** Dacă $x = 0,(8)$, atunci $2 \cdot x$ este egal cu:
a) $\frac{16}{9}$; **b)** $1,(6)$; **c)** $1,(16)$; **d)** $\frac{4}{9}$.

(5p) **3.** Prețul unui televizor este 1500 de lei. În cadrul unei promoții, toate produsele electronice se ieftinesc cu 15%. Noul preț al televizorului este:
a) 1250 de lei; **b)** 1275 de lei; **c)** 1350 de lei; **d)** 1485 de lei.

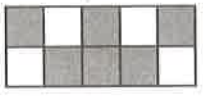
(5p) **4.** Scriind ca interval mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 - x > 1\}$, obținem:
a) $(-\infty, 1)$; **b)** $(-\infty, -1)$;
c) $(1, \infty)$; **d)** $(-1, \infty)$.

(5p) **5.** Se consideră numerele $a = \sqrt{72} + \sqrt{18} - \sqrt{2}$ și $b = \frac{8}{\sqrt{2}}$. Numărul $a - 2b$ este egal cu:
a) $4\sqrt{2}$; **b)** $-4\sqrt{2}$; **c)** $\sqrt{2}$; **d)** 0.

(5p) **6.** Ana are 10 lei, iar Alina are 2 lei. Alina spune: „Dacă mi-ai da 2 lei, aș avea jumătate din banii tăi". Afirmația este:
a) adevărată; **b)** falsă.

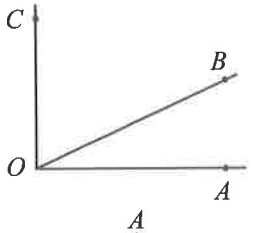
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată este desenat un dreptunghi cu dimensiunile 5 cm × 2 cm, împărțit în pătrate cu latura de 1 cm. Aria părții colorate reprezintă o fracție f din aria întregului dreptunghi. Forma ireductibilă a fracției f este:



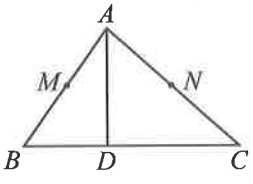
a) $\frac{1}{2}$; **b)** $\frac{2}{5}$; **c)** $\frac{6}{10}$; **d)** $\frac{3}{5}$.

(5p) **2.** În figura alăturată, unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt adiacente și complementare. Măsurile lor, în grade, sunt $2x - 10$, respectiv $3x$, unde x este un număr real. Măsura unghiului $\sphericalangle AOB$ este:



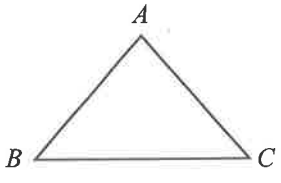
a) 20°; **b)** 30°;
c) 60°; **d)** 70°.

(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC, în care punctele M și N sunt mijloacele laturilor AB, respectiv AC, iar D este piciorul înălțimii din A. Perimetrul triunghiului MDN este egal cu 12 cm. Perimetrul triunghiului ABC este:



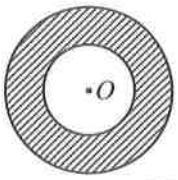
a) 36 cm; **b)** 20 cm;
c) 24 cm; **d)** 48 cm.

(5p) **4.** În figura alătură este reprezentat un triunghi ABC cu $AB = AC = 10$ cm și $BC = 12$ cm. Lungimea celui mai scurt drum care unește punctul B cu un punct situat pe latura AC este:



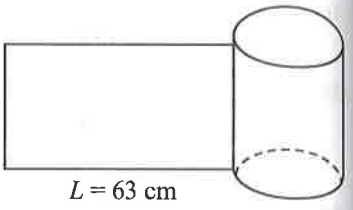
a) 8,4 cm; **b)** 9 cm;
c) 9,6 cm; **d)** 10 cm.

(5p) **5.** Cercurile $\mathscr{C}(O, 3)$ și $\mathscr{C}_1(O, r)$, $r < 3$, sunt concentrice, astfel încât aria suprafeței haşurate este egală cu 5π. Lungimea razei r este egală cu:



a) $\sqrt{7}$; **b)** 2;
c) 5; **d)** –2.

(5p) **6.** Un dreptunghi are lungimea $L = 63$ cm. Înfăşurându-l ca în figura alăturată, obţinem suprafaţa laterală a unui cilindru circular drept. Raza acestui cilindru, rotunjită la cel mai apropiat număr întreg de centimetri, este:



a) 15 cm; **b)** 9 cm;
c) 20 cm; **d)** 10 cm.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Andrei, Barbu şi Cosmin au, împreună, 45 de timbre. Diferenţa dintre dublul numărului de timbre ale lui Barbu şi numărul timbrelor lui Cosmin este 13. Cosmin are 9 timbre.

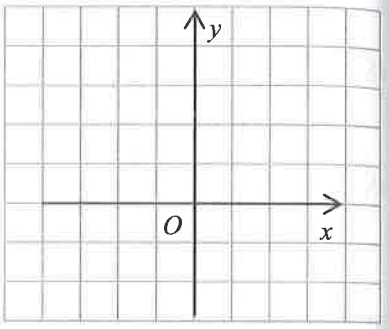
(2p) **a)** Câte timbre are Barbu?

(3p) **b)** Câte timbre are Andrei?

2. Se consideră expresia $E(x) = 4x^2 - 12x + 8$, unde x este un număr real.

(2p) **a)** Arată că $E(x) = (2x - 3)^2 - 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

(3p) **b)** Determină valoarea minimă pe care o poate lua expresia $E(x)$.

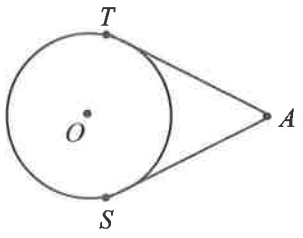


3. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{2} + 1$.

(2p) **a)** Reprezintă grafic funcţia în sistemul de axe ortogonale xOy alăturat.

(3p) **b)** Verifică egalitatea $f(\sqrt{3}) + f(3\sqrt{3}) = 2f(2\sqrt{3})$.

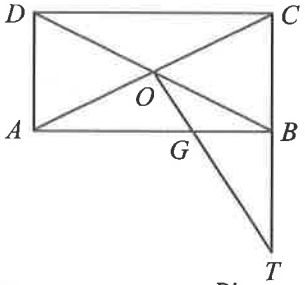
4. În figura alăturată, cercul de centru O reprezintă un lac, iar segmentele AT şi AS sunt două alei care pleacă de la ghereta administratorului (A) către două pontoane (T şi S). Dreptele AT şi AS sunt tangente cercului. Se ştie că $AT = 120$ m şi $AO = 130$ m.



(2p) **a)** Arată că $AS = 120$ m.

(3p) **b)** Demonstrează că suprafaţa lacului este mai mică decât un hectar.

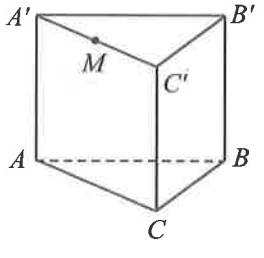
5. În figura alăturată este reprezentat un dreptunghi $ABCD$ cu $AB = 6$ cm şi $BC = 2$ cm. Prelungim latura BC cu segmentul BT, $BT = 2$ cm şi notăm $\{G\} = OT \cap AB$.



(2p) **a)** Arată că dreptele AT şi BD sunt paralele.

(3p) **b)** Determină măsura unghiului BGC.

6. În figura alăturată este reprezentată prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$. Se ştie că $AB = 4\sqrt{3}$ cm, $AA' = 6$ cm, iar punctul M este mijlocul muchiei $A'C'$.



(2p) **a)** Determină volumul prismei.

(3p) **b)** Află distanţa de la punctul M la planul $(B'BC)$.

✦ TESTUL 29 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $2 : \frac{1}{2} + 3 : \frac{1}{3}$ este:

a) 2; **b)** 5; **c)** 10; **d)** 13.

(5p) **2.** În tabelul următor este reprezentată o dependență funcțională.

x	–1	0	b	2	3
$y = 2x - 2$	–4	a	0	2	c

Valoarea sumei $a + b + c$ este:

a) –2; **b)** 0; **c)** 3; **d)** 5.

(5p) **3.** Numărul întreg n cu proprietatea că $n < 1 - \sqrt{2} < n + 1$ este:

a) –2; **b)** –1; **c)** 0; **d)** 1.

(5p) **4.** Scara unei hărți este 1 : 250 000. Distanța între două localități, pe hartă, este 12 cm. Distanța reală dintre cele două localități este:

a) 3 km; **b)** 30 km; **c)** 300 km; **d)** 3000 km.

(5p) **5.** Suma soluțiilor ecuației $|x - 1| = 3$ este:

a) 0; **b)** 1; **c)** 2; **d)** 3.

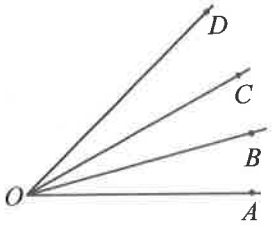
(5p) **6.** Un suc și două cornuri costă 7 lei. Afirmația „Trei sucuri și șase cornuri, de același fel, costă 20 de lei" este:

a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

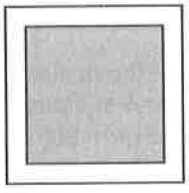
(5p) **1.** Numărul maxim de unghiuri care pot fi identificate în figura alăturată este:

a) 3; **b)** 4;
c) 5; **d)** 6.



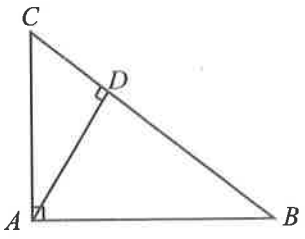
(5p) **2.** Un teren are forma unui pătrat cu latura de 25 m. În exteriorul terenului, la distanță de 2 m față de conturul său, se construiește un gard, ca în figura alăturată. Lungimea gardului este:

a) 108 m; **b)** 102 m;
c) 116 m; **d)** 100 m.

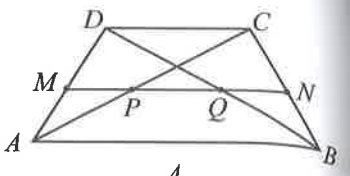


(5p) **3.** În figura alăturată, ABC este un triunghi dreptunghic, $\measuredangle A = 90°$, iar $AD \perp BC$, cu $D \in BC$. Dacă $BD = 16$ m și $CD = 9$ m, aria triunghiului ABC este:

a) 150 m^2; **b)** 144 m^2;
c) 25 m^2; **d)** 250 m^2.

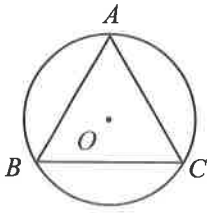


(5p) **4.** În figura alăturată, linia mijlocie MN a trapezului $ABCD$ ($AB \parallel CD$) intersectează diagonalele AC și BD în punctele P, respectiv Q. Se știe că $CD = 7$ cm și $PQ = 4$ cm. Lungimea segmentului MN este:



a) 10 cm; **b)** 10,5 cm;
c) 11 cm; **d)** 11,75 cm.

(5p) **5.** Triunghiul echilateral ABC din figura alăturată are vârfurile situate pe cercul de centru O. Perimetrul triunghiului este $12\sqrt{3}$ cm. Raza cercului are lungimea:



a) 4 cm; **b)** $2\sqrt{3}$ cm;
c) $3\sqrt{3}$ cm; **d)** 6 cm.

(5p) **6.** Marian are o sută de cubulețe identice și construiește, cu ajutorul lor, un cub cât mai mare posibil. Numărul cubulețelor care rămân nefolosite de Marian este:

a) 0; **b)** 25; **c)** 19; **d)** 36.

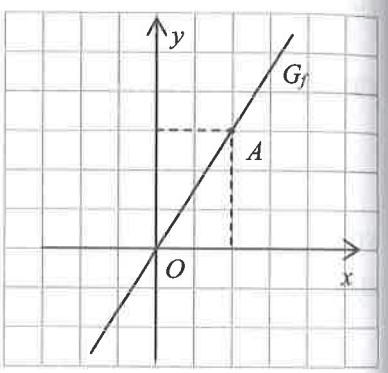
SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Dacă elevii clasei a VIII-a B s-ar așeza câte unul în fiecare bancă, ar rămâne 13 elevi în picioare. Pentru a fi câte doi elevi în fiecare bancă, ar mai fi nevoie de încă doi elevi.

(2p) **a)** Arată că, dacă se scoate o bancă din clasă și elevii se așază câte doi în fiecare bancă, toate băncile vor fi complet ocupate.

(3p) **b)** Câți elevi sunt în clasa a VIII-a B?

2. Se consideră $E(x) = \dfrac{x^3}{x-1} \cdot \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^4}\right) - \dfrac{x+3}{x}$, unde x este un număr real, $x \neq 0$ și $x \neq 1$.



(2p) **a)** Arată că $E(x) = -\dfrac{2}{x}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

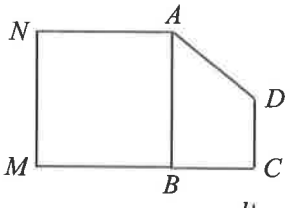
(3p) **b)** Determină numerele întregi n pentru care $E(n)$ este număr întreg.

3. În raport cu un sistem de axe ortogonale xOy se consideră punctul $A(2, 3)$. Dreapta OA este graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.

(2p) **a)** Arată că $a = 1{,}5$ și $b = 0$.

(3p) **b)** Calculează sinusul unghiului format de graficul funcției f și axa Oy.

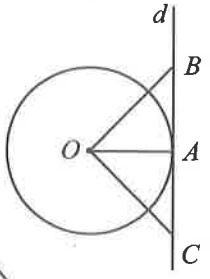
4. În figura alăturată, $ABCD$ este un trapez dreptunghic cu $AB \parallel CD$, $AB = 2CD = 8$ cm, $BC = 4$ cm și $AD = 4\sqrt{2}$ cm, iar $ABMN$ este un pătrat.



(2p) **a)** Arată că unghiul $\sphericalangle BAD$ are măsura 45°.

(3p) **b)** Demonstrează că lungimea segmentului DN este mai mică de 13 cm.

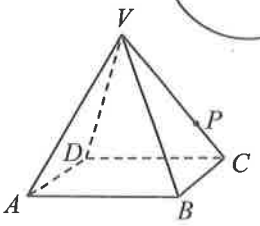
5. În figura alăturată, dreapta d este tangentă în A la cercul de centru O, iar B și C sunt două puncte situate pe dreapta d, astfel încât $AB = AC$, $\sphericalangle BOC = 90°$ și $BC = 10$ cm.



(2p) **a)** Arată că $OB = OC$.

(3p) **b)** Determină lungimea razei cercului.

6. În figura alăturată este reprezentată piramida patrulateră $VABCD$. Toate muchiile piramidei au lungimea de 6 cm. Punctul P se află pe muchia VC, astfel încât $VP = 2PC$.



(2p) **a)** Calculează aria laterală a piramidei.

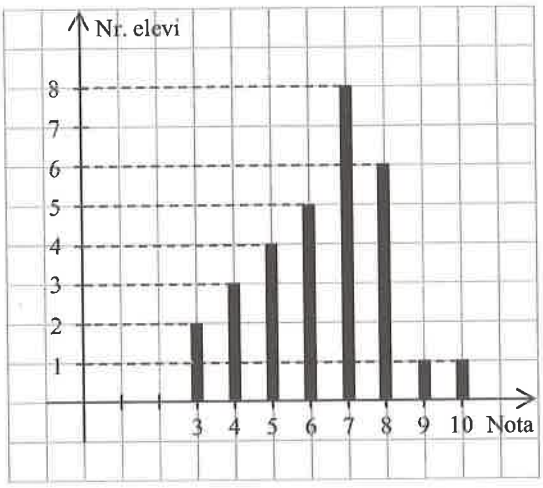
(3p) **b)** Află tangenta unghiului format de dreptele AD și BP.

✦ TESTUL 30 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Restul împărțirii numărului 345 la 6 este:
a) 57; **b)** 0; **c)** 1; **d)** 3.

(5p) **2.** În diagrama de mai jos sunt reprezentate rezultatele obținute de elevii clasei a VIII-a A la teza de matematică.



Dominanta seriei statistice descrisă de diagramă este:
a) 5; **b)** 6; **c)** 7; **d)** 8.

(5p) **3.** A zecea zecimală din scrierea numărului rațional $a = 0,1(23)$ este:
a) 0; **b)** 1; **c)** 2; **d)** 3.

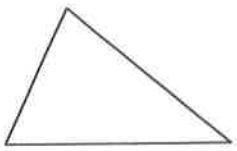
(5p) **4.** Scrierea sub formă de interval a mulțimii $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-3| \leq 2\}$ este:
a) $[-2, 2]$; **b)** $[1, 5]$; **c)** $[-5, 1]$; **d)** $(-\infty, 5]$.

(5p) **5.** Se dau numerele $a = 3 + \sqrt{5}$ și $b = 3 - \sqrt{5}$. Diferența dintre media aritmetică și media geometrică a celor două numere este:
a) 3; **b)** 2; **c)** $3-\sqrt{5}$; **d)** 1.

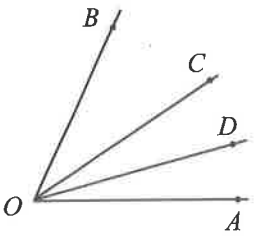
(5p) **6.** Alexandra cumpără o pâine de 3,50 lei și două kilograme de cartofi a 3 lei/kg. Alexandra plătește cu o bancnotă de 10 lei. Casiera spune că fata ar trebui să îi mai dea încă 50 de bani. Afirmația casierei este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

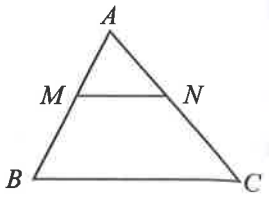
(5p) **1.** Matei parcurge un traseu turistic, având forma triunghiului din figura alăturată, cu perimetrul de 1,8 km. Lungimea pasului lui Matei este de 0,6 m. Numărul de pași pe care îi va face Matei este:
a) 300; **b)** 1080;
c) 3000; **d)** 2160.



(5p) **2.** În figura alăturată, semidreptele OC și OD sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$, respectiv $\sphericalangle AOC$. Unghiul $\sphericalangle BOD$ are măsura de 45°. Măsura unghiului $\sphericalangle AOD$ este:
a) 30°; **b)** 15°;
c) 25°; **d)** 45°.

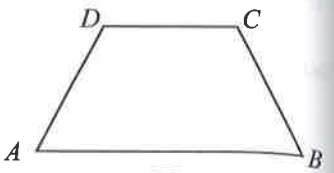


(5p) **3.** În figura alăturată, segmentul MN este în paralel cu latura BC a triunghiului ABC, iar $\frac{AM}{MB}=\frac{2}{3}$. Segmentul BC are lungimea de 15 cm. Lungimea segmentului MN este:



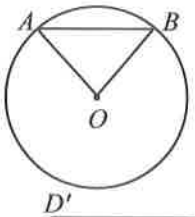
a) 6 cm; **b)** 10 cm;
c) 9 cm; **d)** 4 cm.

(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat un trapez isoscel $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB = 13$ cm, $CD = 7$ cm și $BC = AD = 5$ cm. Aria trapezului este egală cu:



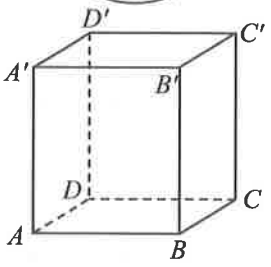
a) 44 cm^2; **b)** 91 cm^2;
c) 30 cm^2; **d)** 40 cm^2.

(5p) **5.** În figura alăturată, AB este o coardă a cercului de centru O și rază 6 cm. Lungimea coardei AB este $6\sqrt{2}$ cm. Măsura unghiului $\measuredangle OAB$ este:



a) 30°; **b)** 45°;
c) 60°; **d)** 75°.

(5p) **6.** O furnică pleacă din vârful A al prismei patrulatere regulate $ABCDA'B'C'D'$ din figura alăturată și ajunge în vârful C', mergând pe fețele laterale ale prismei pe drumul cel mai scurt posibil. Dacă $AB = 5$ cm și $AA' = 10$ cm, lungimea drumului furnicii este:



a) $5\sqrt{5}$ cm; **b)** $10\sqrt{2}$ cm;
c) $5\sqrt{10}$ cm; **d)** $5(1+\sqrt{5})$ cm.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Numărul elevilor dintr-o clasă este cuprins între 15 și 40. Dacă elevii clasei s-ar alinia câte patru sau câte șapte, de fiecare dată ar rămâne un rând cu doar doi elevi.

(2p) **a)** Este posibil ca numărul elevilor clasei să fie 26? Justifică răspunsul.

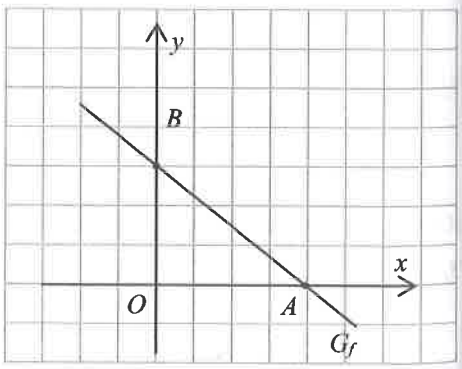
(3p) **b)** Determină numărul elevilor clasei.

2. Considerăm expresia $E(x)=\left(\frac{1}{x^2-x}-\frac{1}{x^2+x}\right)\cdot\frac{x^3-x}{x+2}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1\}$.

(2p) **a)** Arată că $E(x)=\frac{2}{x+2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1\}$.

(3p) **b)** Află valorile întregi ale numărului n pentru care $E(n)$ este număr întreg.

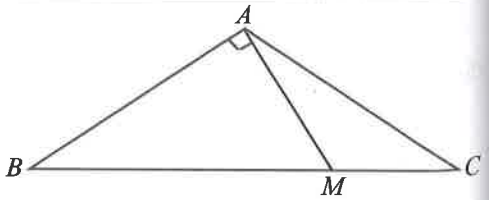
3. Graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, reprezentat în figura alăturată, taie axele Ox și Oy ale sistemului de axe xOy în punctele $A(4, 0)$, respectiv $B(0, 3)$.



(2p) **a)** Arată că $a=-\frac{3}{4}$ și $b = 3$.

(3p) **b)** Calculează perimetrul triunghiului AOB.

4. Triunghiul ABC din figura alăturată este isoscel, cu $\measuredangle BAC = 120°$. Perpendiculara în A pe AB intersectează latura BC în punctul M.



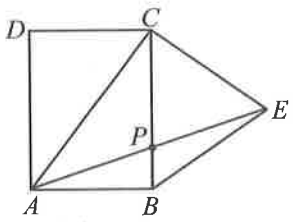
(2p) **a)** Arată că triunghiul AMC este isoscel.

(3p) **b)** Determină valoarea raportului $\frac{MC}{BC}$.

5. În figura alăturată este reprezentată o terasă $ABECD$, unde $ABCD$ este un dreptunghi, iar BCE este un triunghi echilateral. Segmentele AC, AE și BC reprezintă niște pereți despărțitori, iar $\{P\} = AE \cap BC$. Se știe că $AB = 8$ m, iar pereții AC și CE sunt perpendiculari.

(2p) **a)** Calculează suprafața terasei.

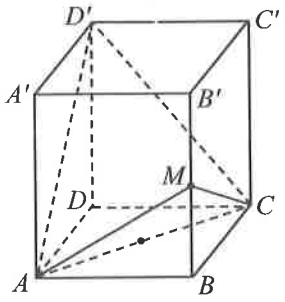
(3p) **b)** Arată că distanța dintre punctele B și P este mai mică de 2,8 m.



6. În figura alăturată, $ABCDA'B'C'D'$ este un cub cu latura de 4 cm, iar M este mijlocul muchiei BB'.

(2p) **a)** Află volumul cubului.

(3p) **b)** Demonstrează că planele $(D'AC)$ și (MAC) sunt perpendiculare.



✦ TESTUL 31 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Cel mai mare divizor comun al numerelor 24 și 36 este:
a) 6; **b)** 8; **c)** 12; **d)** 36.

(5p) **2.** Mihai a depus 2500 de lei la o bancă pentru care a primit, după 1 an, o dobândă de 125 de lei. Dobânda anuală oferită de bancă, exprimată în procente, este de:
a) 2%; **b)** 3%; **c)** 4%; **d)** 5%.

(5p) **3.** Valea Morții din California este situată la –86 m în raport cu nivelul mării, iar Vârful Toaca al Muntelui Ceahlău este situat la +1904 m față de nivelul mării. Diferența de nivel dintre Vârful Toaca și Valea Morții este:
a) 2000 m; **b)** 1990 m; **c)** 1904 m; **d)** 1818 m.

(5p) **4.** Patru colegi sunt parteneri la un proiect. În tabelul de mai jos se poate vedea a câta parte din lucrare a făcut fiecare după trei zile. Cei doi colegi care au lucrat cel mai mult sunt:
a) Corina și Delia; **b)** Delia și Dan;
c) Dan și Emil; **d)** Corina și Dan.

Corina	Delia	Dan	Emil
$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{9}$

(5p) **5.** Rezultatul calculului $\left(\sqrt{8}+\sqrt{72}\right):\left(\sqrt{50}-\sqrt{2}\right)$ este:
a) 2; **b)** 3; **c)** $\sqrt{2}$; **d)** $3\sqrt{2}$.

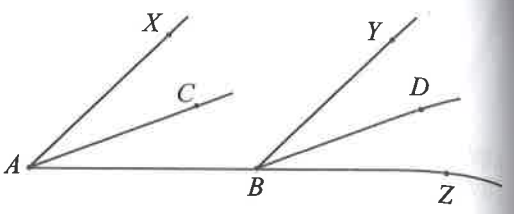
(5p) **6.** David afirmă că „Intervalul (–2, 1] conține două numere întregi negative.” Afirmația lui David este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Numărul pătratelor desenate în figura alăturată este:
a) 9; **b)** 13;
c) 14; **d)** 16.

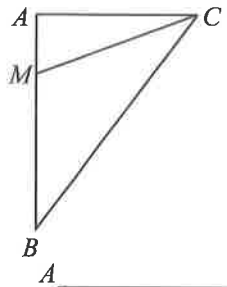
(5p) **2.** În figura alăturată dreptele AX și BY sunt paralele, punctele A, B, Z sunt coliniare, iar semidreptele AC și AD sunt bisectoarele unghiurilor XAZ, respectiv YBZ. Dacă măsura unghiului XAZ este 46°, atunci măsura unghiului DBZ este:

a) 23°; **b)** 30°;
c) 46°; **d)** 60°.



(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC având $\measuredangle A = 90°$, iar CM este bisectoarea unghiului BCA, $M \in AB$. Dacă $AM = 2\sqrt{3}$ cm și $MC = MB$, atunci lungimea ipotenuzei este egală cu:

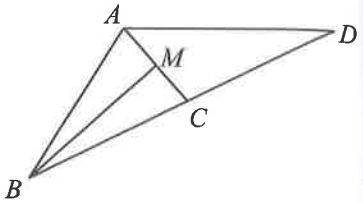
a) 8 cm; **b)** $6\sqrt{3}$ cm;
c) 6 cm; **d)** 12 cm.



(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat un triunghi ABC în care M este mijlocul laturii AC și D este simetricul punctului B față de punctul C. Raportul dintre aria triunghiului ABM și aria triunghiului ABD este:

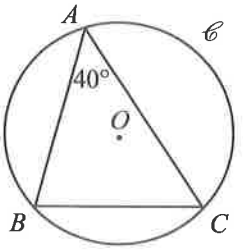
a) $\frac{1}{3}$; **b)** 3;

c) 4; **d)** $\frac{1}{4}$.



(5p) **5.** În figura alăturată, triunghiul ABC, cu $\measuredangle A = 40°$ este înscris în cercul $\mathcal{C}$ cu centrul în O. Măsura unghiului BOC este:

a) 40°; **b)** 80°;
c) 90°; **d)** 100°.



(5p) **6.** Un bazin în formă de paralelipiped dreptunghic are lungimea de 10 m, lățimea de 4 m și înălțimea de 1,5 m. Pentru a umple bazinul este nevoie de:

a) 50 mii ℓ apă; **b)** 60 mii ℓ apă; **c)** 70 mii ℓ apă; **d)** 80 mii ℓ apă.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Într-o școală sunt 6 profesori de matematică, având media vârstelor 40 de ani și 4 profesori de română cu media vârstelor de 25 ani.

(2p) **a)** Calculează suma vârstelor profesorilor de matematică.

(3p) **b)** Determină media vârstelor tuturor profesorilor de matematică și de română din școală.

2. Se consideră expresia $E(x) = \dfrac{x}{x^3+x^2} : \dfrac{(x+2)(2x-1)-x(x+3)+1}{(2x+2)(3x-3)}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

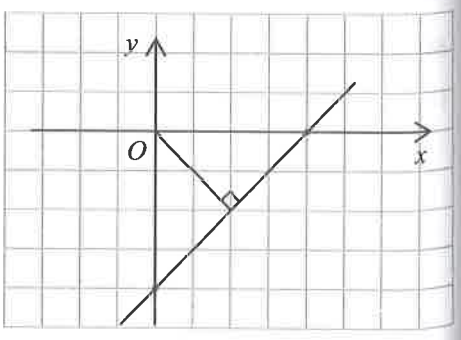
(2p) **a)** Arată că $(x+2)(2x-1)-x(x+3)+1 = x^2-1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(3p) **b)** Demonstrează că $E(x) = \dfrac{6}{x(x+1)}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 4$.

(2p) **a)** Calculează $f\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^2\right) - f\left(\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right)$.

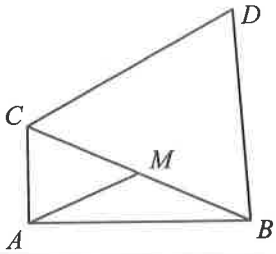
(3p) **b)** Determină distanța de la O, originea sistemului de axe ortogonale xOy, la reprezentarea grafică a funcției f.



4. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC, cu $\measuredangle A = 90°$ și $\measuredangle B = 30°$. În exteriorul lui se construiește triunghiul echilateral BCD. Punctul M este mijlocul laturii BC și $AM = 3$ cm.

(2p) **a)** Arată că perimetrul triunghiului BCD este egal cu 18 cm.

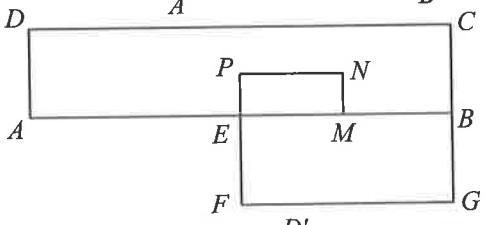
(3p) **b)** Demonstrează că dreptele AM și CD sunt paralele.



5. În figura alăturată este schița unei grădini în care există un bazin $EMNP$. Se știe că $ABCD$, $EFGB$, $EMNP$ sunt dreptunghiuri și $AB = 40$ m, $BE = 20$ m, $BC = BG = EM = 10$ m, $PE = 5$ m.

(2p) **a)** Arată că suprafața bazinului reprezintă mai puțin de 9% din suprafața grădinii.

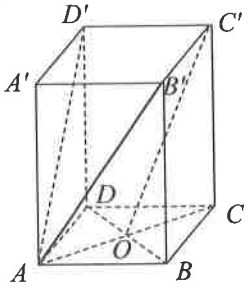
(3p) **b)** Demonstrează că punctele D, E, G sunt coliniare.



6. Figura alăturată reprezintă o prismă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia bazei $AB = 6$ cm și muchia laterală $AA' = 6\sqrt{2}$ cm. Punctul O este centrul pătratului $ABCD$.

(2p) **a)** Arată că patrulaterul $ACC'A'$ este pătrat.

(3p) **b)** Demonstrează că dreapta $C'O$ este paralelă cu planul $AB'D'$.



✦ TESTUL 32 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Cel mai mic multiplu comun al numerelor 18 și 24 este:
a) 6; **b)** 24; **c)** 72; **d)** 144.

(5p) **2.** Un obiect costă 8 lei, iar după o scumpire prețul său devine 10 lei. Procentul cu care s-a realizat scumpirea este:
a) 10%; **b)** 20%; **c)** 25%; **d)** 40%.

(5p) **3.** În tabelul de mai jos este înregistrată evoluția temperaturii medii din Moldova, în cinci luni consecutive.

Luna	Noiembrie	Decembrie	Ianuarie	Februarie	Martie
Temperatura medie	0°C	–3°C	–9°C	–5°C	+8°C

Diferența dintre cea mai scăzută temperatură medie și cea mai ridicată temperatură medie (în această ordine) este:
a) –17°C; **b)** –8°C; **c)** 8°C; **d)** 17°C.

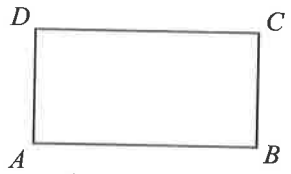
(5p) **4.** Fracția ireductibilă, echivalentă cu $\frac{60}{84}$ este:
a) $\frac{15}{21}$; **b)** $\frac{30}{42}$; **c)** $\frac{5}{7}$; **d)** $\frac{2}{3}$.

(5p) **5.** Media geometrică a numerelor $6\sqrt{3}$ și $\sqrt{12}$ este:
a) $3\sqrt{3}$; **b)** 6; **c)** $4\sqrt{3}$; **d)** 36.

(5p) **6.** Un drum de la Iași la București are 400 km, iar viteza maximă permisă pe acest drum este de 90 km/h. Leon spune că poate parcurge acest drum în 4 ore și 30 de minute, fără a depăși viteza legală. Afirmația lui Leon este:
a) adevărată; **b)** falsă.

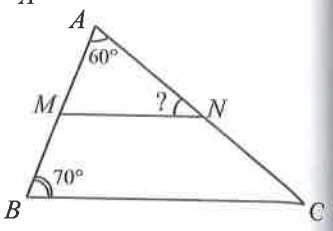
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată este desenat un dreptunghi $ABCD$. Numărul axelor de simetrie ale dreptunghiului $ABCD$ este:



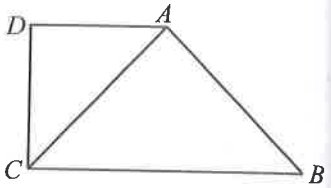
a) 0; **b)** 1;
c) 2; **d)** 4.

(5p) **2.** În figura alăturată punctele M și N sunt mijloacele laturilor AB, respectiv AC ale triunghiului ABC. Dacă măsura unghiului A este $60°$ și măsura unghiului B este $70°$, atunci măsura unghiului ANM este:



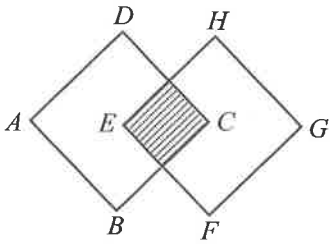
a) $40°$; **b)** $50°$;
c) $60°$; **d)** $70°$.

(5p) **3.** În figura alătură este reprezentat trapezul dreptunghic $ABCD$ având $AD \parallel BC$ și măsura unghiului ADC egală cu $90°$. Triunghiul ABC este echilateral cu perimetrul egal cu 36 cm. Perimetrul trapezului $ABCD$ este egal cu:



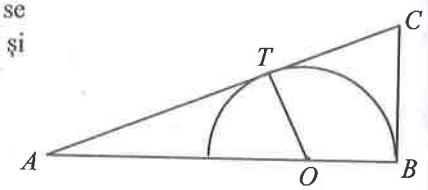
a) $(30+4\sqrt{3})$ cm; **b)** $6(5+\sqrt{3})$ cm;
c) 30 cm; **d)** $54\sqrt{3}$ cm.

(5p) **4.** În figura alăturată este desenat modelul unei bluze format din două pătrate $ABCD$ și $EFGH$, astfel încât $AB = EF = 30$ cm și C este centrul lui $EFGH$, iar E este centrul lui $ABCD$. Aria suprafeței haşurate este egală cu:



a) 60 cm²; **b)** 225 cm²;
c) 450 cm²; **d)** 900 cm².

(5p) **5.** În figura alăturată, semicercul desenat are centrul în punctul O, care se află pe AB și este tangent în T la AC și în B la BC. Dacă $AB = 36$ cm și $BC = 15$ cm, atunci lungimea razei semicercului, OT, este egală cu:



a) 3,5 cm; **b)** 7,8 cm;
c) 10 cm; **d)** 12 cm.

(5p) **6.** Cuşca câinelui lui Mihai are forma unui paralelipiped dreptunghic. Mihai vrea să vopsească toate muchiile cuştii care sunt paralele între ele cu aceeaşi culoare. Numărul maxim de culori de care are nevoie Mihai pentru a face acest lucru este:

a) 3; **b)** 4; **c)** 6; **d)** 12.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Notăm cu n un număr natural care, împărțit pe rând la 12 și la 18, dă câturile nenule și același rest, 7.

(2p) **a)** Este posibil ca n să fie 43? Justifică răspunsul dat.

(3p) **b)** Află toate valorile lui n pentru care $100 < n < 200$.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(x - \frac{1}{1-x}\right) : \frac{x^2-x+1}{x^2-2x+1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

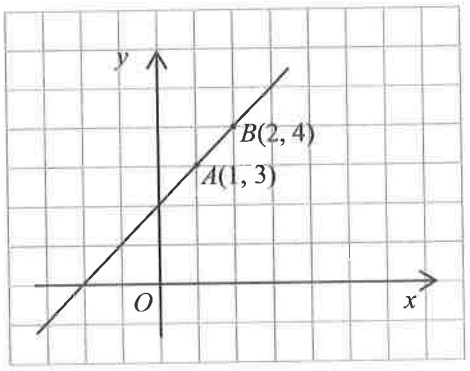
(2p) **a)** Arată că $E(x) = x - 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(3p) **b)** Rezolvă ecuația $|2E(x) - 1| = 1$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=mx+n$, unde și n sunt numere reale.

(2p) **a)** Dacă punctele $A(1, 3)$ și $B(2, 4)$ aparțin graficului funcției f, determină m și n.

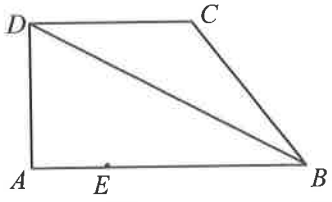
(3p) **b)** Pentru $m = 1$ și $n = 2$ determină unghiul format de reprezentarea grafică a funcției f cu axa Ox, a sistemului de axe ortogonale xOy.



4. Trapezul dreptunghic $ABCD$ din figura alăturată are măsura unghiului A de $90°$ și bazele $AB = 8$ cm, $CD = 5$ cm. Diagonala BD este bisectoarea unghiului ABC.

(2p) **a)** Arată că $AD = 4$ cm.

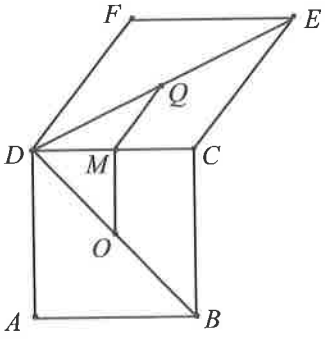
(3p) **b)** Dacă punctul E aparține laturii AB, astfel încât $AE = 3$ cm, demonstrează că dreptele BD și CE sunt perpendiculare.



5. În figura alăturată $ABCD$ este pătrat, iar $DCEF$ este romb cu măsura unghiului CDF egală cu $45°$.

(2p) **a)** Arată că punctele A, C și E sunt coliniare.

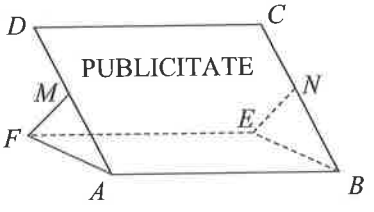
(3p) **b)** Dacă O, M, Q sunt mijloacele segmentelor DB, DC, respectiv DE, demonstrează că $OM = QM$.



6. În figura alăturată este reprezentat un panou publicitar format din două dreptunghiuri $ABCD$ și $ABEF$, situate în plane diferite și fixate cu tijele FM și EN, unde M și N sunt mijloacele segmentelor AD, respectiv BC. Se știe că $AB = 1{,}2$ m, $AD = 2$ m, $FD = \sqrt{3}$ m, $FM = 1$ m.

(2p) **a)** Arată că punctele D, C, E și F sunt coplanare.

(3p) **b)** Calculează aria suportului $ABEF$.

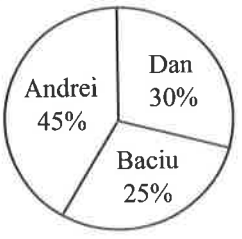


✦ TESTUL 33 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Numărul numerelor de două cifre care sunt multiplii lui 9 este:
a) 9; **b)** 10; **c)** 11; **d)** 12.

(5p) **2.** Andrei, Baciu și Dan au participat la un concurs cu public. În diagrama alăturată se poate vedea cum au fost distribuite voturile publicului. Dacă Dan a primit 36 de voturi, atunci numărul persoanelor care au votat este:
a) 84; **b)** 100;
c) 106; **d)** 120.



(5p) **3.** Cel mai mare dintre numerele $A = 2^{16} : (-2)^{11}$, $B = (-4) \cdot (-3)$, $C = 2^{10} : (-2)^6$, $D = (3 - 8) \cdot (-3)$ este:
a) A; **b)** B; **c)** C; **d)** D.

(5p) **4.** Fie $a = 0{,}5 + 0{,}(3) + 0{,}1(6)$ şi $b = \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right) \cdot 12$. Dintre următoarele relaţii, cea adevărată este:
a) $a > 1$; **b)** $b \geq \frac{3}{2}$; **c)** $a = b$; **d)** $a + b < 2$.

(5p) **5.** În tabelul alăturat sunt trecute numerele scrise pe tablă de patru eleve.

Elvira	$\sqrt{3^2 + 4^2}$
Daria	$-\sqrt{3 \cdot 12}$
Ana	$-\sqrt{4 + 4}$
Iulia	$\sqrt{1\frac{7}{9}}$

Eleva care a scris pe tablă un număr irațional este:
a) Elvira; **b)** Daria;
c) Ana; **d)** Iulia.

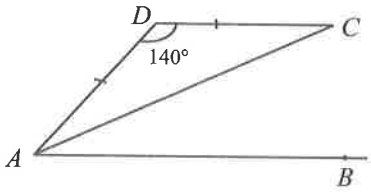
(5p) **6.** Propoziţia: „Cu o bancnotă de 50 de lei, Costin a cumpărat 3 îngheţate de 4,5 lei fiecare, o ciocolată de 10 lei şi 3 prăjituri de 9 lei fiecare.” este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată, punctul B se află pe segmentul AC, iar M, N, P, Q sunt mijloacele segmentelor AB, BC, AM, respectiv CN. Relaţia adevărată este:

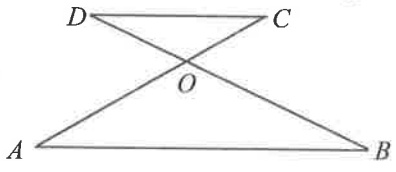
a) $PQ = \frac{AC}{2}$; **b)** $PQ = \frac{3}{4}AC$;
c) $PQ = 2MN$; **d)** $PQ = \frac{4}{3}MN$.

(5p) **2.** În figura alăturată dreptele AB şi DC sunt paralele, $AD = DC$ şi $\measuredangle ADC = 140°$. Măsura unghiului BAC este:



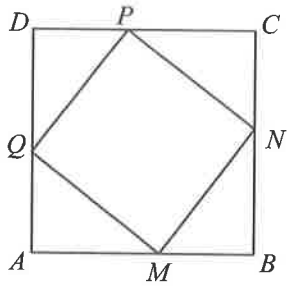
a) 20°; **b)** 30°;
c) 40°; **d)** 60°.

(5p) **3.** În figura alăturată sunt reprezentate schematic patru localităţi A, B, C şi D, conectate prin două drumuri drepte AC şi BD care se intersectează în O. Dreptele AB şi CD sunt paralele şi $AO = 50$ km, $BO = 60$ km, iar distanţa DO este cu 5 km mai mare decât distanţa OC. Lungimea drumului OC este:



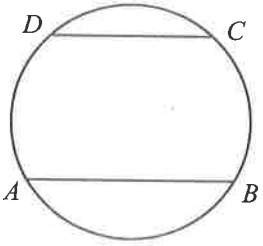
a) 5 km; **b)** 10 km;
c) 25 km; **d)** 50 km.

(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat un tort $ABCD$, în formă de pătrat cu latura $AB = 35$ cm. Ioana taie cele patru colţuri AMQ, BNM, CPN şi DQP, unde $AM = BN = CP = DQ = 20$ cm. Aria suprafeţei rămase este:



a) 225 cm^2; **b)** 400 cm^2;
c) 600 cm^2; **d)** 625 cm^2.

(5p) **5.** În figura alăturată este desenat un cerc cu raza de 5 cm şi două coarde paralele $AB = 8$ cm şi $CD = 6$ cm. Dacă centrul cercului este situat între cele două coarde, atunci distanţa dintre coardele AB şi CD este egală cu:



a) 6 cm;
b) 7 cm;
c) 8 cm;
d) 9 cm.

(5p) **6.** Pe cele 6 fețe ale unui cub cu latura de 5 cm se lipește câte un cub cu latura de 5 cm. Aria totală a poliedrului astfel obținut este egală cu:
a) 400 cm^2; **b)** 600 cm^2; **c)** 750 cm^2; **d)** 900 cm^2.

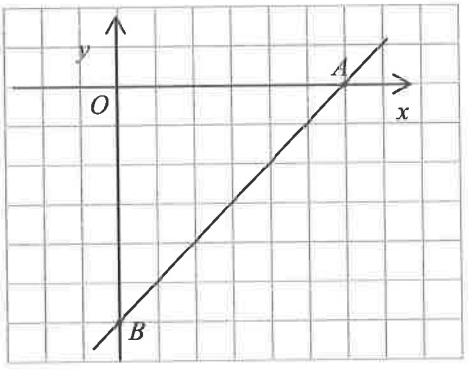
SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. În cabinetul de matematică sunt tetraedre și cuburi din plastic care au, în total, 44 de vârfuri și 38 de fețe.
(2p) **a)** Este posibil ca în cabinetul de matematică să fie 6 tetraedre și 3 cuburi? Justificați răspunsul dat.
(3p) **b)** Află câte tetraedre și câte cuburi sunt în cabinetul de matematică.

2. Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{x^2-4}{x^2-9}-1\right):\left(\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x^2-9}\right)$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-3,\ \frac{1}{2},\ 3\right\}$.

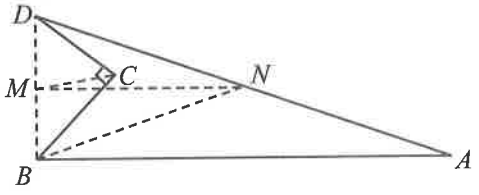
(2p) **a)** Arată că $E(x)=\frac{5}{2x-1}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-3,\ \frac{1}{2},\ 3\right\}$.

(3p) **b)** Determină toate numerele întregi a, pentru care $E(a)$ este, de asemenea, număr întreg.

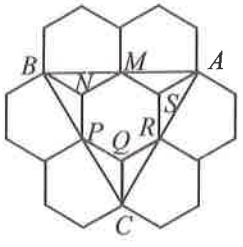


3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-6$.
(2p) **a)** Calculează $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(9)\cdot f(10)$.
(3p) **b)** Determină coordonatele punctelor de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox și Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy.

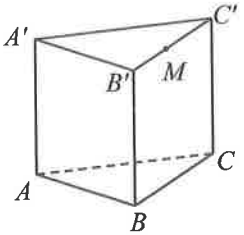
4. În figura alăturată avem: $\measuredangle BCD=90°$, $AB=12$ cm, $BC=4$ cm, $CD=3$ cm și $AD=13$ cm.
(2p) **a)** Arată că dreptele AB și BD sunt perpendiculare.
(3p) **b)** Dacă M și N sunt mijloacele segmentelor BD, respectiv AD, calculează suma $CM+MN+NB$.



5. Un fagure de miere este format din șapte hexagoane regulate cu latura de 2 cm, ca în figura alăturată.
(2p) **a)** Arată că vârfurile A, M și B sunt coliniare.
(3p) **b)** Calculează perimetrul triunghiului ABC.



6. În figura alăturată este reprezentată o prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu latura bazei $AB=12$ cm și muchia laterală $AA'=8$ cm. Punctul M este mijlocul segmentului $B'C'$
(2p) **a)** Determină lungimea segmentului AM.
(3p) **b)** Calculează tangenta unghiului format de dreapta $A'B$ cu planul BCC'.



✦ TESTUL 34 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Suma numerelor prime mai mici decât douăzeci este:
a) 60; **b)** 64; **c)** 77; **d)** 92.

(5p) **2.** Numărul natural nenul x pentru care $\frac{6}{x}=\frac{3x}{2}$ este:
a) 4; **b)** 2; **c)** -2; **d)** 3.

(5p) **3.** Suma numerelor întregi din intervalul $(-10, 7]$ este:
a) -27; **b)** -17; **c)** 0; **d)** 17.

(5p) **4.** Un bazin gol poate fi umplut cu apă, deschizând oricare dintre robinetele R_1, R_2, R_3, după cum se poate vedea în tabelul următor.

Robinetul	R_1	R_2	R_3
Timpul de umplere al bazinului	4 *h*	6 *h*	12 *h*

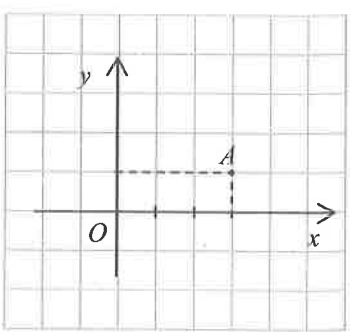
Dacă sunt deschise toate cele trei robinete, atunci bazinul gol se umple în:
a) 1 *h*; **b)** 2 *h*; **c)** 3 *h*; **d)** 6 *h*.

(5p) **5.** Fie mulțimea $A=\left\{-5;\ -\frac{2}{\sqrt{13}};\ -0,3;\ 1,(4);\ \sqrt{3};\ 3\right\}$. Care dintre următoarele afirmații nu este adevărată:
a) un singur element al mulțimii A este număr natural;
b) un singur element al mulțimii A este număr întreg;
c) în mulțimea A sunt patru numere raționale;
d) în mulțimea A sunt două numere iraționale.

(5p) **6.** Mașina lui Andrei are un rezervor de 46 ℓ și consumă 6 ℓ de benzină pentru a parcurge 100 de km. Andrei spune că poate parcurge 800 km, plecând cu rezervorul plin și fără să alimenteze pe parcurs. Afirmația lui Andrei este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

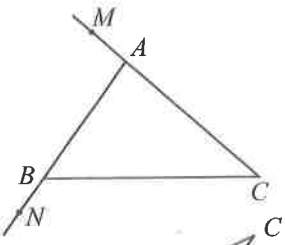
(5p) **1.** În figura alăturată este reprezentat punctul $A(3, 1)$ într-un sistem de axe ortogonale xOy. Coordonatele simetricului punctului A față de originea O sunt:
a) $(-3, -1)$;
b) $(-3, 1)$;
c) $(3, -1)$;
d) $(-1, -3)$.



(5p) **2.** În figura alăturată este reprezentat un triunghi ABC și două dintre unghiurile sale exterioare. Dacă $\sphericalangle MAB = 108°$ și $\sphericalangle CBN = 120°$, atunci măsura unghiului ACB este:

a) 132°; **b)** 48°;

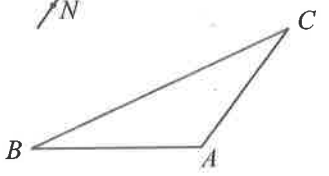
c) 72°; **d)** 60°.



(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat un triunghi isoscel ABC, având baza $BC = 6\sqrt{3}$ cm și $\sphericalangle A = 120°$. Lungimea proiecției ortogonale a segmentului BC pe dreapta AB este egală cu:

a) $3\sqrt{3}$ cm; **b)** 9 cm;

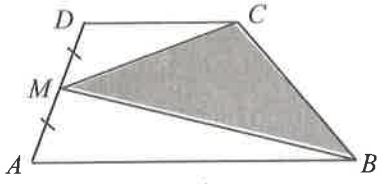
c) 3 cm; **d)** $12\sqrt{3}$ cm.



(5p) **4.** Figura alăturată este reprezentată o tabletă de ciocolată $ABCD$ cu aria de 60 cm^2 și $AB \parallel CD$. Adana a mâncat din ciocolată bucata BMC, unde M este mijlocul laturii AD. Aria bucății mâncate de Adana este:

a) 20 cm^2; **b)** 30 cm^2;

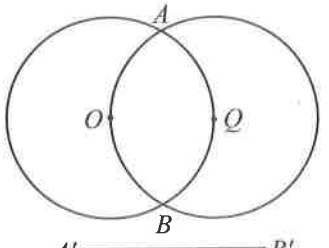
c) 40 cm^2; **d)** alt răspuns.



(5p) **5.** În figura alăturată sunt desenate două cercuri, cu centrele în O și Q, astfel încât fiecare cerc are centrul pe celălalt cerc. Cele două cercuri se intersectează în A și B. Dacă $OQ = 6$ cm, atunci lungimea segmentului AB este:

a) 6 cm; **b)** $4\sqrt{3}$ cm;

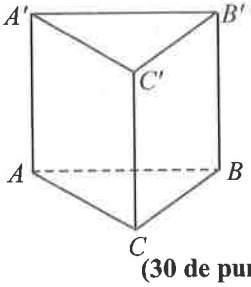
c) $6\sqrt{3}$ cm; **d)** 12 cm.



(5p) **6.** În figura alăturată este reprezentată o prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ ale cărei fețe laterale sunt pătrate cu aria egală cu 144 cm^2. Volumul prismei este egal cu:

a) 432 cm^3; **b)** $36\sqrt{3}$ cm^3;

c) $432\sqrt{3}$ cm^3; **d)** $108\sqrt{3}$ cm^3.



SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. La un test cu 20 de întrebări se acordă 2 puncte pentru un răspuns corect și se scad 5 puncte pentru un răspuns greșit sau lipsă.

(2p) **a)** Află punctajul maxim posibil și punctajul minim posibil.

(3p) **b)** Dacă Andrei a obținut la test 19 puncte, determină la câte întrebări a răspuns el corect.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{x^2+4}{2x} - 2\right) : \left(\frac{2x^2+4x}{x^2+4x+4} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2}\right)$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$.

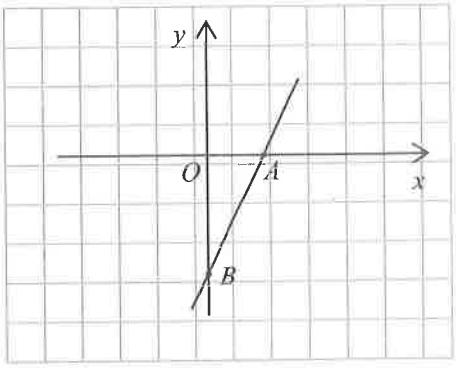
(2p) **a)** Arată că $\frac{2x^2+4x}{x^2+4x+4} - 1 = \frac{x-2}{x+2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

(3p) **b)** Demonstrează că $\left[E(x) - 2\right]^{100} = 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$.

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$.

(2p) **a)** Determină coordonatele punctelor A și B, intersecțiile reprezentării grafice a funcției f cu axa Ox, respectiv axa Oy ale unui sistem de axe ortogonale xOy.

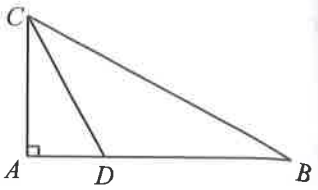
(3p) **b)** Determină coordonatele punctelor de pe reprezentarea grafică a funcției f care se află la 3 unități de originea O a sistemului xOy.



4. Triunghiul dreptunghic ABC din figura alăturată are ipotenuza $BC = 10$ cm şi cateta $AC = 6$ cm. Punctul D aparţine dreptei AB, astfel încât $AD = 3$ cm.

(2p) **a)** Află distanţa de la punctul D la dreapta BC.

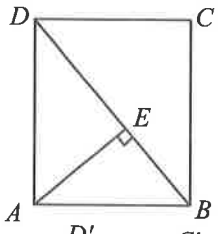
(3p) **b)** Demonstrează că CD este bisectoarea unghiului ACB.



5. În figura alăturată este desenat dreptunghiul $ABCD$, cu $AB = 15$ cm, $BC = 20$ cm. Punctul E este proiecţia lui A pe BD.

(2p) **a)** Calculează lungimea segmentului BE.

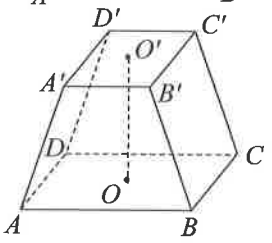
(3p) **b)** Determină distanţa de la punctul E la dreapta CD.



6. În figura alăturată este reprezentat acoperişul unei case $ABCDA'B'C'D'$ în formă de trunchi de piramidă patrulateră regulată cu latura bazei mari $AB = 10$ m, latura bazei mici $A'B' = 2$ m şi înălţimea $OO' = 3$ m (O şi O' fiind centrele bazelor).

(2p) **a)** Calculează câţi metri pătraţi de tablă sunt necesari pentru acest acoperiş (acoperim cu tablă suprafaţa laterală şi baza mică a trunchiului, iar pierderile le considerăm neglijabile).

(3p) **b)** Determină distanţa de la punctul O la faţa laterală $BCC'B'$.



✦ TESTUL 35 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

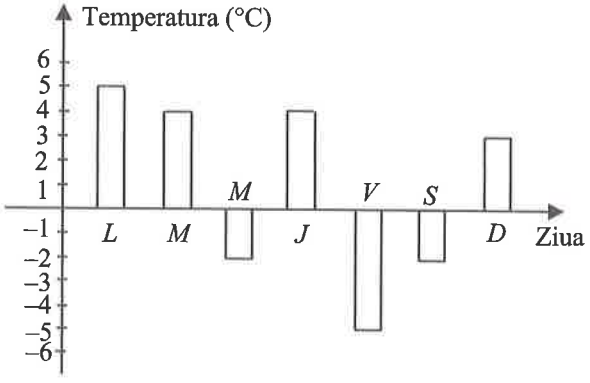
(5p) **1.** Restul împărţirii lui 58 la 7 este:

a) 0; **b)** 2; **c)** 4; **d)** 6.

(5p) **2.** O urnă are 6 bile roşii, 10 bile galbene şi 4 bile albastre. Dacă extragem din urnă o bilă la întâmplare, probabilitatea ca aceasta să fie albastră este:

a) 10%; **b)** 20%; **c)** 30%; **d)** 40%.

(5p) **3.** În diagrama de mai jos sunt prezentate temperaturile medii într-o săptămână din luna ianuarie.



Cea mai mare diferenţă pozitivă dintre temperaturile medii din două zile consecutive este:

a) 5°C; **b)** 8°C; **c)** 9°C; **d)** 10°C.

(5p) **4.** Patru elevi au calculat media aritmetică a numerelor raționale $-\frac{3}{5}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ și $\frac{3}{4}$. Rezultatele obținute de ei sunt înscrise în tabelul de mai jos.

Alin	Cristian	Florin	Sorin
$-\frac{1}{240}$	$-\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{60}$	$-\frac{1}{15}$

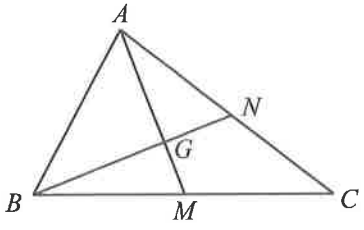
Elevul care a găsit răspunsul corect este:
a) Alin; **b)** Cristian; **c)** Florin; **d)** Sorin.

(5p) **5.** Numărul întregilor cuprinși între $-2\sqrt{3}$ și $3\sqrt{2}$ este:
a) 3; **b)** 6; **c)** 7; **d)** 8.

(5p) **6.** La Colegiul „Negruzzi" din Iași, mandatul unui director este de exact 3 ani. Laura afirmă că un elev care învață la „Negruzzi" din clasa a V-a până în clasa a XII-a poate avea cel mult 4 directori diferiți. Afirmația Laurei este:
a) adevărată; **b)** falsă.

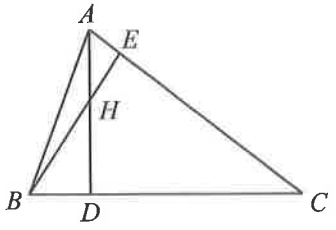
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată, punctele M și N sunt mijloacele laturilor BC, respectiv AC ale triunghiului ABC, iar G este punctul de intersecție a dreptelor AM și BN. Valoarea raportului $\frac{AG}{GM}$ este:



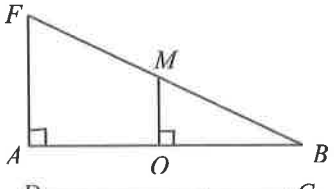
a) $\frac{1}{2}$; **b)** 2;
c) $\frac{3}{2}$; **d)** 3.

(5p) **2.** În figura alăturată H este punctul de intersecție a înălțimilor AD și BE ale triunghiului ABC. Dacă măsura unghiului C este 70°, atunci măsura unghiului AHB este:



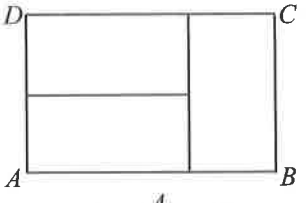
a) 35°; **b)** 70°;
c) 110°; **d)** 140°.

(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat schematic un felinar F aflat la înălțimea $AF = 6$ m față de sol și un copil OM, $OM = 1{,}6$ m, aflat la distanța $AO = 11$ m de felinar. Dacă felinarul luminează, atunci umbra OB, lăsată de OM pe pământ, are lungimea de:



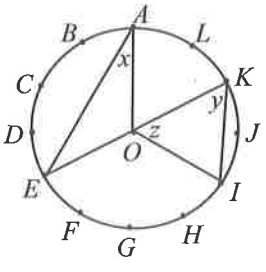
a) 1,6 m; **b)** 2 m;
c) 3 m; **d)** 4 m.

(5p) **4.** În figura alăturată, trei piese de domino dreptunghiulare, cu lățimea de 5 cm, sunt asamblate pentru a forma un dreptunghi $ABCD$. Aria dreptunghiului $ABCD$ este:



a) 75 cm²; **b)** 100 cm²;
c) 125 cm²; **d)** 150 cm².

(5p) **5.** Circumferința cercului, cu centrul O, din figura alăturată este împărțită în 12 arce egale prin punctele A, B, ..., L. Valoarea sumei $x + y + z$ este:



a) 120°; **b)** 150°;
c) 180°; **d)** 200°.

(5p) **6.** La exterior, zidurile unui fort arată ca un paralelipiped dreptunghic, fără baze, cu dimensiunile: 12 m, 10 m, 3 m. Grosimea zidurilor este de 1 m. Fortul a fost construit utilizând blocuri cubice de piatră, având latura de 1 m. Numărul blocurilor folosite pentru construirea fortului a fost:

a) 120; **b)** 150; **c)** 300; **d)** 360.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Bursa lunară a unui elev este mai mică decât 450 de lei cu jumătate din valoarea ei.

(2p) **a)** Este posibil ca această bursă să fie 320 de lei? Justificați răspunsul.

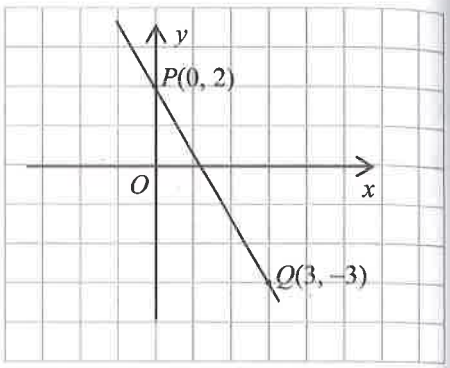
(3p) **b)** Află valoarea bursei lunare.

2. Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{2}{x-2}+\frac{x}{x+2}\right):\frac{x^2+4}{x^2-x-2}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,2\}$.

(2p) **a)** Arată că $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

(3p) **b)** Demonstrează că $E(x)=\frac{x+1}{x+2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,2\}$.

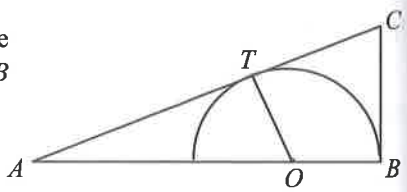
3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m-3)x+2m$, unde $m\in\mathbb{R}$.



(2p) **a)** Determină m, știind că $A(1, 0)$ aparține graficului funcției f.

(3p) **b)** Pentru $m = 1$, stabilește dacă dreapta din figura alăturată este sau nu reprezentarea grafică a funcției f.

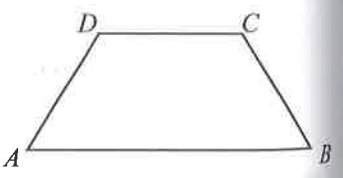
4. În figura alăturată, semicercul desenat are centrul în punctul O, care se află pe segmentul AB și este tangent în T dreptei AC și tangent în B dreptei BC. Se știe că $AB = 36$ cm și $BC = 15$ cm.



(2p) **a)** Arată că $AC = 39$ cm.

(3p) **b)** Determină lungimea razei semicercului.

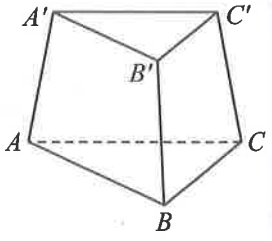
5. Trapezul isoscel $ABCD$ din figura alăturată are baza mare $AB = 12$ cm și $AD = DC = CB = 6$ cm.



(2p) **a)** Demonstrează că AC este bisectoarea unghiului BAD.

(3p) **b)** Determină măsura unghiului BAD.

6. Soclul unei statui are forma unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu latura bazei mari $AB = 12$ m, latura bazei mici $A'B' = 6$ m și apotema trunchiului de 2 m.



(2p) **a)** Calculează înălțimea soclului.

(3p) **b)** Determină măsura unghiului format de una dintre fețele laterale ale trunchiului cu planul orizontal.

✦ TESTUL 36 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Cel mai mic număr natural par de patru cifre distincte este:
a) 1000; **b)** 1023; **c)** 1024; **d)** 1234.

(5p) **2.** În tabelul de mai jos este prezentată suprafața cultivată cu grâu în patru ferme și producția totală de grâu obținută de fiecare fermă.

Ferma	A	B	C	D
Nr. hectare	10	12	9	5
Producția totală	35 t	58 t	36 t	26 t

Cea mai mare producție de grâu la hectar a obținut-o ferma:
a) A; **b)** B; **c)** C; **d)** D.

(5p) **3.** Fie numerele întregi $a = (-2)^4 : (-2)^3$, $b = 3^5 : (-3)^4$, $c = (-5)^3 : 5^2$. Numărul $a + b + c$ este egal cu:
a) –10; **b)** –4; **c)** 0; **d)** 6.

(5p) **4.** Dacă numărul natural n verifică relația $\frac{1}{6} < \frac{n}{12} < \frac{1}{2}$, atunci n aparține mulțimii:
a) {2, 6}; **b)** {3, 4, 5}; **c)** {2, 3, 4, 5}; **d)** {2, 3, 4, 5, 6}.

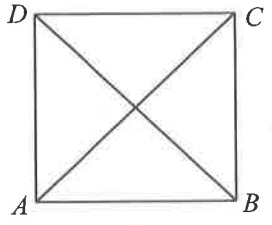
(5p) **5.** Efectuând calculul $\sqrt{3}\left(\sqrt{27}-\sqrt{12}\right)$, patru colegi au obținut rezultatele din tabelul alăturat. Dintre cei patru colegi, cel care a obținut rezultatul corect este:
a) Robert; **b)** Sabin;
c) Cornel; **d)** Lucian.

Robert	3
Sabin	$\sqrt{3}$
Cornel	$\sqrt{15}$
Lucian	1

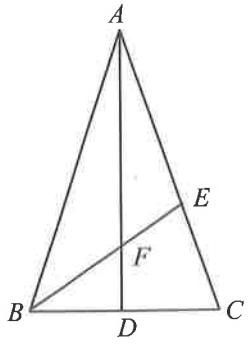
(5p) **6.** Ana are 63 de lei. Bia are cu 2 lei mai mult decât Călina, iar Călina are $\frac{1}{3}$ din suma pe care o are Ana.
Propoziția: „Bia are mai mult de 23 de lei." este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată este desenat un pătrat $ABCD$. Numărul axelor de simetrie ale pătratului $ABCD$ este:
a) 0;
b) 2;
c) 4;
d) 8.

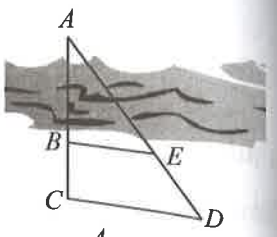


(5p) **2.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul isoscel ABC cu baza BC și măsura unghiului BAC de 20°. Înălțimea AD și bisectoarea BE se intersectează în punctul F. Măsura unghiului AFB este egală cu:
a) 60°;
b) 100°;
c) 130°;
d) 150°.



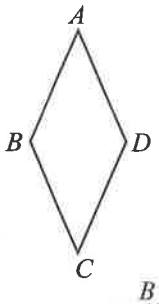
(5p) **3.** Pentru a măsura lățimea AB a unui râu putem determina distanțele BC, CD și BE din figura alăturată, unde $B \in (AC)$, $E \in (AD)$ și $BE \parallel CD$. Dacă $BC = 45$ m, $CD = 90$ m și $BE = 60$ m, atunci AB (lățimea râului) este:

a) 45 m; **b)** 60 m;
c) 80 m; **d)** 90 m.



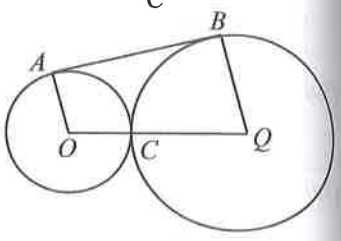
(5p) **4.** În figura alăturată este desenat un pandantiv $ABCD$ în formă de romb cu diagonala $BD = 10$ mm și perimetrul de 52 mm. Aria pandantivului este:

a) 105 mm^2; **b)** 120 mm^2;
c) 144 mm^2; **d)** 160 mm^2.



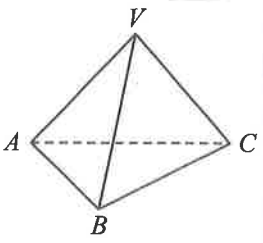
(5p) **5.** În figura alăturată sunt desenate două cercuri tangente în punctul C. Cercul cu centrul în O are raza de 1 cm, iar cercul cu centrul în Q are raza de 4 cm. Dreapta AB este tangentă în A primului cerc și în B celui de-al doilea cerc. Lungimea segmentului AB este:

a) 4 cm; **b)** 5 cm;
c) 6 cm; **d)** 7 cm.



(5p) **6.** Piramida triunghiulară regulată $VABC$, din figura alăturată, are $VA = 5$ cm și $AB = 6$ cm. Aria laterală a piramidei este egală cu:

a) 12 cm^2; **b)** 72 cm^2;
c) 36 cm^2; **d)** 16 cm^2.



SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Într-un bloc sunt 18 apartamente cu două camere sau cu trei camere, în total 42 de camere.

(2p) **a)** Dacă ar fi numai apartamente cu două camere, calculează câte camere ar fi în bloc.

(3p) **b)** Află câte apartamente cu două camere sunt, de fapt, în bloc.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{1+x^2}{1-x^2} - \frac{1-x^2}{1+x^2}\right) : \left(\frac{1+x}{x-x^2} - \frac{1-x}{x+x^2}\right)$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

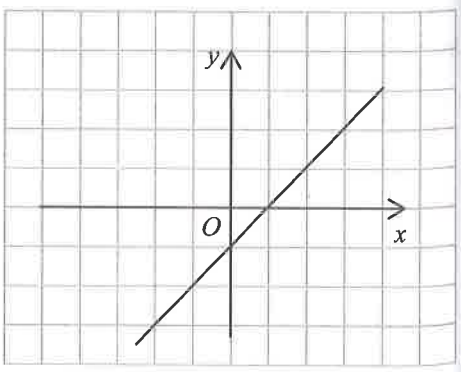
(2p) **a)** Arată că $E(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

(3p) **b)** Demonstrează că $0 \le E(x) < 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 1$.

(2p) **a)** Calculează $f\left(1+\sqrt{2}\right) - f\left(1-\sqrt{2}\right)$.

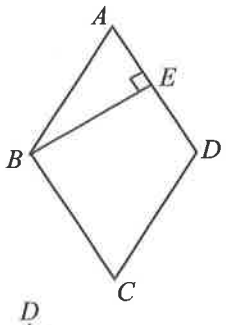
(3p) **b)** Dacă punctele $A(-2, a)$ și $B(3, b)$ aparțin graficului funcției f, determină lungimea segmentului AB.



4. În figura alăturată este reprezentat un parc $ABCD$, în formă de romb, împrejmuit cu un gard, având lungimea de 680 m. Distanța, BE, dintre laturile AB și CD este de 80 m.

(2p) **a)** Află lungimea laturii AB.

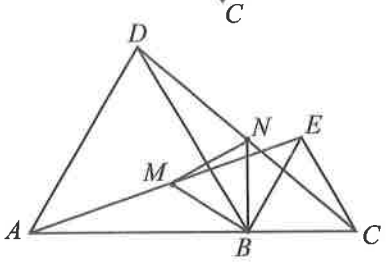
(3p) **b)** Calculează tangenta unghiului BAD, știind că $\measuredangle BAD < 90°$.



5. În figura alăturată triunghiurile ABD și BCE sunt echilaterale, $B \in (AC)$, $AB = 12$ cm și $BC = 6$ cm. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor AE, respectiv CD.

(2p) **a)** Calculează lungimea segmentului AE.

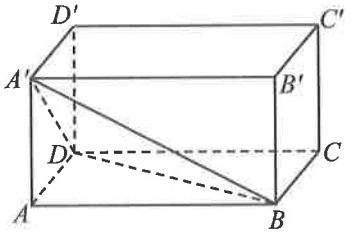
(3p) **b)** Determină măsura unghiului MBN.



6. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ din figura alăturată, are $AB = 20$ cm, $AD = 15$ cm și $AA' = 5$ cm.

(2p) **a)** Calculează aria triunghiului $A'BD$.

(3p) **b)** Determină distanța de la punctul A la planul $A'BD$.



✦ TESTUL 37 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Suma valorilor lui x pentru care numărul $\overline{4x1}$ se divide cu 3 este:

a) 9; **b)** 12; **c)** 15; **d)** 18.

(5p) **2.** În tabelul următor sunt prezentate rezultatele unei grupe de 10 elevi la un test de matematică.

Nota	5	6	7	8	9	10
Numărul de elevi	1	4	1	2	1	1

Procentul elevilor care au luat note mai mari decât media grupei este:

a) 20%; **b)** 30%; **c)** 40%; **d)** 50%.

(5p) **3.** Numărul elementelor mulțimii $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 10\}$ este:

a) 21; **b)** 20; **c)** 11; **d)** 10.

(5p) **4.** Numărul $n \in \mathbb{N}^*$ verifică relația $\frac{12}{5} \leq \frac{24}{n} \leq 4$ dacă și numai dacă:

a) $n \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$; **b)** $n \in \{7, 8, 9, 10\}$; **c)** $n \in \{7, 8, 9\}$; **d)** $n \in \{8\}$.

(5p) **5.** Patru elevi au primit de la profesorul lor câte un exercițiu, așa cum se poate vedea în tabelul de mai jos.

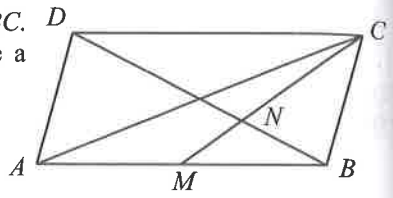
Marian	$2\sqrt{3}+1-\left(2+2\sqrt{3}\right)$
Răzvan	$\left(\sqrt{2}+\sqrt{8}\right)\cdot\sqrt{2}$
Marius	$\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)$
Ștefan	$\left(\sqrt{12}+\sqrt{75}\right):\sqrt{3}$

Elevul care a obținut ca rezultat un număr irațional este:
a) Marian; **b)** Răzvan; **c)** Marius; **d)** Ștefan.

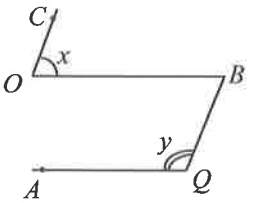
(5p) **6.** Dana s-a născut miercuri, 22.07.2020. Mama Danei crede că aceasta va împlini vârsta de 493 zile într-o zi de sâmbătă. Presupunerea mamei este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

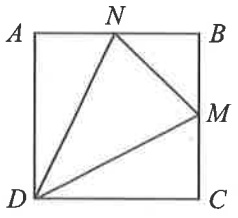
(5p) **1.** În figura alăturată este desenat un paralelogram $ABCD$ cu $AB \neq BC$. Punctul M este mijlocul laturii AB, iar N este punctul de intersecție a dreptelor BD și CM. Pentru triunghiul ABC, punctul N este:
a) centrul cercului înscris;
b) ortocentrul;
c) centrul cercului circumscris;
d) centrul de greutate.



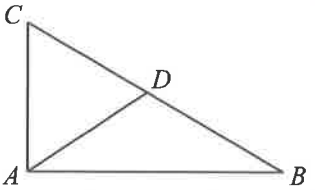
(5p) **2.** În figura alăturată, dreptele QA și OB sunt paralele, iar dreptele QB și OC sunt, de asemenea, paralele. Valoarea sumei $x + y$ este:
a) 90°;
b) 180°;
c) 120°;
d) nu se poate preciza.



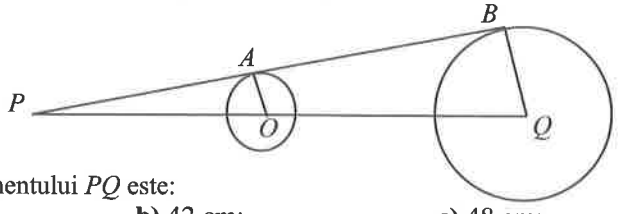
(5p) **3.** În figura alăturată, $ABCD$ este un pătrat, iar M și N sunt mijloacele segmentelor BC, respectiv AB. Raportul dintre aria triunghiului DMN și aria pătratului $ABCD$ este egal cu:
a) $\frac{8}{3}$; **b)** $\frac{3}{4}$;
c) $\frac{3}{8}$; **d)** $\frac{2}{5}$.



(5p) **4.** În figura alăturată terenul ABC, cu dimensiunile $AB = 400$m, $BC = 500$ m și $CA = 300$ m, a fost împărțit în două parcele de perimetre egale, ABD și ACD, unde D este un punct pe latura BC. Aria parcelei ABD este:
a) 12000 m^2; **b)** 24000 m^2;
c) 25000 m^2; **d)** 30000 m^2.



(5p) **5.** În figura de mai jos cercul cu centrul în O are raza de 3 cm, cercul cu centrul în Q are raza de 9 cm, iar distanța OQ este de 24 cm. Tangenta în A la primul cerc și în B la al doilea cerc intersectează linia centrelor în P.



Lungimea segmentului PQ este:
a) 36 cm; **b)** 42 cm; **c)** 48 cm; **d)** 60 cm.

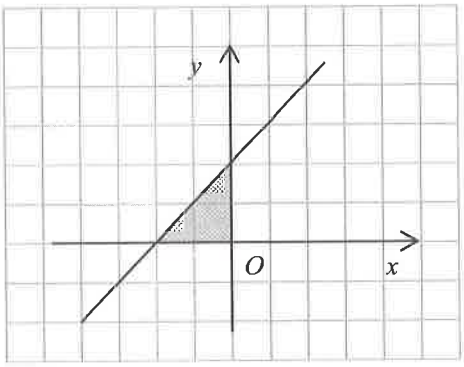
(5p) **6.** Unul dintre monumentele egiptene are forma unei piramide patrulatere regulate cu apotema de 35 m și înălțimea de 28 m. Numărul metrilor cubi de piatră folosită pentru construcția piramidei a fost:
a) 980; **b)** 4116; **c)** 12348; **d)** 16464.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

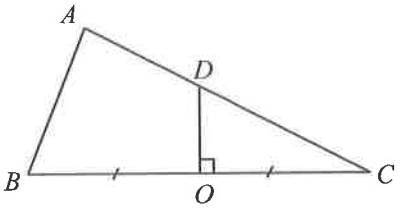
1. Ioana a cumpărat mai multe flori și vrea să le pună în vazele pe care le are în casă. Ea a observat că, dacă le pune câte cinci într-o vază, rămân opt pe dinafară, iar dacă ar pune câte șapte, atunci ar umple toate vazele, cu excepția uneia, care ar avea o singură floare.
(2p) **a)** Este posibil ca Ioana să aibă cinci vaze în casă? Justificați răspunsul dat.
(3p) **b)** Află câte vaze are Ioana.

2. Se consideră expresia $E(x) = \dfrac{(x^2+4x+3)(x^2+3x+2)}{x^2+5x+6}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$.
(2p) **a)** Arată că $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
(3p) **b)** Demonstrează că $E(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$.

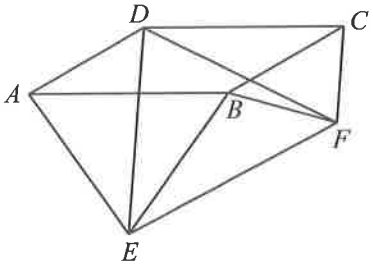
3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = mx + n$, unde $m, n \in \mathbb{R}$.
(2p) **a)** Determină m și n, știind că punctele $A(1, 3)$ și $B(2, 4)$ aparțin graficului funcției.
(3p) **b)** Pentru $m = 1$ și $n = 2$, determină aria triunghiului format de reprezentarea grafică a funcției f cu axele Ox și Oy ale sistemului ortogonal xOy.



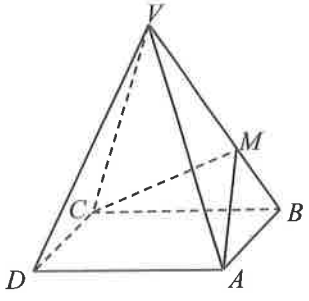
4. În figura alăturată este desenat triunghiul ABC cu $AB = 30$ cm, $BC = 50$ cm și $CA = 40$ cm. Mediatoarea laturii BC intersectează pe BC în punctul O și pe AC în punctul D.
(2p) **a)** Calculează perimetrul triunghiului ABO.
(3p) **b)** Determină lungimea segmentului DO.



5. În figura alăturată este desenat un paralelogram $ABCD$ cu $\measuredangle BAD = 30°$, $AB = 8$ cm și $BC = 4$ cm și triunghiurile echilaterale ABE și BCF.
(2p) **a)** Calculează lungimea segmentului DE.
(3p) **b)** Demonstrează că triunghiul DEF este echilateral.



6. În figura alăturată este reprezentată schematic o stâncă în formă de piramidă patrulateră regulată $VABCD$, cu latura bazei $AB = 30$ m și muchia laterală $VA = 25$ m. Un alpinist urcă din punctul A până în punctul $M \in (VB)$ și apoi coboară în punctul C, unde punctul M este ales, astfel încât drumul parcurs $AM + MC$ să fie cel mai scurt posibil.
(2p) **a)** Calculează $AM + MC$.
(3p) **b)** Află măsura unghiului format de dreptele AC și VB.



✦ TESTUL 38 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Suma dintre cel mai mare număr de două cifre divizibil cu 4 și cel mai mic număr de trei cifre divizibil cu 3 este:
a) 198; **b)** 199; **c)** 200; **d)** 201.

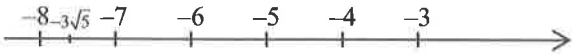
(5p) **2.** Dacă numerele a și 6 sunt invers proporționale cu 9, respectiv 21, atunci a este egal cu:
a) $\frac{3}{2}$; **b)** $\frac{18}{7}$; **c)** 14; **d)** 21.

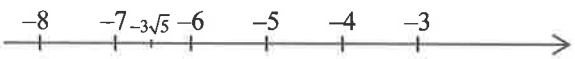
(5p) **3.** O țintă are mai multe sectoare marcate cu numere întregi. În tabelul alăturat sunt înregistrate rezultatele lui Petre după 10 încercări.
Punctajul total obținut de Petre este:
a) –30 p; **b)** –12 p;
c) –2 p; **d)** 14 p.

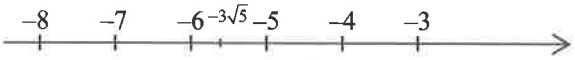
Nr. lovituri	Valoare sector
3	–5 p
2	–3 p
4	+1 p
1	+5 p

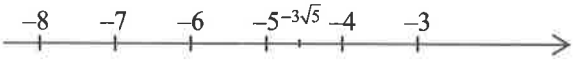
(5p) **4.** Fracția $\frac{7}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, este supraunitară dacă și numai dacă:
a) $n = 0$; **b)** $n = 7$; **c)** $n \in \{0, 1, 2\}$; **d)** $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

(5p) **5.** În desenele de mai jos este reprezentat numărul irațional $-3\sqrt{5}$ pe axa numerelor.

A.


B.


C.


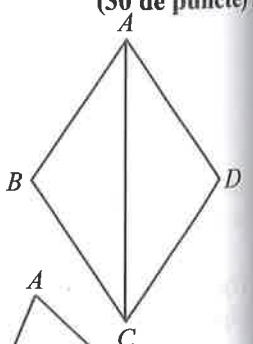
D.


Reprezentarea corectă este:
a) A; **b)** B; **c)** C; **d)** D.

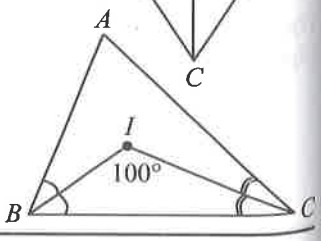
(5p) **6.** Doisprezece prieteni s-au dus la un restaurant și au comandat cina. Când au primit comanda au constatat că porțiile erau așa de mari, încât ar fi ajuns pentru 18 persoane. Atunci unul dintre ei a spus că, pentru a nu le rămâne mâncare în plus, ar fi fost suficient să comande pentru 8 persoane. Afirmația lui este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

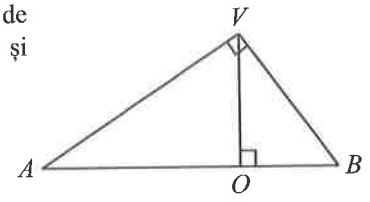
(5p) **1.** În figura alăturată este desenat un romb $ABCD$. Simetricul segmentului AB față de dreapta AC este segmentul:
a) AD; **b)** AB;
c) BC; **d)** CD.



(5p) **2.** În figura alăturată, BI și CI sunt bisectoarele unghiurilor ABC, respectiv ACB ale triunghiului ABC. Dacă măsura unghiului BIC este 100°, atunci măsura unghiului A este:
a) 20°; **b)** 50°;
c) 80°; **d)** 90°.

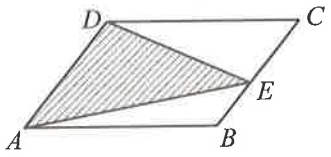


(5p) 3. În figura alăturată este reprezentat schematic un catarg OV ($OV \perp AB$), fixat de două funii VA și VB, cu $AO = 16$ m, $BO = 9$ m, astfel încât $O \in (AB)$ și $\measuredangle AVB = 90°$. Înălțimea VO a catargului este:



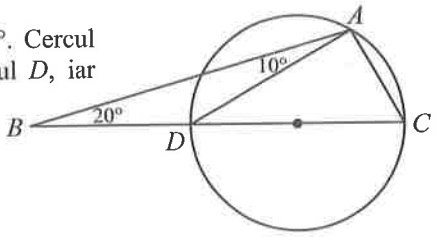
a) 9 m; b) 12 m;
c) 16 m; d) 25 m.

(5p) 4. În figura alăturată este reprezentată o grădină în formă de paralelogram $ABCD$ cu $AB = 10$ m, $AD = 8$ m și $\measuredangle A = 30°$. Punctul E aparține laturii BC. În interiorul triunghiului ADE se plantează lalele: 100 de bulbi la 1 m^2. Numărul de bulbi de care avem nevoie este:



a) 1000; b) 1500;
c) 2000; d) 3000.

(5p) 5. În figura alăturată, triunghiul ABC are măsura unghiului B de 20°. Cercul care trece prin vârfurile A și C intersectează latura BC în punctul D, iar măsura unghiului BAD este 10°. Măsura arcului mic AC este:



a) 10°; b) 20°;
c) 30°; d) 60°.

(5p) 6. Un obelisc din piatră este format dintr-o prismă triunghiulară regulată, cu latura bazei de 2 m și înălțimea de 10 m, în vârful căreia se află o piramidă triunghiulară regulată, cu latura bazei tot de 2 m și înălțimea de 3 m. Volumul de piatră folosită la construcția obeliscului a fost:

a) $10\sqrt{3}$ m^3; b) $11\sqrt{3}$ m^3; c) $12\sqrt{3}$ m^3; d) $15\sqrt{3}$ m^3.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Pentru a confecționa patru bluze și trei rochii este nevoie de 17 m de material, iar pentru a confecționa trei bluze și două rochii, de același fel, se folosesc 12 m de material.

(2p) a) Află câți metri de material se folosesc pentru a confecționa zece bluze și șapte rochii.

(3p) b) Determină câți metri de material se folosesc pentru confecționarea unei bluze.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2x+1}\right) : \frac{1}{2x^2+5x+2}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-2, -\frac{1}{2}\right\}$.

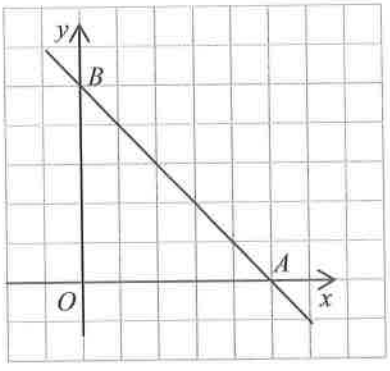
(2p) a) Arată că $E(x) = x - 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-2, -\frac{1}{2}\right\}$.

(3p) b) Demonstrează că $E(-x) \cdot E(x) \leq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-2, -\frac{1}{2}\right\}$.

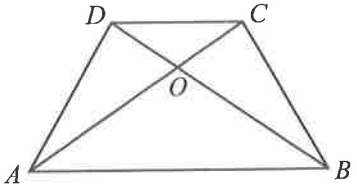
3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5 - x$.

(2p) a) Determină coordonatele (a, b) ale punctului P, de pe graficul funcției f, știind că acestea sunt invers proporționale cu numerele 3 și 2.

(3p) b) Știind că A și B sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox, respectiv Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy, calculează lungimea medianei din O a triunghiului AOB.



4. În figura alăturată este desenat un trapez isoscel $ABCD$, cu baza mare $AB = 21$ cm, baza mică $CD = 9$ cm și $AD = BC = 10$ cm. Fie $\{O\} = AC \cap BD$.



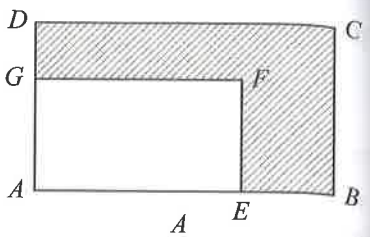
(2p) a) Calculează lungimea diagonalei AC.

(3p) b) Determină lungimea segmentului AO.

5. În figura alăturată este reprezentat un teren în formă de dreptunghi $ABCD$, pe care este construită o clădire, având amprenta la sol dreptunghiul $AEFG$. Se știe că $AB = 60$ m, $BC = 45$ m, $2BE = AE$ și $AD = 3DG$.

(2p) **a)** Determină numărul maxim de mașini care pot fi parcate pe teren, în zona hașurată, știind că pentru a parca o mașină este nevoie de o suprafață dreptunghiulară de 4 m × 5 m.

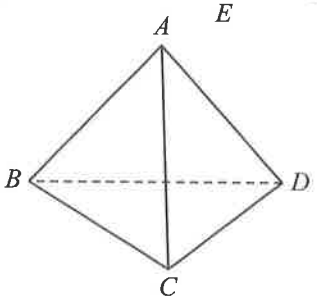
(3p) **b)** Arată că punctele A, F și C sunt coliniare.



6. Fie un tetraedru regulat $ABCD$ (vezi figura alăturată).

(2p) **a)** Calculează cosinusul unghiului determinat de planele ACD și BCD.

(3p) **b)** Demonstrează că dreptele AB și CD sunt perpendiculare.



✦ TESTUL 39 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Numărul perechilor ordonate (x, y) pentru care numărul $\overline{1xy}$ se divide cu 2 și cu 9 este:
a) 4; **b)** 5; **c)** 6; **d)** 7.

(5p) **2.** În tabelul de mai jos sunt prezentate prețurile a patru produse, înainte și după o ieftinire.

Produsul	A	B	C	D
Prețul inițial	200 de lei	1000 de lei	80 de lei	250 de lei
Prețul redus	180 de lei	950 de lei	56 de lei	200 de lei

Cel mai mare procent cu care s-a redus prețul unuia dintre cele patru produse este:
a) 20%; **b)** 30%; **c)** 40%; **d)** 50%.

(5p) **3.** Rezultatul calculului $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10$ este:
a) -55; **b)** -10; **c)** -5; **d)** 0.

(5p) **4.** Cel mai mic numitor comun al fracțiilor $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{12}$ și $\frac{1}{15}$ este:
a) 10; **b)** 30; **c)** 60; **d)** 120.

(5p) **5.** În tabelul alăturat sunt înscrise patru valori ale numărului $\overline{ab}$. Dintre aceste valori, cea pentru care numărul $\sqrt{\overline{ab}+\overline{ba}}$ nu aparține lui $\mathbb{N}$ este:

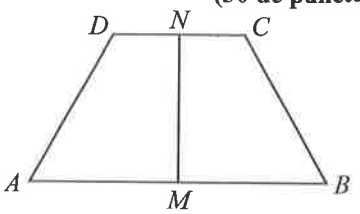
$\overline{ab}$	I	II	III	IV
	16	38	56	92

a) I; **b)** II; **c)** III; **d)** IV.

(5p) **6.** Apa plată *Armonia* se vinde doar în pachete de 6, 12 sau 24 de sticle. Propoziția: „Trebuie să cumpărăm minim 6 pachete pentru a avea exact 90 de sticle de apă plată *Armonia*." este:
a) adevărată; **b)** falsă.

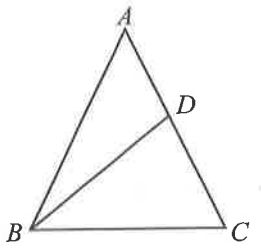
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată, $ABCD$ este un trapez isoscel, iar M și N sunt mijloacele bazelor AB, respectiv CD. Dreapta MN este:
a) linia mijlocie a trapezului $ABCD$;
b) paralelă cu latura AD;
c) mediatoarea segmentului AB;
d) perpendiculară pe latura BC.



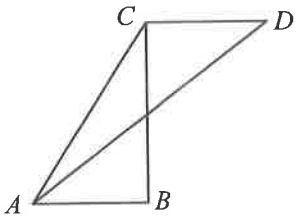
(5p) **2.** Triunghiul ABC din figura alăturată este isoscel cu baza BC și are măsura unghiului A de $30°$. Punctul D aparține laturii AC, astfel încât $BC = BD$. Măsura unghiului CBD este:

a) $20°$; **b)** $30°$;
c) $60°$; **d)** $75°$.



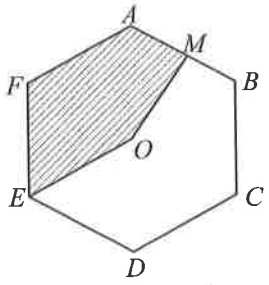
(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC în care ipotenuza $AC = 25$ cm, $AB = 7$ cm, iar D este simetricul punctului A față de mijlocul segmentului BC. Aria triunghiului DCA este egală cu:

a) 168 cm^2; **b)** 84 cm^2;
c) 42 cm^2; **d)** 62 cm^2.



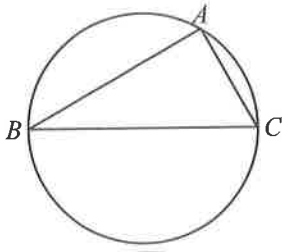
(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat un vitraliu în formă de hexagon regulat $ABCDEF$ cu centrul în O și latura $AB = 2$ m. Punctul M este mijlocul laturii AB. Doar poligonul $OMAFE$ este colorat. Aria suprafeței colorate este aproximativ:

a) 1 m^2; **b)** 2 m^2;
c) 3 m^2; **d)** 4 m^2.



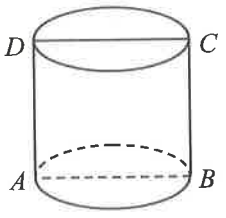
(5p) **5.** În figura alăturată este desenat triunghiul ABC cu $AB = 10$ cm, $BC = 12{,}5$ cm, $CA = 7{,}5$ cm și cercul său circumscris. Lungimea cercului este egală cu:

a) 10π cm; **b)** 12π cm;
c) $12{,}5\pi$ cm; **d)** 14π cm.



(5p) **6.** Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un pătrat $ABCD$, având perimetrul egal cu 16 cm. Aria totală a cilindrului este egală cu:

a) 48π cm^2; **b)** 24π cm^2;
c) 16π cm^2; **d)** 32π cm^2.



SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. La un concurs de șah, primii trei concurenți au obținut împreună 35 de puncte. Primul clasat are cu un punct mai mult decât al doilea, iar al treilea are cu jumătate de punct mai puțin decât al doilea.

(2p) **a)** Este posibil ca primul clasat să aibă 12 puncte? Justifică răspunsul dat.

(3p) **b)** Determină câte puncte are fiecare dintre cei trei concurenți.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\dfrac{x^3-2x^2}{2x^2} - \dfrac{x^2-4}{4x}\right) : \dfrac{x-2}{2} + \dfrac{1}{2}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

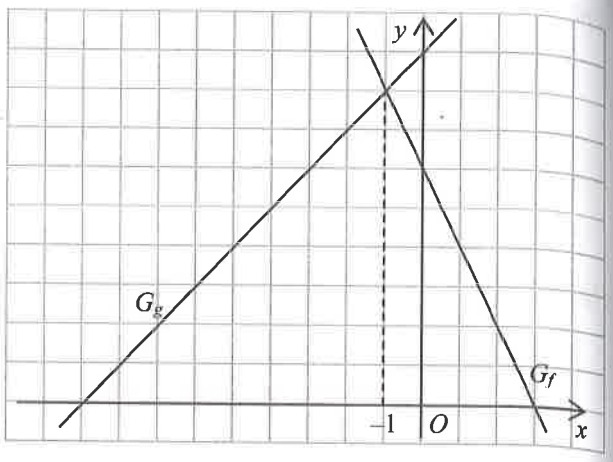
(2p) **a)** Arată că $E(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

(3p) **b)** Calculează $E(3) \cdot E(4) \cdot E(5) \cdot E(6) \cdot E(7) \cdot E(8)$.

3. Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=6-2x$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x+m$.

(2p) **a)** Găseşte coordonatele punctelor de intersecţie a reprezentării grafice a funcţiei f cu axele sistemului de coordonate xOy.

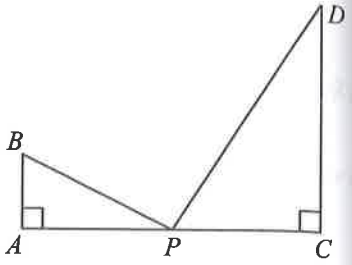
(3p) **b)** Determină constanta m, ştiind că reprezentările grafice ale celor două funcţii se intersectează într-un punct de abscisă -1.



4. În figura alăturată sunt reprezentate schematic două turnuri AB şi CD. Din punctul P, mijlocul segmentului AC, cele două turnuri se văd sub unghiurile $\measuredangle APB = 30°$ şi $\measuredangle CPD = 60°$. Se ştie că AB şi CD sunt perpendiculare pe AC şi $AB = 12$ m.

(2p) **a)** Arată că lungimea segmentului AP este mai mică de 21 m.

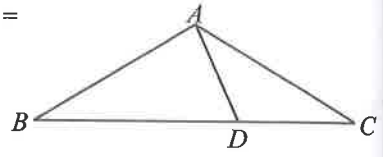
(3p) **b)** Calculează înălţimea turnului CD.



5. Triunghiul isoscel ABC din figura alăturată are $\measuredangle BAC = 120°$ şi $AB = 10$ cm. Punctul D aparţine laturii BC, astfel încât $DA = DC$.

(2p) **a)** Determină măsura unghiului BAD.

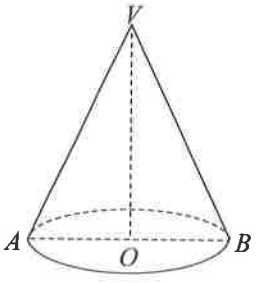
(3p) **b)** Calculează valoarea produsului $CD \cdot CB$ (considerând lungimile segmentelor exprimate în centimetri).



6. În figura alăturată este desenat un con circular drept cu perimetrul secţiunii axiale VAB egal cu 16 cm şi înălţimea VO ($O \in AB$). Cosinusul unghiului format de generatoarea VA cu planul bazei conului este de $\frac{3}{5}$.

(2p) **a)** Arată că $OA = 3$ cm şi $VO = 4$ cm.

(3p) **b)** Se secţionează conul cu un plan paralel cu baza, astfel încât volumul trunchiului de con format să fie de 7 ori mai mare decât volumul conului mic. Află distanţa de la vârful conului la planul de secţiune.



✦ TESTUL 40 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Scrierea numărului 144 ca produs de puteri de numere prime distincte este:
a) $2^4 \cdot 9$; **b)** $9 \cdot 16$; **c)** $2^4 \cdot 3^3$; **d)** $2^4 \cdot 3^2$.

(5p) **2.** La un concurs s-au acordat mai multe diplome conform tabelului următor:

Diploma	Premiul I	Premiul al II-lea	Premiul al III-lea	Menţiune
Număr elevi	3	6	9	18

Dacă numărul premiilor reprezintă p% din numărul total de diplome acordate, atunci p este egal cu:
a) 30; **b)** 40; **c)** 50; **d)** 60.

(5p) **3.** Roma Antică a fost un oraş–stat a cărui istorie începe în anul 753 î.Hr. şi se sfârşeşte în anul 476 d. Hr. Existenţa Romei Antice s-a întins pe o perioadă de:
a) 277 ani; **b)** 476 ani; **c)** 753 ani; **d)** 1229 ani.

(5p) **4.** Opusul numărului $a=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right):\left(-\frac{1}{24}\right)$ este:
a) -10; **b)** $-\frac{1}{2}$; **c)** $\frac{5}{6}$; **d)** 2.

(5p) **5.** Patru eleve au primit ca temă să efectueze operaţiile indicate în tabelul de mai jos.

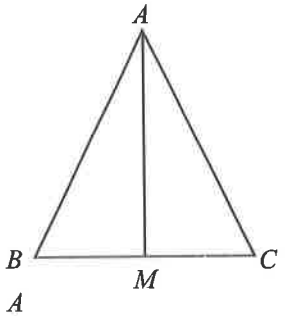
Ana	$x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$	$y=\sqrt{2}-\sqrt{3}$	$x-y$
Maria	$x=3\sqrt{2}$	$y=-\sqrt{18}$	$x+y$
Ioana	$x=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{8}}$	$y=\sqrt{2}$	$x\cdot y$
Sabina	$x=2\sqrt{6}$	$y=5\sqrt{3}$	$x:y$

Dacă operaţiile s-au efectuat corect, atunci elevele care au obţinut ca rezultat un număr raţional sunt:
a) Maria şi Ioana; **b)** Ana şi Ioana; **c)** Maria şi Sabina; **d)** Ana şi Sabina.

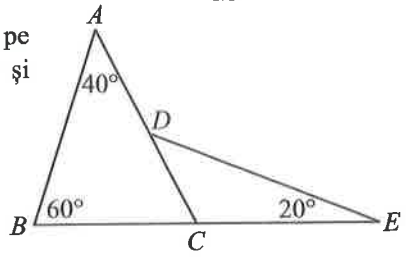
(5p) **6.** Iustina şi Elena merg la acelaşi bazin de înot. Iustina poate înota 10 lungimi de bazin în 25 de minute, iar Elena poate înota 12 lungimi de bazin în 32 de minute. Afirmaţia că Elena înoată mai repede decât Iustina este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

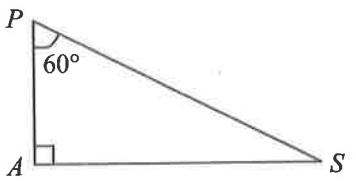
(5p) **1.** În figura alăturată este desenat un triunghi isoscel ABC cu baza BC. Punctul M este mijlocul laturii BC. Dacă îndoim triunghiul de-a lungul dreptei AM, atunci punctul B se va suprapune peste punctul:
a) A; **b)** C;
c) M; **d)** alt punct.



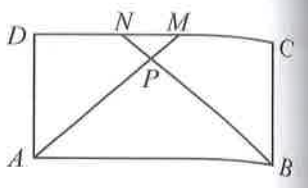
(5p) **2.** În figura alăturată, punctul D se află pe latura AC, iar punctul E se află pe prelungirea laturii BC a triunghiului ABC. Dacă $\measuredangle A = 40°$, $\measuredangle B = 60°$ şi $\measuredangle E = 20°$, atunci măsura unghiului CDE este:
a) 40°; **b)** 50°;
c) 60°; **d)** 70°.



(5p) **3.** O pisică P sare de pe un zid $PA = 1$ m pentru a prinde un şoarece S pe care îl vede sub un unghi de 60° (vezi figura alăturată). Distanţa AS de la şoarece la zid este:
a) 1 m; **b)** $\sqrt{3}$ m;
c) 2 m; **d)** $2\sqrt{3}$ m.

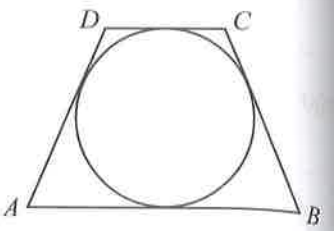


(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat un dreptunghi $ABCD$, având $AB = 8$ cm și $AD = 6$ cm. Bisectoarele AM și BN ale unghiurilor DAB, respectiv ABC se intersectează în punctul P ($M, N \in DC$). Aria patrulaterului $BCMP$ este egală cu:



a) 17 cm²; **b)** 15 cm²;
c) 11 cm²; **d)** 14 cm².

(5p) **5.** În figura alăturată, laturile trapezului isoscel $ABCD$, cu bazele $AB = 12$ cm și $CD = 4$ cm, sunt tangente unui cerc. Perimetrul trapezului $ABCD$ este egal cu:



a) 16 cm; **b)** 24 cm;
c) 32 cm; **d)** 48 cm.

(5p) **6.** O furnică pleacă dintr-un colț al unui cub de zahăr cu latura de 1 cm și merge pe drumul cel mai scurt de pe suprafața laterală a cubului, până în colțul cubului cel mai depărtat de ea. Lungimea drumului parcurs de furnică este de:

a) $\sqrt{2}$ cm; **b)** $\sqrt{3}$ cm; **c)** 2 cm; **d)** $\sqrt{5}$ cm.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. De pe două loturi, având împreună 206 ha, s-a strâns recolta de cartofi, obținându-se, de pe fiecare lot, câte 19 tone la hectar.

(2p) **a)** Află câte tone de cartofi s-au recoltat de pe cele 206 ha.

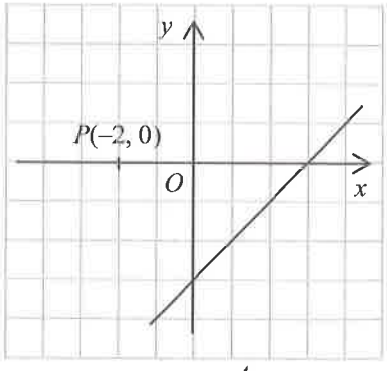
(3p) **b)** Determină câte hectare are fiecare lot, știind că de pe primul s-au obținut cu 608 tone de cartofi mai mult decât de pe al doilea.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(x-1+\frac{1}{x+1}\right):\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)-x$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

(2p) **a)** Arată că $E(x) = x^3 - x$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

(3p) **b)** Demonstrează că numărul natural $E(n)$ este divizibil cu 6, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

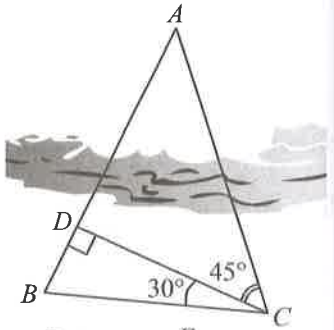
3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 3$.



(2p) **a)** Calculează $f(\sqrt{7}) \cdot f(\sqrt{8}) \cdot f(\sqrt{9}) \cdot f(\sqrt{10}) \cdot f(\sqrt{11})$.

(3p) **b)** Determină distanța de la punctul $P(-2, 0)$ la reprezentarea grafică a funcției f.

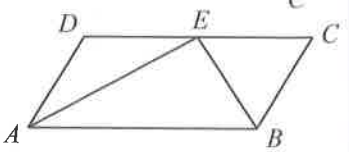
4. În figura alăturată, punctele A și B reprezintă doi copaci situați de o parte și de alta a unui râu. Pentru a măsura distanța dintre ei, un topograf a determinat următoarele elemente: $CD = 120$ m, $\measuredangle BCD = 30°$, $\measuredangle ACD = 45°$, unde $D \in (AB)$ și $CD \perp AB$.



(2p) **a)** Calculează lungimea segmentului BD.

(3p) **b)** Arată că distanța dintre cei doi copaci, A și B, este cuprinsă între 189 m și 190 m.

5. În figura alăturată este desenat paralelogramul $ABCD$ cu $AB = 24$ cm, $BC = 12$ cm și $\measuredangle BAD = 60°$.



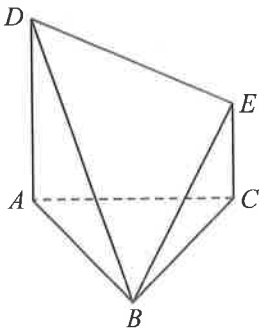
(2p) **a)** Calculează lungimea diagonalei BD.

(3p) **b)** Arată că, dacă E este mijlocul laturii CD, atunci unghiul AEB este drept.

6. În figura alăturată este reprezentat un triunghi echilateral ABC cu $AB = 30$ cm și punctele D și E situate de aceeași parte a planului (ABC), astfel încât $DA \perp (ABC)$, $EC \perp (ABC)$, $AD = 40$ cm și $CE = 20$ cm.

(2p) **a)** Află măsura unghiului format de planele ABD și CBE.

(3p) **b)** Calculează distanța de la punctul D la dreapta de intersecție a planelor (ABC) și (DBE).



✦ TESTUL 41 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Numerele $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^3$ și $2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^2$ au cel mai mare divizor comun $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$, cu $x, y, z \in \mathbb{N}$. Suma $x + y + z$ este egală cu:

a) 9; **b)** 10; **c)** 11; **d)** 14.

(5p) **2.** În tabelul de mai jos este prezentată contribuția fiecăruia dintre cei patru muncitori care au colaborat pentru finalizarea unei lucrări.

Numele	Costel	Nicolae	Remus	Vasile
Contribuția	20%	30%	10%	40%

Cei patru muncitori sunt plătiți proporțional cu volumul de muncă depusă pentru realizarea lucrării. Dacă Nicolae a primit 3600 de lei, atunci Vasile a primit:

a) 3600 de lei; **b)** 4000 de lei; **c)** 4800 de lei; **d)** 6000 de lei.

(5p) **3.** Numărul divizorilor întregi ai numărului 6 este:

a) 2; **b)** 4; **c)** 6; **d)** 8.

(5p) **4.** Cel mai mic dintre numerele $-\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{20}$, $-\frac{8}{15}$ și $-\frac{9}{8}$ este:

a) $-\frac{2}{3}$; **b)** $-\frac{3}{20}$; **c)** $-\frac{8}{15}$; **d)** $-\frac{9}{8}$.

(5p) **5.** În tabelul alăturat sunt scrise patru relații între numere reale. Relația corectă este:

A	$2\sqrt{6} < 2\sqrt{7} < 3\sqrt{3}$
B	$2\sqrt{6} < 3\sqrt{3} < 2\sqrt{7}$
C	$3\sqrt{3} < 2\sqrt{6} < 2\sqrt{7}$
D	$2\sqrt{7} < 3\sqrt{3} < 2\sqrt{6}$

a) A; **b)** B;
c) C; **d)** D.

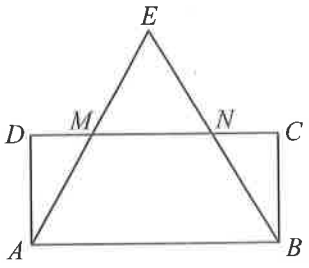
(5p) **6.** Andrei afirmă că „Numărul π aparține intervalului $\left(3, \frac{7}{2}\right)$.” Afirmația sa este:

a) adevărată; **b)** falsă.

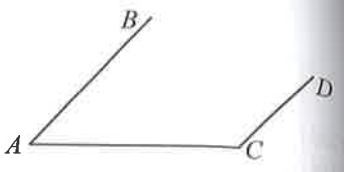
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată, $ABCD$ este un dreptunghi, iar ABE este un triunghi isoscel cu baza AB. Dacă $\{M\} = AE \cap DC$ și $\{N\} = BE \cap DC$, atunci patrulaterul $ABNM$ este:

a) un paralelogram; **b)** un dreptunghi;
c) un trapez oarecare; **d)** un trapez isoscel.

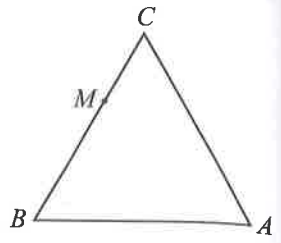


(5p) **2.** În figura alăturată, dreptele AB și CD sunt paralele, iar măsura unghiului ACD este de cinci ori mai mare decât măsura unghiului BAC. Măsura unghiului BAC este:



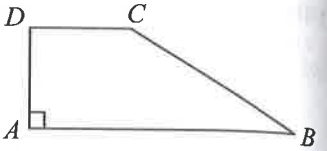
a) 30°; **b)** 45°;
c) 60°; **d)** nu se poate preciza.

(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat un triunghi echilateral ABC cu latura de 6 cm. Punctul M aparține laturii BC și $BM = 2MC$. Distanța de la M la dreapta AB este egală cu:



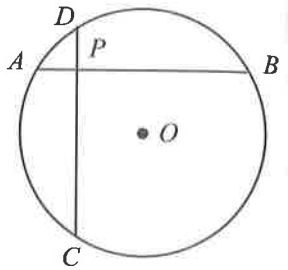
a) $\sqrt{3}$ cm; **b)** 2 cm;
c) $2\sqrt{3}$ cm; **d)** $3\sqrt{3}$ cm.

(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentată o terasă $ABCD$ în formă de trapez dreptunghic, cu baza mică $CD = 6$ m și laturile $AD = 5$ m și $BC = 13$ m. Aria terasei este:



a) 40 m²; **b)** 60 m²;
c) 80 m²; **d)** 100 m².

(5p) **5.** În figura alăturată sunt desenate două coarde perpendiculare, $AB = CD = 8$ cm, ale cercului cu centrul în O și raza de 5 cm. Dacă P este punctul comun al celor două coarde, atunci lungimea segmentului OP este:



a) 3 cm; **b)** 4 cm;
c) $3\sqrt{2}$ cm; **d)** $4\sqrt{3}$ cm.

(5p) **6.** O găleată are forma unui trunchi de con circular drept cu raza bazei mici de 10 cm, raza bazei mari de 15 cm și înălțimea de 27 cm. Cantitatea maximă de apă care încape în găleată este de aproximativ:

a) 13 ℓ; **b)** 14 ℓ; **c)** 15 ℓ; **d)** 16 ℓ.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Sorina a citit o carte în 4 zile astfel: în prima zi a citit 25% din carte, a doua zi a citit $\frac{1}{3}$ din rest, a treia zi a citit 50% din noul rest, iar a patra zi a citit ultimele 50 de pagini.

(2p) **a)** Află câte pagini a citit Sorina în a treia zi.

(3p) **b)** Determină câte pagini are cartea citită de Sorina.

2. Se consideră expresia $E(x) = \dfrac{(x^2+2x+2)^2-1}{(x^2+2x)(x^2+2x+5)+6}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

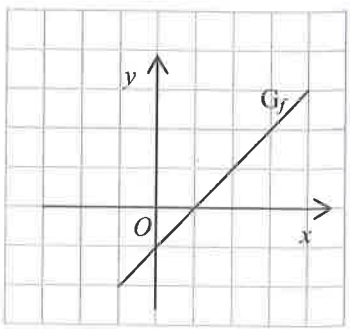
(2p) **a)** Arată că $(x^2+2x)(x^2+2x+5)+6 = (x^2+2x+2)(x^2+2x+3)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(3p) **b)** Determină valoarea minimă a lui $E(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 1$.

(2p) **a)** Calculează $f(a) + f(-a) + 2$, unde a este un număr real oarecare.

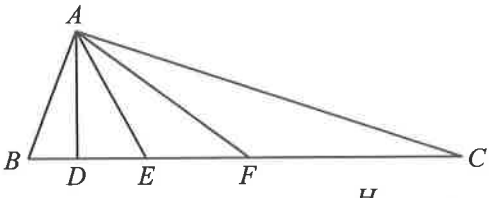
(3p) **b)** Determină coordonatele punctelor P, situate pe reprezentarea grafică a funcției f, știind că $OP = 5$, unde O este originea sistemului de axe ortogonale xOy.



4. Triunghiul ABC din figura alăturată are $\measuredangle BAC = 90°$ și $\measuredangle ACB = 15°$. În triunghiul ABC, AD este înălțime, AE este bisectoare, iar AF este mediană.

(2p) **a)** Arată că $2AD = AF$.

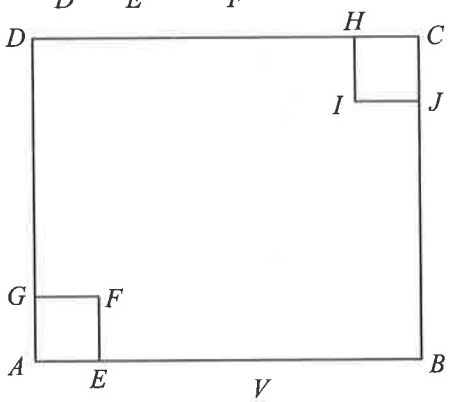
(3p) **b)** Demonstrează că $AE = EF$.



5. În figura alăturată este reprezentat un teren dreptunghiular $ABCD$ cu dimensiunile $AB = 60$ m și $BC = 50$ m. Pătratele egale $AEFG$ și $CHIJ$ cu laturile de 10 m reprezintă două parcuri amplasate în colțurile opuse ale terenului.

(2p) **a)** Află distanța dintre colțurile F și I ale celor două parcuri.

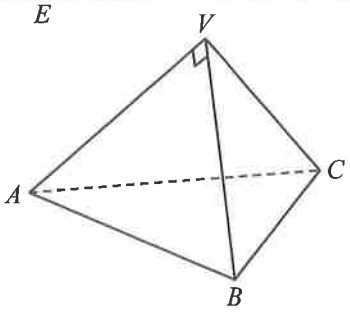
(3p) **b)** Demonstrează că dacă pe terenul $ABCD$ s-ar construi o piscină circulară cu diametrul FI, aceasta ar fi tangentă laturilor AB și CD în mijloacele acestora.



6. În figura alăturată este reprezentată o piramidă triunghiulară regulată cu $AB = 6\sqrt{2}$ cm și $\measuredangle AVB = 90°$.

(2p) **a)** Calculează distanța de la punctul A la planul (VBC).

(3p) **b)** Determină tangenta unghiului format de dreapta VA cu planul (ABC).



✦ TESTUL 42 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Suma divizorilor naturali improprii ai numărului 15 este:
a) 15; **b)** 16; **c)** 19; **d)** 24.

(5p) **2.** În tabelul de mai jos se pot vedea vârstele a patru surori.

Numele	Alina	Corina	Sanda	Tudora
Vârsta	4 ani	5 ani	6 ani	10 ani

Ele primesc 43 de caise pe care le împart în mod invers proporțional cu vârstele lor. Numărul de caise care îi revin Alinei este:
a) 6; **b)** 10; **c)** 12; **d)** 15.

(5p) **3.** Fie a și b două numere întregi, astfel încât $a \cdot b = -1$. Patru colege au scris pe o tablă câte o relație, așa cum se vede în următorul tabel.

Ioana	$a + b = 0$
Mia	$a^2 + b^2 = 1$
Alexia	$a + b = 2$
Mara	$a + b = -2$

Eleva care a scris relația corectă este:
a) Ioana; **b)** Mia;
c) Alexia; **d)** Mara.

(5p) **4.** Rezultatul împărțirii $0{,}16 : 0{,}004$ este:
a) 0,4; **b)** 4; **c)** 40; **d)** 400.

(5p) **5.** Media geometrică a numerelor $x = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ şi $y = \sqrt{18} : \sqrt{2}$ este:

a) $\sqrt{6}$; **b)** 6; **c)** 12; **d)** 36.

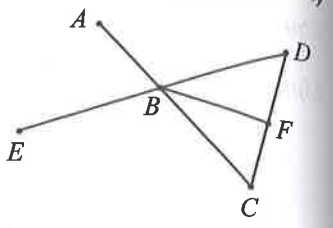
(5p) **6.** Un magazin on-line vinde un calculator la fiecare 8 ore, dar în fiecare zi unul dintre calculatoarele vândute este returnat. Directorul magazinului se gândeşte că vinde (definitiv) într-un an 750 de calculatoare. Socoteala directorului este:

a) corectă; **b)** incorectă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

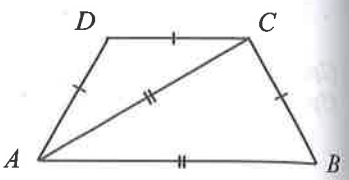
(5p) **1.** În figura alăturată, punctul B este intersecţia dreptelor AC şi DE, iar punctul F aparţine segmentului CD. Numărul segmentelor desenate în figură este:

a) 4; **b)** 6;
c) 7; **d)** 10.



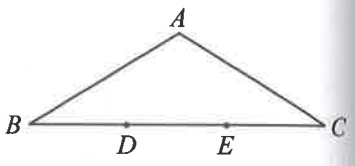
(5p) **2.** Trapezul $ABCD$ din figura alăturată are baza mare AB, $AD = DC = CB$ şi $AB = AC$. Măsura unghiului ABC este:

a) 30°; **b)** 36°;
c) 60°; **d)** 72°.



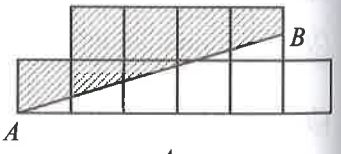
(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul isoscel ABC, având baza $BC = 12$ cm şi $\measuredangle BAC = 120°$. Punctele D şi E aparţin segmentului BC, cu $BD = DE = EC$. Perimetrul triunghiului ADE este egal cu:

a) 8 m; **b)** 12 m;
c) 6 m; **d)** 10 m.



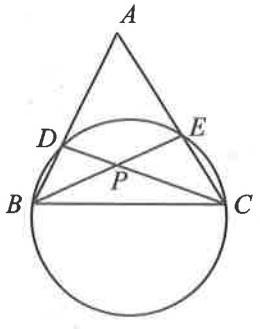
(5p) **4.** În figura alăturată este desenată o reţea de pătrate 1 cm × 1 cm. Daniela a unit, printr-o linie, punctele A şi B (B este mijlocul laturii pătratului din dreapta-sus) şi a colorat partea de deasupra. Aria suprafeţei colorate este:

a) 4,5 cm^2; **b)** 5 cm^2;
c) 5,25 cm^2; **d)** 6 cm^2.



(5p) **5.** În figura alăturată, cercul cu diametrul BC intersectează laturile AB şi AC ale triunghiului ABC în punctele D, respectiv E. Dacă P este punctul comun al dreptelor BE şi CD, iar măsura unghiului A este 50°, atunci măsura unghiului BPC este:

a) 50°; **b)** 90°;
c) 100°; **d)** 130°.



(5p) **6.** Un cornet de îngheţată are forma unui con circular drept cu înălţimea de 9 cm şi diametrul bazei de 4 cm. Mişu, vânzătorul de îngheţată, umple cornetul şi adaugă deasupra încă 150% din câtă îngheţată a intrat în cornet. O îngheţată de la Mişu are aproximativ:

a) 81 cm^3; **b)** 94 cm^3;
c) 124 cm^3; **d)** 150 cm^3.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Un telefon se ieftineşte cu 20%, iar după un timp telefonul se scumpeşte cu 20% din noul preţ. După aceste modificări, preţul telefonului devine 288 de lei.

(2p) **a)** Află preţul telefonului după ieftinire.

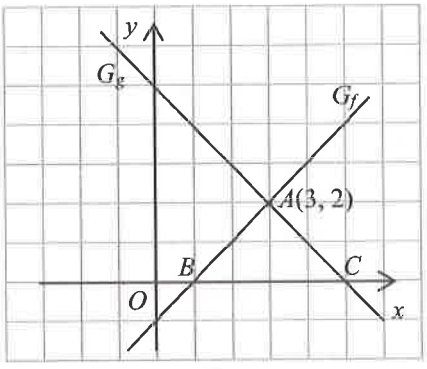
(3p) **b)** Determină preţul iniţial al telefonului.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x+1}\right) : \frac{x^2 - x}{x+2}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1\}$.

(2p) **a)** Arată că $E(x) = \frac{1}{x(x+1)}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1\}$.

(3p) **b)** Demonstrează că suma $E(2) + E(3) + \ldots + E(9)$ este un număr raţional din intervalul $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

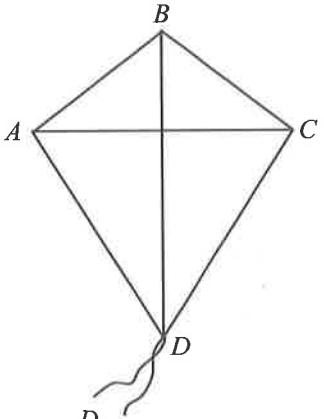
3. Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 5 - x$.



(2p) **a)** Arată că $A(3, 2)$ este punctul comun al reprezentărilor grafice ale celor două funcţii.

(3p) **b)** Fie B punctul de intersecţie a reprezentării grafice a funcţiei f cu axa Ox şi C punctul de intersecţie a reprezentării grafice a funcţiei g tot cu axa Ox a sistemului de axe ortogonale xOy. Demonstrează că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.

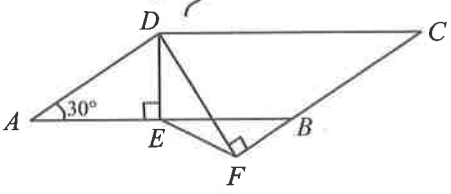
4. În figura alăturată este reprezentat schematic un zmeu de hârtie $ABCD$ cu $AC = 16$ dm, $AD = CD = 17$ dm şi $AB = CB = 10$ dm.



(2p) **a)** Arată că dreptele AC şi BD sunt perpendiculare.

(3p) **b)** Determină lungimea diagonalei BD.

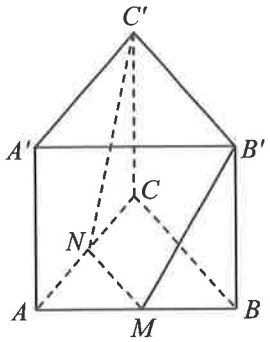
5. În figura alăturată este reprezentat un paralelogram $ABCD$ cu $AB = 12\sqrt{3}$ cm, $BC = 12$ cm şi $\measuredangle A = 30°$. Punctele E şi F sunt proiecţiile punctului D pe dreptele AB, respectiv BC.



(2p) **a)** Determină măsura unghiului EDF.

(3p) **b)** Calculează lungimea segmentului EF.

6. În figura alăturată este reprezentată o prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu latura bazei $AB = 12$ cm şi muchia laterală $AA' = 8$ cm. Punctele M şi N sunt mijloacele laturilor AB, respectiv AC.



(2p) **a)** Arată că punctele M, N, C', B' sunt coplanare.

(3p) **b)** Calculează perimetrul patrulaterului $B'MNC'$.

✦ TESTUL 43 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Cel mai mare divizor comun al numerelor 360 și 432 este:
a) 72; **b)** 6; **c)** 8; **d)** 9.

(5p) **2.** În tabelul următor sunt prezentate temperaturile înregistrate într-o lună într-o localitate.

Temperatura	–11°	–7°	–1°	0°	1°	8°
Numărul de zile	2	5	9	8	3	4

Valoarea medie a temperaturii înregistrate în acea lună în localitate a fost:
a) –2°; **b)** –1°; **c)** 0°; **d)** 1°.

(5p) **3.** Dacă a și b sunt numere reale nenule, astfel încât $\frac{2a}{3} = \frac{5}{7b}$, rezultatul calculului $21 - 28ab$ este:
a) –8; **b)** –9; **c)** 9; **d)** 0.

(5p) **4.** Patru elevi, Ion, Maria, Andrei și Elena, măsoară lungimea gardului școlii la care învață. Rezultatele măsurătorilor sunt prezentate în tabelul următor.

Elevul	Ion	Maria	Andrei	Elena
Lungimea măsurată	631,87 m	632,48 m	631,7 m	632,4 m

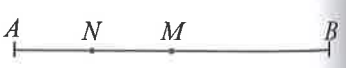
Știind că lungimea gardului este egală cu 632 m, elevul care a făcut cea mai bună aproximare este:
a) Ion; **b)** Maria; **c)** Andrei; **d)** Elena.

(5p) **5.** Fie a un element al mulțimii $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}\}$. Probabilitatea ca 1, 2 și a să fie lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic este:
a) $\frac{5}{2}$; **b)** 1; **c)** $\frac{1}{5}$; **d)** 0,4.

(5p) **6.** Propoziția: „Pentru orice număr natural n, numărul $n^2 + 3n + 4$ este natural par.” este:
a) adevărată; **b)** falsă.

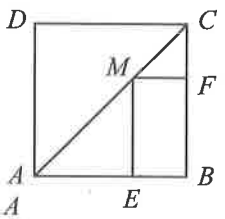
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată este reprezentat segmentul AB, având lungimea de 10 cm. Punctul M este mijlocul lui AB, iar punctul N este mijlocul lui AM. Lungimea segmentului NB este:

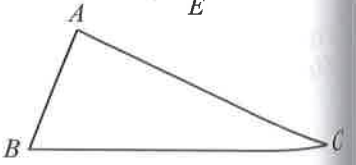


a) 2,5 cm; **b)** 5 cm; **c)** 7,5 cm; **d)** 8 cm.

(5p) **2.** În figura alăturată, $ABCD$ este un pătrat cu latura de 4 cm, iar M un punct pe diagonala AC. Punctele E și F sunt proiecțiile punctului M pe laturile AB, respectiv BC. Suma lungimilor segmentelor ME și MF este:
a) 2 cm; **b)** 3 cm;
c) 4 cm; **d)** 5 cm.

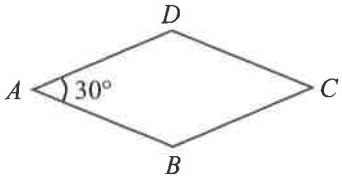


(5p) **3.** În figura alăturată, ABC este un triunghi dreptunghic cu ipotenuza BC = = 12 cm. Distanța dintre ortocentrul triunghiului și centrul său de greutate este egală cu:
a) 5 cm; **b)** 6 cm;
c) 7 cm; **d)** 4 cm.



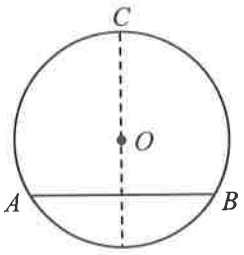
(5p) **4.** Terenul din figura alăturată are forma unui romb $ABCD$ cu latura de 100 m și măsura unghiului A de 30°. Aria terenului este:

a) 1000 m²; **b)** 2000 m²;
c) 4000 m²; **d)** 5000 m².



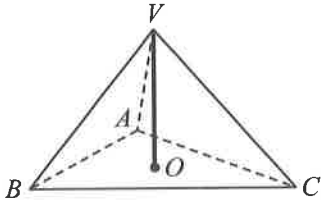
(5p) **5.** În figura alăturată, $\mathscr{C}(O, R)$ este un cerc, AB este o coardă de 4 cm și $\measuredangle AOB = 120°$. Perpendiculara din O pe AB intersectează arcul mare AB în punctul C. Perimetrul triunghiului ABC este:

a) 9 cm; **b)** 10 cm;
c) 11 cm; **d)** 12 cm.



(5p) **6.** În figura alăturată este schița unui stâlp VO ancorat cu trei cabluri, VA, VB și CV, cu lungimile de 14 m. Dacă $AB = BC = CA = 9$ m, lungimea stâlpului VO este egală cu:

a) 13 m; **b)** 11 m;
c) 12 m; **d)** 10 m.



SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Într-un bloc sunt 28 de apartamente cu două și cu trei camere. În total sunt 73 de camere.

(2p) **a)** Este posibil ca numărul apartamentelor cu două camere să fie egal cu numărul apartamentelor cu trei camere?

(3p) **b)** Câte dintre apartamente au trei camere?

2. Se consideră expresia $E(x) = 4x^2 - 4x + 2$, unde x este un număr real.

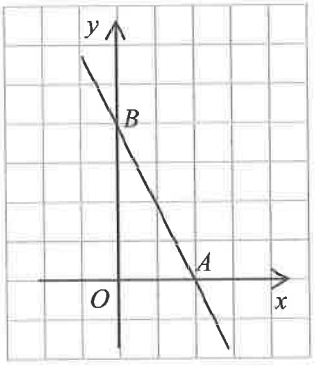
(2p) **a)** Arată că $E(x) = (2x - 1)^2 + 1$, oricare ar fi numărul real x.

(3p) **b)** Determină valoarea minimă a lui $E(n)$, când n parcurge mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi.

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 8 - 2x$.

(2p) **a)** Calculează $P = f(0) \cdot f(1) \cdot \ldots \cdot f(10)$.

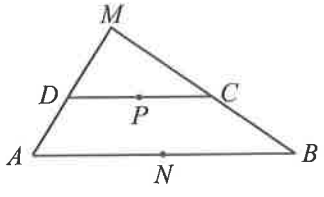
(3p) **b)** Dacă A și B sunt punctele de intersecție a graficului funcției f cu axele de coordonate, arătați că distanța dintre A și B este mai mică decât 9.



4. În figura alăturată este reprezentat un trapez $ABCD$, $AB \parallel CD$, în care $\measuredangle A = 60°$, $\measuredangle B = 30°$, $\{M\} = AD \cap BC$, iar N și P sunt mijloacele laturilor AB, respectiv CD.

(2p) **a)** Arată că punctele M, N și P sunt coliniare.

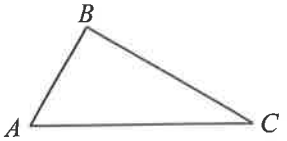
(3p) **b)** Dacă $AB = 10$ cm și $CD = 6$ cm, calculează lungimea segmentului NP.



5. În triunghiul ABC avem: $AB = 5$ cm, $AC = 8$ cm, iar sinusul unghiului BAC este egal cu 0,8.

(2p) **a)** Calculează lungimea laturii BC.

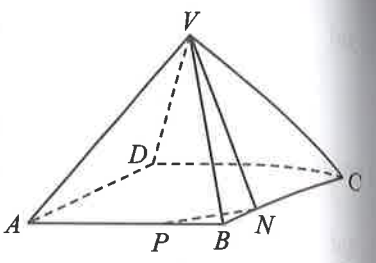
(3p) **b)** Determină aria triunghiului ABC.



6. În figura alăturată este reprezentată piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu muchia bazei $AB = 16\sqrt{2}$ cm și muchia laterală $VA = 20$ cm.

(2p) **a)** Calculează perimetrul secțiunii diagonale VAC a piramidei.

(3p) **b)** Punctul P se află pe muchia AB, astfel încât $BP = 2\sqrt{17}$ cm, iar punctul N se află pe muchia BC astfel încât suma $VN + NP$ este minimă. Demonstrează că $NC = 5NB$.

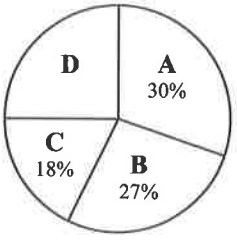


✦ TESTUL 44 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Cel mai mic număr natural, cu cifre distincte, mai mare decât 444 este:
a) 456; **b)** 345; **c)** 445; **d)** 450.

(5p) **2.** În diagrama alăturată este dată repartizarea culturilor pe un teren de 120 ha. Suprafața cultivată cu floarea soarelui este egală cu:
a) 20 ha; **b)** 30 ha;
c) 60 ha; **d)** 40 ha.



A – porumb;
B – grâu;
C – secară;
D – floarea soarelui

(5p) **3.** Cel mai mic număr întreg care are pătratul cel mult egal cu 24 este:
a) –5; **b)** 0; **c)** –3; **d)** –4.

(5p) **4.** Rezolvând inecuația $(x-1)^2 > x^2 - 1$, obținem:
a) $x > -1$; **b)** $x > 0$; **c)** $x < -1$; **d)** $x < 1$.

(5p) **5.** Un televizor costă 1380 de lei. După o mărire a prețului cu 10%, televizorul costă:
a) 1242 de lei; **b)** 138 de lei; **c)** 1518 lei; **d)** 1418 lei.

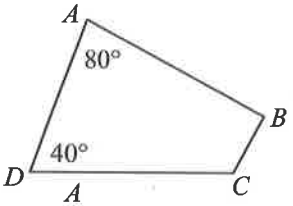
(5p) **6.** Fie $a = -\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right) - \sqrt{24}$. Afirmația: „Numărul a este irațional.” este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

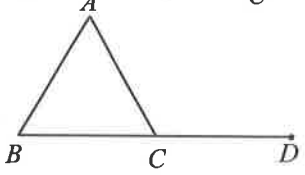
(5p) **1.** Pe o dreaptă considerăm punctele A, B, C și D, ca în figura de mai jos.

Dacă $AD = 17$ cm, $BC = 3$ cm și $AC = BD$, lungimea segmentului AB este:
a) 6 cm; **b)** 5 cm; **c)** 7 cm; **d)** 8 cm.

(5p) **2.** În patrulaterul convex $ABCD$ din figura alăturată, măsura unghiului A este de 80°, iar măsura unghiului D este de 40°. Suma măsurilor unghiurilor B și C este:
a) 80°; **b)** 120°;
c) 180°; **d)** 240°.

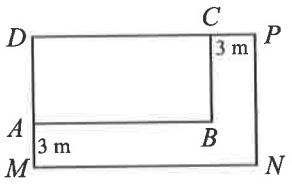


(5p) **3.** În figura alăturată, triunghiul ABC este echilateral, iar punctul D este simetricul punctului B față de punctul C. Măsura unghiului ADB este:
a) 30°; **b)** 40°;
c) 45°; **d)** 60°.



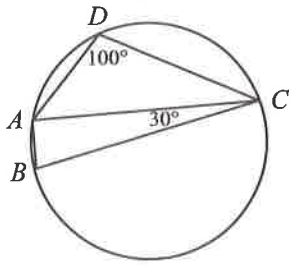
(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat un teren dreptunghiular $ABCD$. Dacă am mări lungimea și lățimea acestuia cu câte 3 m, aria noului teren $DMNP$ ar fi cu 99 m^2 mai mare decât aria terenului inițial. Lungimea gardului care împrejmuiește terenul $ABCD$ este:

a) 40 m; **b)** 50 m;
c) 60 m; **d)** 70 m.



(5p) **5.** În figura alăturată A, B, C, D sunt puncte pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$, astfel încât măsura unghiului ADC este 100°, iar cea a unghiului ACB este 30°. Măsura unghiului BAC este:

a) 60°; **b)** 70°;
c) 80°; **d)** 50°.



(5p) **6.** Un muncitor are de așezat 100 de cărămizi de formă paralelipipedică cu dimensiunile 10 cm, 15 cm și 20 cm sub formă de paralelipiped dreptunghic cu baza un dreptunghi, având laturile de 0,75 m și 0,8 m. Înălțimea paralelipipedului obținut va fi:

a) 0,5 m; **b)** 0,60 m; **c)** 0,75 m; **d)** 1 m.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Se marchează o scrisoare cu 35 de lei, folosind numai timbre de 4 lei și de 9 lei.

(2p) **a)** Se pot folosi numai timbre de 4 lei?

(3p) **b)** Câte timbre de 4 lei se folosesc?

2. Se consideră expresia $E(x) = -(2x-1)^2 + (x+2)(x-3) + 3(x+2)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

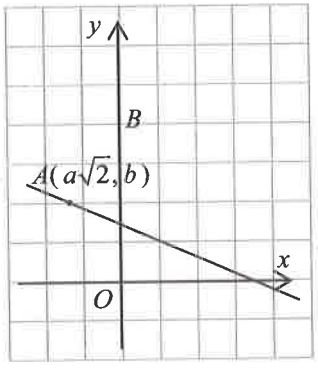
(2p) **a)** Arată că $E(x) = 15x + 5$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(3p) **b)** Determină numerele naturale a, pentru care $E(a) < 100$.

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (1-\sqrt{2})x + \sqrt{2}$.

(2p) **a)** Află media aritmetică a numerelor $f(0)$ și $f(2)$.

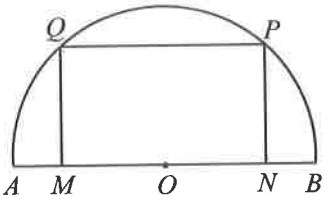
(3p) **b)** Determină numerele raționale a și b, dacă $A(a\sqrt{2}, b)$ este situat pe graficul funcției.



4. În figura alăturată este desenat un semicerc cu centrul în O și diametrul $AB = 20$ cm. Dreptunghiul $MNPQ$ cu $MQ = 5$ cm are vârfurile M și N pe AB, iar vârfurile P și Q pe semicerc.

(2p) **a)** Arată că $MN = 10\sqrt{3}$ cm.

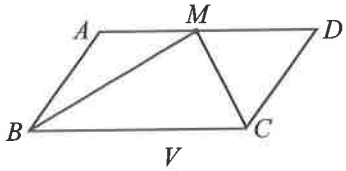
(3p) **b)** Calculează măsura unghiului ABQ.



5. În figura alăturată, $ABCD$ este paralelogram, iar BM și CM sunt bisectoarele unghiurilor B și C.

(2p) **a)** Arată că măsura unghiului BMC este de 90°.

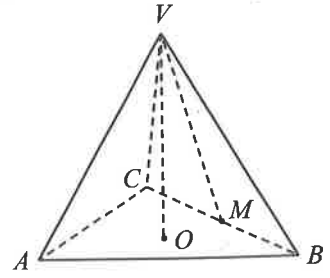
(3p) **b)** Dacă punctele A, M, D sunt coliniare, demonstrează că $AD = 2AB$.



6. În figura alăturată, $VABC$ este o piramidă triunghiulară regulată cu înălțimea $VO = 3$ cm și apotema $VM = 2\sqrt{3}$ cm, $M \in BC$.

(2p) **a)** Arată că $AB = 6$ cm.

(3p) **b)** Calculează tangenta unghiului format de dreapta VB cu planul (VAM).



✦ TESTUL 45 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Cel mai mic multiplu comun al numerelor 18 și 24 este:
a) 54; **b)** 72; **c)** 48; **d)** 144.

(5p) **2.** Patru elevi au de calculat valoarea numărului $n = 2ab - 3ac - 7a$, unde $a = -3$ și $2b - 3c = 5$. Ei obțin rezultatele:

Elevul	Ionuț	Ana	Maria	Andrei
Rezultatul	–6	–12	6	18

Răspunsul corect este cel obținut de:
a) Ionuț; **b)** Ana; **c)** Maria; **d)** Andrei.

(5p) **3.** Într-o clasă sunt 15 băieți, iar 40% din numărul elevilor sunt fete. Numărul elevilor din clasă este:
a) 20; **b)** 24; **c)** 25; **d)** 30.

(5p) **4.** Considerăm numărul $a = -0,8(3)$. Suma dintre inversul numărului a și opusul acestuia este:
a) $-\frac{11}{30}$; **b)** $\frac{11}{30}$; **c)** $-\frac{61}{30}$; **d)** $\frac{61}{30}$.

(5p) **5.** Considerăm rezolvările:

A. $\sqrt{13^2-5^2} = \sqrt{169-25} = \sqrt{144} = 12$;

B. $\sqrt{13^2-5^2} = \sqrt{13\cdot 2-5\cdot 2} = \sqrt{26-10} = \sqrt{16} = 4$;

C. $\sqrt{13^2-5^2} = \sqrt{(13-5)^2} = \sqrt{8^2} = 8$;

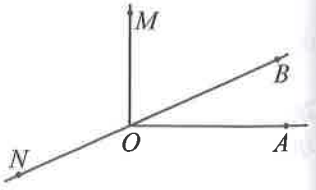
D. $\sqrt{13^2-5^2} = \sqrt{13^2} - \sqrt{5^2} = 13-5 = 8$.

Dintre rezolvările prezentate, corectă este:
a) A; **b)** B; **c)** C; **d)** D.

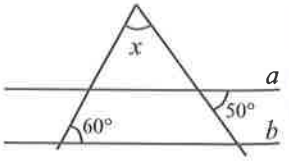
(5p) **6.** Afirmația „Orice număr prim de două cifre are cifrele distincte.” este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

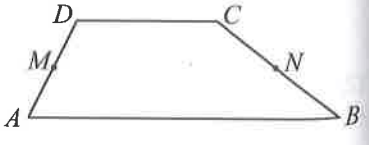
(5p) **1.** În figura alăturată, unghiul AOB are 30°, $MO \perp OA$, iar punctele B, O, N sunt coliniare. Măsura unghiului MON este:
a) 140°; **b)** 110°;
c) 120°; **d)** 130°.



(5p) **2.** În figura alăturată dreptele a și b sunt paralele. Folosind datele din figură, x este egal cu:
a) 40°; **b)** 50°;
c) 60°; **d)** 70°.

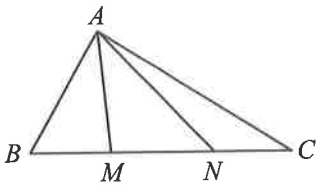


(5p) **3.** În figura alăturată este ilustrată schița unui parc $ABCD$ în formă de trapez, $AB \parallel CD$, $AB = 600$ m, $CD = 200$ m. Se construiește o alee MN, unde M este mijlocul laturii AD, iar N este mijlocul laturii CB. Lungimea aleii este:
a) 300 m; **b)** 400 m;
c) 450 m; **d)** 500 m.



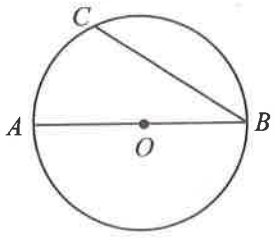
(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat un teren în formă de triunghi ABC cu aria de 600 m^2, $BC = 500$ m, iar M și N sunt două puncte pe BC, astfel încât $MN = 200$ m. Aria terenului AMN este:

a) 200 m^2; **b)** 210 m^2;
c) 220 m^2; **d)** 240 m^2.



(5p) **5.** În figura alăturată, AB este un diametru al unui cerc $\mathcal{C}(O, R)$, iar C este un punct pe cerc, astfel încât $AC = R$. Măsura unghiului ABC este:

a) 20°; **b)** 60°;
c) 45°; **d)** 30°.



(5p) **6.** Considerăm 250 de cubulețe identice. Cu o parte din aceste cubulețe formăm cel mai mare cub posibil. Numărul cubulețelor nefolosite este:

a) 20; **b)** 34;
c) 24; **d)** 30.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Într-o clasă, numărul elevilor absenți este $\frac{1}{8}$ din numărul celor prezenți. Dacă din clasă pleacă doi elevi, numărul elevilor absenți devine $\frac{1}{5}$ din numărul celor prezenți.

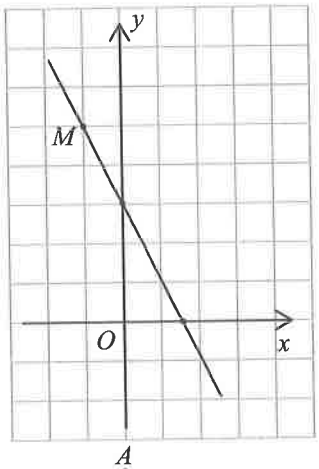
(2p) **a)** Stabilește dacă în clasă pot fi prezenți 24 de elevi.

(3p) **b)** Care este numărul total al elevilor clasei?

2. Considerăm expresia $E(x) = 1 - \frac{8}{x^2-4} \cdot \left[\left(\frac{x^2+4}{4x} - 1\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right)\right]$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$.

(2p) **a)** Arată că $E(x) = \frac{x-2}{x+2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$.

(3p) **b)** Arată că $E(-x) = \frac{1}{E(x)}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$.



3. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3 - 2x$.

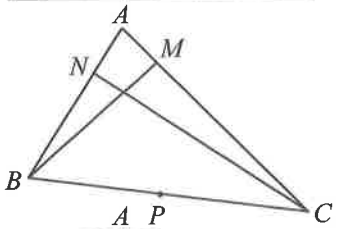
(2p) **a)** Calculează media geometrică a numerelor $a = f(\sqrt{2})$ și $b = f(-\sqrt{2})$.

(3p) **b)** Determină coordonatele punctului M, situat pe graficul funcției f, care are ordonata cu 6 mai mare decât abscisa.

4. În triunghiul ABC din figura alăturată, măsura unghiului A este de 60°, P este mijlocul laturii BC, iar BM și CN sunt înălțimile din B, respectiv C, unde $M \in AC$ și $N \in AB$.

(2p) **a)** Arată că $PM = PN$.

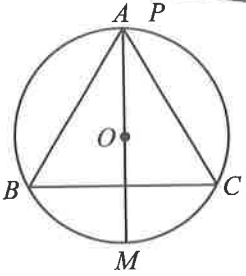
(3p) **b)** Arată că triunghiul MNP este echilateral.



5. În figura alăturată, triunghiul ABC este înscris în cercul $\mathcal{C}(O, R)$, $AB = AC = 30$ cm și $BC = 48$ cm. Dreapta AO intersectează cercul $\mathcal{C}(O, R)$ în punctul M.

(2p) **a)** Arată că triunghiul ACM este dreptunghic.

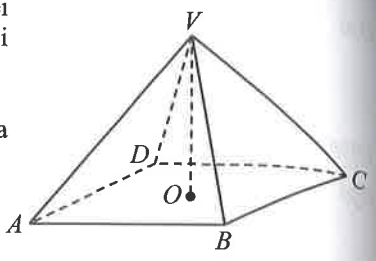
(3p) **b)** Calculează lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC.



6. Acoperișul unei case, reprezentat în figura alăturată, are forma unei piramide patrulatere regulate $VABCD$ cu latura bazei $AB = 24$ m și înălțimea $VO = 5$ m.

(2p) **a)** Arătați că apotema piramidei are lungimea egală cu 13 m.

(3p) **b)** Întărim cu tablă toate cele opt muchii ale acoperișului. Arată că lungimea totală a întăriturilor este mai mică de 167 m.



✦ TESTUL 46 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $45 - 36 : [16 - (3^2 - 2^3) \cdot 7]$ este:
a) 1; **b)** 41; **c)** 40; **d)** 0.

(5p) **2.** Un elev are la limba engleză următoarele note:

Nota	5	6	7	8	9
Numărul de note	1	1	2	1	1

Numărul notelor mai mici decât 8 este:
a) 2; **b)** 4; **c)** 3; **d)** 5.

(5p) **3.** Suma divizorilor întregi ai numărului 24 este:
a) 60; **b)** 40; **c)** 0; **d)** 80.

(5p) **4.** Considerăm numerele raționale $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}$. Patru elevi trebuie să găsească cel mai mare dintre numerele date. Răspunsurile lor sunt prezentate în tabelul următor.

Elevul	Ion	Mihai	Ana	Maria
Răspunsul	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$

Elevul care a dat răspunsul corect este:
a) Ion; **b)** Mihai; **c)** Ana; **d)** Maria.

(5p) **5.** Cifrele a și b, $a < b$, pentru care numărul $\sqrt{1ab}$ este natural, sunt:
a) $a = 2, b = 1$; **b)** $a = 4, b = 4$; **c)** $a = 6, b = 9$; **d)** $a = 5, b = 9$.

(5p) **6.** Mihai afirmă: „Restul împărțirii numărului –36 la 8 este –4". Afirmația lui Mihai este:
a) adevărată; **b)** falsă.

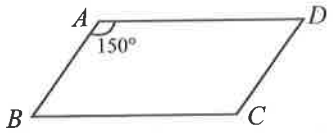
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Pe o dreaptă considerăm punctele A, B și C ca în figura următoare, $AB = 12$ cm, $AC = 20$ cm. Punctul M este mijlocul segmentului AB, iar punctul N este simetricul punctului B față de punctul C.

Lungimea segmentului MN este:
a) 20 cm; **b)** 18 cm; **c)** 14 cm; **d)** 22 cm.

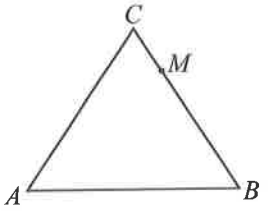
(5p) **2.** Un unghi are măsura de 47°30'. Măsura complementului său este:
a) 42°30'; **b)** 41°30'; **c)** 132°30'; **d)** 131°30'.

(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentată schița unui parc în formă de paralelogram, în care $AB = 300$ m, $BC = 400$ m și $\measuredangle DAB = 150°$. Aria parcului este:



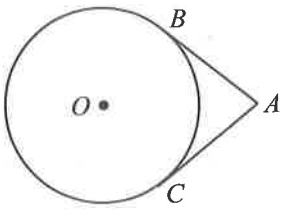
a) 1 ha; **b)** 6 ha;
c) 3 ha; **d)** 4 ha.

(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul echilateral ABC, având $AB = 8$ cm. Punctul M se află pe latura BC, iar $CM = 3$ cm. Perimetrul triunghiului ABM este egal cu:



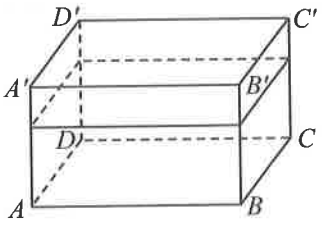
a) 20 cm; **b)** 18 cm;
c) $\left(12+4\sqrt{3}\right)$ cm; **d)** 24 cm.

(5p) **5.** În figura alăturată, AB și AC sunt tangente la cercul $\mathcal{C}(O, R)$ în B, respectiv C, $R = 4$ cm, iar $AB = AC = 4$ cm. Măsura unghiului BAC este:



a) 90°; **b)** 70°;
c) 60°; **d)** 80°.

(5p) **6.** În figura alăturată este reprezentat un acvariu în formă de paralelipiped dreptunghic cu înălțimea de 40 cm și dimensiunile bazei egale cu 50 cm și 80 cm. Punem în acvariu 120 ℓ de apă. Înălțimea la care urcă apa este:



a) 10 cm; **b)** 20 cm;
c) 30 cm; **d)** 40 cm.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Fie a, b și c trei numere întregi, astfel încât $2a + 3b + 1 = 0$ și $4b - 5c - 2 = 0$.

(2p) **a)** Arată că $8a + 15c = -10$.

(3p) **b)** Determină a și b, știind că $c = 2$.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{3}{x-1} - \frac{4}{x+1} - \frac{7}{x^2-1}\right) : \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} + 1\right)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

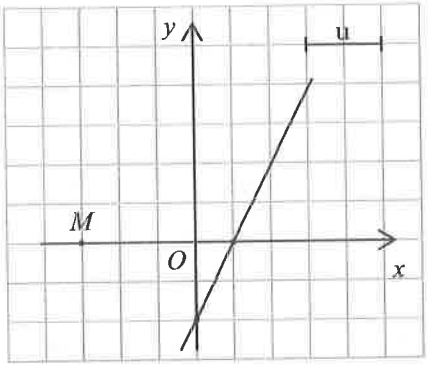
(2p) **a)** Arată că $E(x) = -\frac{1}{2x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

(3p) **b)** Calculează $E(a)$, unde $a = \frac{1}{\sqrt{5}+1} - \frac{1}{\sqrt{5}-1}$.

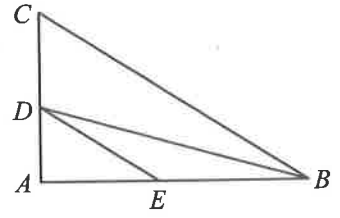
3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$.

(2p) **a)** Calculează $f(\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{2} + 1)$.

(3p) **b)** Determină distanța de la punctul $M\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ la graficul funcției f.



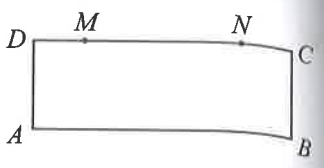
4. În figura alăturată, ABC este un triunghi dreptunghic în A, $AB = 36$ cm și D este un punct pe latura AC, astfel încât $AD = 12$ cm și $CD = 15$ cm. Paralela prin D la BC intersectează AB în E.



(2p) **a)** Arată că $DE = 20$ cm.

(3p) **b)** Arată că BD este bisectoarea unghiului ABC.

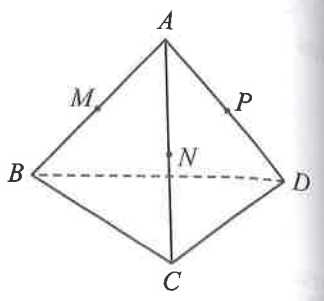
5. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 10$ cm şi $BC = 4$ cm, desenat în figura alăturată. Punctele M şi N sunt pe latura CD, $CN = 2$ cm, $CM = 8$ cm.



(2p) **a)** Arată că punctele M şi N sunt pe cercul de diametru AB.

(3p) **b)** Arată că $\sphericalangle NBC = \sphericalangle NAB$.

6. În figura alăturată este desenat tetraedrul regulat $ABCD$ cu latura $AB = 4$ cm. Punctele M, N, P sunt mijloacele muchiilor AB, AC, respectiv AD.



(2p) **a)** Calculează sinusul unghiului dintre dreptele NP şi CM.

(3p) **b)** Arată că aria totală a tetraedrului este mai mică de 28 cm^2.

✦ TESTUL 47 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Cel mai mare divizor, număr prim, al numărului 408 este:
a) 2; **b)** 17; **c)** 51; **d)** 3.

(5p) **2.** Patru elevi trebuie să efectueze următorul calcul: $6 - (-2)^2 + (-2)^3 : (-2)^2$. Cei patru elevi obţin răspunsurile din tabelul următor.

Elevul	Andrei	Maria	Ionel	Viorica
Rezultatul	4	0	8	–4

Răspunsul corect este dat de:
a) Andrei; **b)** Maria;
c) Ionel; **d)** Viorica.

(5p) **3.** Doi centimetri dintr-o fotografie reprezintă 45 m în realitate. Dacă înălţimea unui copac în această fotografie este 0,24 cm, înălţimea reală a copacului este:
a) 5 m; **b)** 5,4 m; **c)** 5,1 m; **d)** 5,04 m.

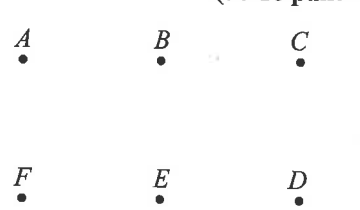
(5p) **4.** Dintre numerele $x = \frac{2}{3}$; $y = 0{,}8$; $z = \left(1\frac{1}{5}\right)^{-1}$; $t = 0{,}75$ mai mare este:
a) x; **b)** y; **c)** z; **d)** t.

(5p) **5.** Considerăm numerele $a = \sqrt{5} - \sqrt{3}$, $b = \sqrt{5} + \sqrt{3}$. Valoarea numărului $(2\sqrt{3} + a - b - 1)^{2021}$ este:
a) 1; **b)** 0; **c)** –1; **d)** $(4\sqrt{3} - 1)^{2021}$.

(5p) **6.** Vlad afirmă că: „Suma oricăror două numere iraţionale este un număr iraţional”. Afirmaţia lui Vlad este:
a) adevărată; **b)** falsă.

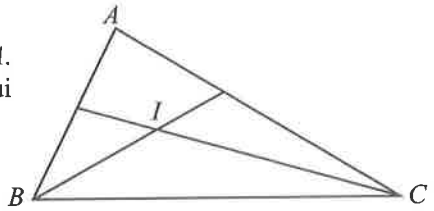
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele A, B, C, D, E, F, astfel încât $ABEF$ şi $BCDE$ sunt pătrate. Triunghiul AEC este:
a) echilateral; **b)** ascuţitunghic;
c) obtuzunghic; **d)** dreptunghic isoscel.

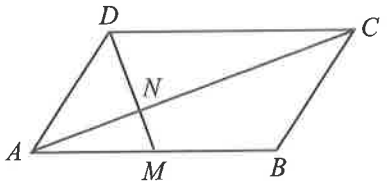


(5p) **2.** Un unghi are măsura de 76°30′. Măsura suplementului unghiului este:
a) 103°30′; **b)** 93°30′;
c) 13°30′; **d)** 104°30′.

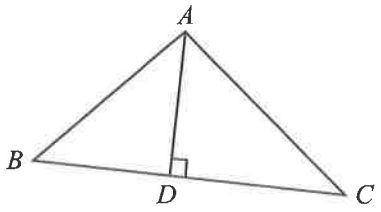
(5p) **3.** În figura alăturată este desenat triunghiul ABC dreptunghic în A. Bisectoarele unghiurilor B și C se intersectează în I. Măsura unghiului BIC este:
a) 120°; **b)** 130°;
c) 135°; **d)** 140°.



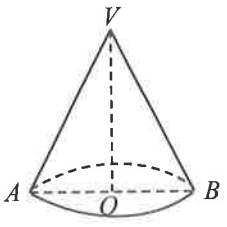
(5p) **4.** Paralelogramul $ABCD$ din figura alăturată are diagonala $AC = 30$ cm. Punctul M este mijlocul laturii AB, iar punctul N este intersecția dreptelor AC și DM.
Lungimea segmentului AN este:
a) 5 cm; **b)** 10 cm;
c) 12 cm; **d)** 6 cm.



(5p) **5.** În figura alăturată $AD = 12$ m este un stâlp vertical, iar $AB = 15$ m și AC sunt cabluri de susținere. Dacă punctele B, D, C sunt coliniare, iar unghiul BAC are 90°, lungimea cablului AC este:
a) 15 m; **b)** 16 m;
c) 18 m; **d)** 20 m.



(5p) **6.** În figura alăturată este reprezentat un cort din pânză în formă de con circular drept cu înălțimea de 3 m și raza bazei de 4 m. Dacă folosim în calcule valoarea aproximativă $\pi = 3{,}14$, aria suprafeței din pânză din care este confecționat cortul (fără bază) este egală cu:
a) 31,4 m^2; **b)** 62,8 m^2;
c) 94,2 m^2; **d)** 157 m^2;



SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Un fermier a plecat la piață să vândă 80 kg de cireșe cu 2 lei kilogramul. Din cauza căldurii, 20% din cantitatea de cireșe s-a stricat în timpul drumului.
(2p) **a)** Ce sumă de bani preconiza fermierul să obțină?
(3p) **b)** Cu ce preț trebuie să vândă cireșele rămase pentru a obține suma preconizată?

2. Fie $E(x) = \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x-1}{x+1} \cdot \left[x-1 : \left(1 - \dfrac{x-1}{x+1} \right) \right]$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

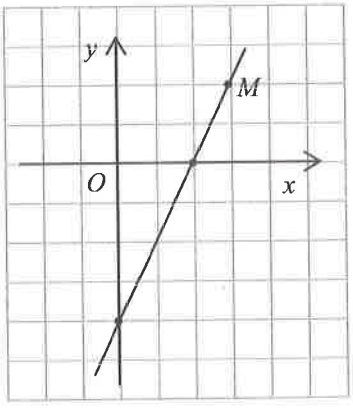
(2p) **a)** Arată că $E(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

(3p) **b)** Demonstrează că $E(\sqrt{3}) + \sqrt{3}$ este număr natural.

3. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 4$.

(2p) **a)** Calculează media geometrică a numerelor $a = f(\sqrt{5})$ și $b = f(4+\sqrt{5})$.

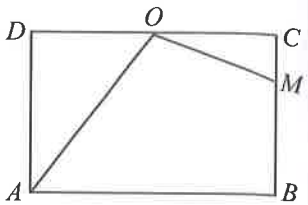
(3p) **b)** Determină coordonatele punctului M de pe graficul funcției, știind că are ordonata egală cu două treimi din abscisă.



4. În figura alăturată, dreptunghiul $ABCD$ are $AB = 2\sqrt{3}$ dm și $BC = 3$ dm. Punctul O este mijlocul laturii CD, iar M este un punct pe latura BC, astfel încât $CM = 1$ dm.

(2p) **a)** Arată că măsura unghiului AOM este $90°$.

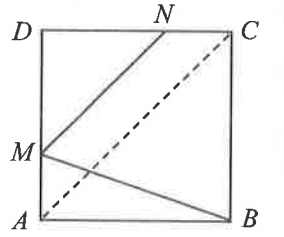
(3p) **b)** Demonstrează că lungimea drumului $AO + OM$ este mai mică de 55 cm.



5. În figura alăturată $ABCD$ este un pătrat cu latura de 6 cm. Punctele M și N se află pe laturile AD, respectiv CD, astfel încât $\measuredangle ABM = 15°$ și $MN \parallel AC$.

(2p) **a)** Arată că $AM = CN$.

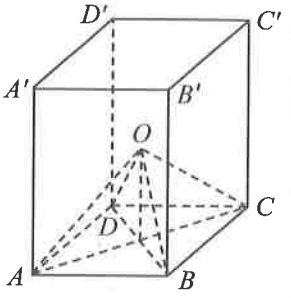
(3p) **b)** Demonstrează că triunghiul BMN este echilateral.



6. O jucărie are formă de piramidă patrulateră regulată $OABCD$ cu baza $ABCD$ și toate muchiile cu lungimea de 6 cm. Punem jucăria într-o cutie în formă de prismă patrulateră regulată cu latura bazei de 6 cm și înălțimea de $6\sqrt{6}$ cm, astfel încât piramida și prisma să aibă aceeași bază (vezi figura alăturată).

(2p) **a)** Calculează distanța de la O la planul (ABC).

(3p) **b)** Determină măsura unghiului dintre dreptele AO și AC'.



✦ TESTUL 48 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Numerele a, b sunt prime și $a + 5b = 40$. Numărul b este:

a) 2; **b)** 3; **c)** 6; **d)** 7.

(5p) **2.** În tabelul alăturat este prezentată temperatura aerului măsurată în patru zile. Cea mai mare diferență dintre cele patru temperaturi măsurate este:

Ziua	1	2	3	4
Temperatura	3°C	–4°C	–1°C	5°C

a) 9°; **b)** 7°; **c)** 2°; **d)** 6°.

(5p) **3.** Într-o urnă sunt 6 bile albe și 12 bile negre. Se extrage o bilă din urnă, fără a vedea culoarea sa. Probabilitatea ca bila să fie neagră este:

a) $\frac{1}{3}$; **b)** $\frac{1}{2}$; **c)** $\frac{2}{3}$; **d)** $\frac{3}{4}$.

(5p) **4.** Numărul valorilor întregi ale lui x pentru care numărul $2x + 1$ este divizor întreg al numărului 30 este:

a) 6; **b)** 8; **c)** 10; **d)** 16.

(5p) **5.** Patru elevi calculează media geometrică a numerelor $8\sqrt{3}$ și $6\sqrt{3}$. Aceștia obțin rezultatele din tabelul următor:

Elevul	Mihai	Andrei	Vlad	Ion
Rezultatul	144	$6\sqrt{2}$	$7\sqrt{3}$	12

Elevul care a calculat corect este:

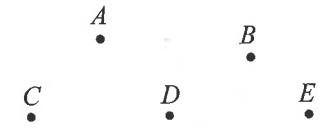
a) Mihai; **b)** Andrei; **c)** Vlad; **d)** Ion.

(5p) **6.** Ion și Vlad sunt doi copii care merg cu bicicleta. Ion merge 2 ore și 10 minute cu o viteză medie de 18 km/h, iar Vlad merge o oră și 40 minute cu o viteză medie de 21 km/h. Afirmația „Ion a mers mai mulți kilometri decât Vlad." este:

a) adevărată; **b)** falsă.

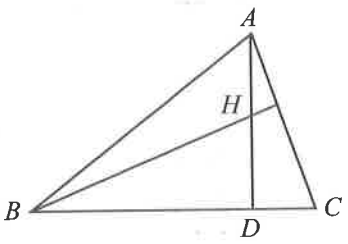
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele A, B, C, D, E, astfel încât C, D, E sunt coliniare și oricare alte trei puncte, dintre cele cinci, sunt necoliniare. Numărul maxim de drepte pe care îl obținem unind punctele câte două este:



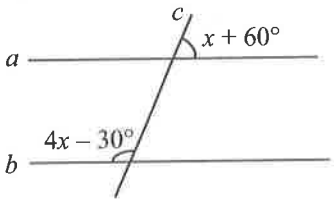
a) 6; **b)** 7;
c) 8; **d)** 10.

(5p) **2.** În figura alăturată este desenat triunghiul ABC cu $\measuredangle C = 50°$. Fie $AD \perp BC$, $D \in BC$ și H ortocentrul triunghiului ABC. Măsura unghiului BHD este:



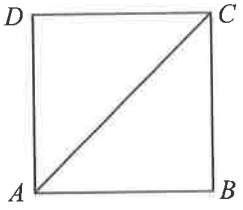
a) 30°; **b)** 40°;
c) 50°; **d)** 60°.

(5p) **3.** În figura alăturată dreptele a și b sunt paralele, iar c este o secantă. Valoarea lui x este:



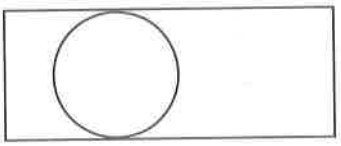
a) 20°; **b)** 30°;
c) 40°; **d)** 50°.

(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentată o placă de faianță în formă de pătrat $ABCD$ cu diagonala $AC = \sqrt{2}$ m. Aria plăcii de faianță este:



a) 1 m^2; **b)** 2 m^2;
c) 4 m^2; **d)** $2\sqrt{2}$ m^2.

(5p) **5.** Dintr-o placă de tablă în formă de dreptunghi cu laturile de 60 cm și 80 cm, decupăm un disc de rază maximă (vezi figura alăturată). Lungimea razei discului este:



a) 10 cm; **b)** 20 cm;
c) 40 cm; **d)** 30 cm.

(5p) **6.** O prismă triunghiulară regulată are latura bazei de 12 cm și aria laterală egală cu 180 cm^2. Volumul prismei este egal cu:

a) 180 cm^3; **b)** $180\sqrt{3}$ cm^3; **c)** 60 cm^3; **d)** $120\sqrt{3}$ cm^3.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Suma de bani S este împărțită Mariei și Ioanei, invers proporțional cu numerele 0,5 și 0,(3).

(2p) **a)** Care dintre cele două fete primește mai mulți bani?

(3p) **b)** Determină valoarea lui S, știind că Ioana primește 60 de lei.

2. Considerăm expresia:

$$E(x)=\left(\frac{4}{x-1}+\frac{5x-13}{x^2-1}-\frac{2}{x+1}\right):\frac{7x-7}{x^2+2x+1},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}.$$

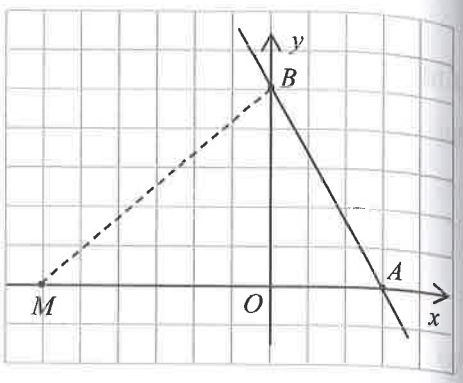
(2p) **a)** Arată că $E(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

(3p) **b)** Calculează produsul $P=E(2)\cdot E(3)\cdot\ldots\cdot E(10)$.

3. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-2x+6$.

(2p) **a)** Calculează media aritmetică a numerelor $a=f(\sqrt{2})$ și $b=f(-\sqrt{2})$.

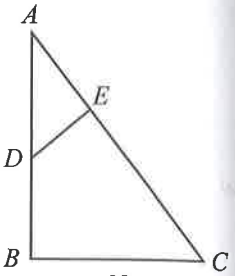
(3p) **b)** Determină coordonatele punctului $M\in Ox$, astfel încât măsura unghiului MBA să fie $90°$, unde A și B sunt punctele de intersecție a graficului funcției f cu axele de coordonate ale reperului cartezian xOy.



4. În figura alăturată sunt reprezentate trei localități A, B, C, legate între ele prin drumurile (în linie dreaptă) AB, BC și CA, AB = 20 km, BC = 15 km și $AB\perp BC$. Din mijlocul D al drumului AB se construiește o scurtătură până la AC prin drumul DE, $DE\perp AC$, $E\in AC$.

(2p) **a)** Arată că $\Delta ADE\sim\Delta ACB$.

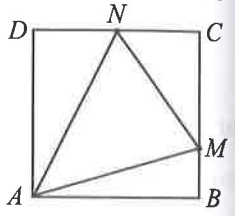
(3p) **b)** Cu cât este mai scurt drumul de la D la C prin E decât drumul de la D la C prin B?



5. În figura alăturată $ABCD$ este un pătrat cu latura AB = 6 cm, iar M și N sunt două puncte pe laturile BC respectiv CD, astfel încât BM = 2 cm și DN = 3 cm.

(2p) **a)** Calculează aria triunghiului AMN.

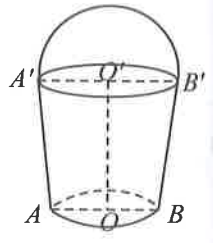
(3p) **b)** Arată că măsura unghiului MAN este $45°$.



6. În figura alăturată este schița unei găleți în formă de trunchi de con cu raza bazei mici $r=OA$ = 8 cm, raza bazei mari $R=O'A'$ = 10 cm și înălțimea OO' = 42 cm. Toarta este un semicerc de diametru $A'B'$. Considerăm pentru π aproximarea $\pi\simeq 3{,}14$.

(2p) **a)** Află lungimea toartei.

(3p) **b)** Calculează câți litri de apă încap în găleată.



✦ TESTUL 49 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Pe holul unui hotel camerele sunt numerotate ca în figura de mai jos.

1	2	3	...	25	26
52	51	50	...	28	27

Camerele 1 și 52, 2 și 51, ..., 26 și 27 sunt opuse. Camera opusă camerei 17 are numărul:

a) 34; **b)** 35; **c)** 36; **d)** 37.

(5p) **2.** Fie $a = -0{,}08$. Patru copii au de determinat următoarele numere:
Ionuț: numărul de trei ori mai mare decât a.
Maria: numărul de 0,4 ori mai mare decât a.
Ana: numărul cu $-0{,}6$ mai mic decât a.
Ioana: numărul cu $-0{,}09$ mai mare decât a.
Rezultatele obținute de elevi sunt trecute în tabelul alăturat. Elevul care a calculat corect este:

Elevul	Ionuț	Maria	Ana	Ioana
Rezultatul	$-0{,}024$	$-0{,}02$	0,52	0,17

a) Ionuț; **b)** Maria; **c)** Ana; **d)** Ioana.

(5p) **3.** Considerăm numărul $a = 3 \cdot (-1)^7 - 2 \cdot (-1)^9$. Valoarea absolută a numărului a este:
a) -1; **b)** 1; **c)** 5; **d)** -5.

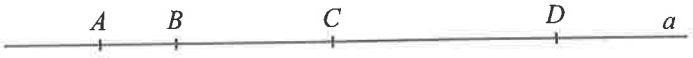
(5p) **4.** Șase muncitori termină o lucrare în 18 zile. Lucrarea poate fi terminată de 12 muncitori în:
a) 6 zile; **b)** 8 zile; **c)** 9 zile; **d)** 12 zile.

(5p) **5.** Dintre numerele $-\sqrt{3}$; $-3\sqrt{2}$; -3; $-2\sqrt{3}$ mai mare este numărul:
a) $-\sqrt{3}$; **b)** $-2\sqrt{3}$; **c)** -3; **d)** $-2\sqrt{3}$.

(5p) **6.** În timpul vacanței un grup de copii participă la activități sportive. Încep programul la ora 9:00 și alternează 40 minute de activități, urmate apoi de o pauză de 10 minute. Ana afirmă că la ora 11:40 este pauză. Afirmația Anei este:
a) adevărată; **b)** falsă.

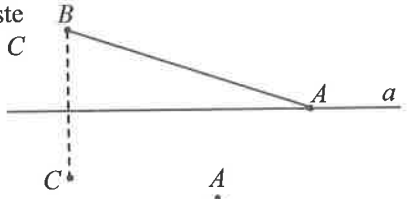
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată A, B, C, D sunt patru puncte pe dreapta a, astfel încât $AB = 1$ cm, $AC = 3$ cm, $AD = 6$ cm.

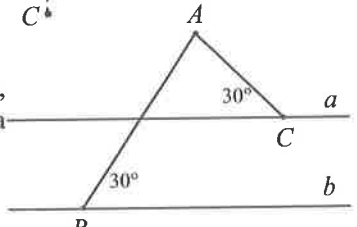


Considerăm propozițiile:
P_1: $BD = 4$cm;
P_2: C este mijlocul segmentului AD;
P_3: B este pe segmentul CD;
P_4: Lungimea segmentului AC este mare decât lungimea segmentului BD.
Dintre cele patru propoziții, cea adevărată este:
a) P_1; **b)** P_2; **c)** P_3; **d)** P_4.

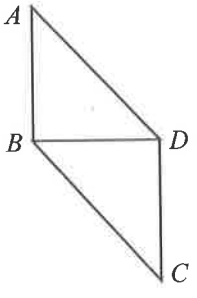
(5p) **2.** În figura de mai jos, punctul A este pe dreapta a, iar punctul B este exterior dreptei a, astfel încât unghiul dintre AB și a are $23°30'$. Punctul C este simetricul punctului B față de dreapta a.
Măsura unghiului BAC este:
a) 44°; **b)** 45°;
c) 46°; **d)** 47°.



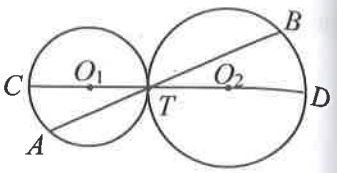
(5p) **3.** În figura alăturată, dreptele a, b sunt paralele. Dacă $AB = 10$ cm, $AC = 6$ cm, unghiul dintre AB și b are 30°, iar unghiul dintre AC și a are 30°, distanța dintre dreptele a și b este:
a) 1 cm; **b)** 2 cm;
c) 3 cm; **d)** 4 cm.



(5p) **4.** În figura alăturată este schița unui teren agricol $ABCD$, în care $\measuredangle ABD = \measuredangle BDC = 90°$, $AB = 400$ m, $BD = 300$ m și $CD = 600$ m.
Aria terenului este:
a) 18 ha; **b)** 20 ha;
c) 21 ha; **d)** 15 ha.



(5p) **5.** În figura alăturată, cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ sunt tangente în punctul T. O dreaptă care trece prin punctul T intersectează a doua oară cercurile în punctele A, respectiv B. Punctele diametral opuse lui T în cele două cercuri sunt C, respectiv D. Dacă unghiul AO_1T are 120°, atunci măsura arcului mic BD este:



a) 40°; **b)** 90°;
c) 60°; **d)** 50°.

(5p) **6.** O jucărie are formă de piramidă patrulateră regulată cu latura bazei de 6 cm și muchia laterală de $3\sqrt{3}$ cm. Ambalăm jucăriile în cutii în formă de cub cu latura de 6 cm.
Numărul maxim de jucării care poate fi pus într-o cutie este:
a) 2; **b)** 4; **c)** 1; **d)** 6.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. La un examen $\frac{1}{15}$ din numărul candidaților au fost respinși la vizita medicală. $\frac{2}{7}$ din numărul candidaților rămași au fost respinși la proba scrisă. Din candidații rămași au mai fost respinși $\frac{3}{4}$ la proba orală. Au fost admiși 25 candidați.

(2p) **a)** Numărul candidaților înscriși la examen poate fi 120? Justifică răspunsul.

(3p) **b)** Câți candidați s-au înscris la examen?

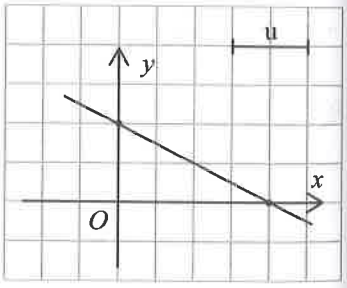
2. Considerăm expresia:

$$E(x)=\left[\left(1-\frac{3x^2}{1-x^2}\right)\cdot\frac{x-1}{2x+1}-1\right]\cdot\frac{x^2+2x+1}{x-2},\ x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1,-\frac{1}{2},0,1,2\right\}.$$

(2p) **a)** Arată că $E(x)=x+1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1,-\frac{1}{2},0,1,2\right\}$.

(3p) **b)** Calculează $E(10)+E(11)+\ldots+E(20)$.

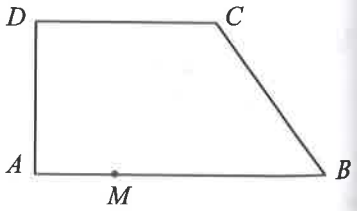
3. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-0{,}5x$.



(2p) **a)** Arată că numărul $a=f(\sqrt{2}-1)-f(\sqrt{2}-3)$ este întreg.

(3p) **b)** Calculează aria triunghiului determinat de graficul funcției f și axele de coordonate ale reperului cartezian xOy.

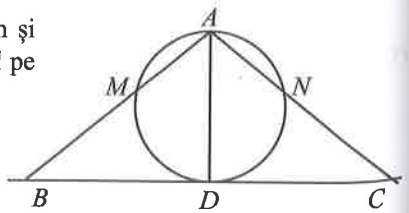
4. În figura alăturată este schița podelei unei camere în formă de trapez dreptunghic $ABCD$ în care $AB=8$ m și $BC=CD=5$ m.



(2p) **a)** Află aria podelei.

(3p) **b)** Dacă M este un punct pe latura AB, $AM=3$ m, arată că dreptele CM și BD sunt perpendiculare.

5. În figura alăturată este desenat triunghiul ABC cu $AB=AC=25$ cm și $BC=40$ cm. Cercul de diametru AD, unde D este proiecția punctului A pe BC, intersectează laturile AB și AC în punctele M și respectiv N.



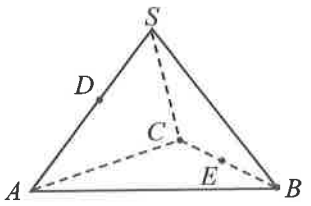
(2p) **a)** Arată că $AM=AN$.

(3p) **b)** Calculează lungimea segmentului MN.

6. În figura alăturată, $SABC$ este o piramidă triunghiulară regulată cu fețele laterale triunghiuri dreptunghice în S și $AB = 4$ cm.

(2p) **a)** Arată că $AS \perp (SBC)$.

(3p) **b)** Calculează lungimea segmentului DE, unde D este mijlocul laturii SA, iar E este mijlocul laturii BC.



✦ TESTUL 50 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $-12 : 2 \cdot 3 + (-2)^4 + 1^{10}$ este:
a) 24; **b)** -1; **c)** -33; **d)** 15.

(5p) **2.** În timpul unei excursii de patru zile un drumeț a parcurs distanțele înregistrate în tabelul alăturat. Lungimea totală a traseului este:
a) 90 km; **b)** 70 km;
c) 75 km; **d)** 100 km.

Ziua	Marți	Miercuri	Joi	Vineri
Nr. kilometri	30	25	20	25

(5p) **3.** Din 9 kg de grâu, prin măcinare, obținem 8,25 kg de făină. Cantitatea de făină obținută prin măcinarea a 300 kg de grâu este:
a) 275 kg; **b)** 285 kg; **c)** 270 kg; **d)** 291,25 kg.

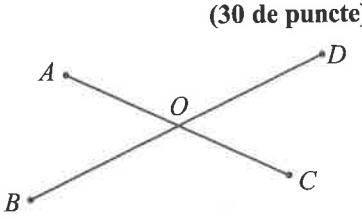
(5p) **4.** Media aritmetică a șase numere este 0,5, iar media aritmetică a cinci dintre ele este 0,4. Al șaselea număr este:
a) 0,1; **b)** 0,6; **c)** 1; **d)** 0,2.

(5p) **5.** Numărul $a = \sqrt{2} - \dfrac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ aparține mulțimii:
a) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$; **b)** $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; **c)** $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; **d)** $\mathbb{N}$.

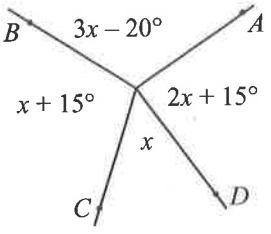
(5p) **6.** Considerăm mulțimile $A = \{-1, 0, 5\}$ și $B = \{2, -1, 6\}$. Mihai afirmă că $5 \in A \setminus B$. Afirmația lui Mihai este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată punctele A, O, C și, respectiv, B, O, D sunt coliniare, $OA = OC = 3$ cm, $OB = OD = 4$ cm și $\measuredangle AOB = 88°$. Patrulaterul $ABCD$ este:
a) dreptunghic; **b)** romb;
c) pătrat; **d)** paralelogram.

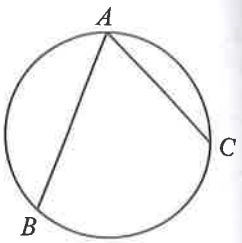


(5p) **2.** În figura alăturată, $\measuredangle AOB$, $\measuredangle BOC$, $\measuredangle COD$, $\measuredangle DOA$ sunt unghiuri în jurul punctului O. Valoarea lui x, conform informațiilor din figura alăturată, este:
a) 50°; **b)** 70°;
c) 60°; **d)** 40°.



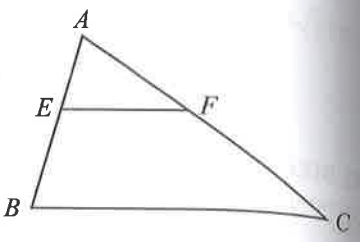
(5p) **3.** În figura alăturată, triunghiul ABC este înscris în cercul $\mathscr{C}(O, R)$, iar măsurile arcelor mici AB și AC sunt de 120°, respectiv 100°. Măsura unghiului BAC este:

a) 70°; **b)** 40°;
c) 60°; **d)** 80°.



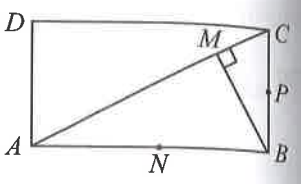
(5p) **4.** În figura alăturată este desenat triunghiul ABC și punctele $E \in AB$, $F \in AC$, astfel încât $EF \parallel BC$, $AE = 4$ cm, $AB = 12$ cm și $FC = 12$ cm. Lungimea segmentului AF este:

a) 8 cm; **b)** 5 cm;
c) 6 cm; **d)** 7 cm.



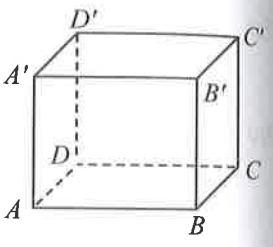
(5p) **5.** În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$, având $AB = 8$ cm și $AD = 6$ cm. Dacă $BM \perp AC$, $M \in AC$, iar N și P sunt mijloacele laturilor AB, respectiv BC, atunci perimetrul triunghiului MNP este:

a) 9,8 cm; **b)** 10,8 cm;
c) 11 cm; **d)** 12 cm.



(5p) **6.** O cutie în formă de prismă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are latura bazei $AB = 40$ cm și suma lungimilor tuturor muchiilor egală cu 520 cm (vezi figura alăturată). Lungimea înălțimii cutiei este:

a) 30 cm; **b)** 90 cm;
c) 50 cm; **d)** 60 cm.



SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. O cantitate de mere a fost împărțită în mod egal într-un număr de lădițe. Mai întâi s-au pus câte 7 kg în fiecare lădiță și au rămas 65 kg. Apoi s-au mai adăugat câte 8 kg în fiecare lădiță și a mai rămas un kilogram.

(2p) **a)** Pot fi nouă lădițe? Justifică răspunsul.

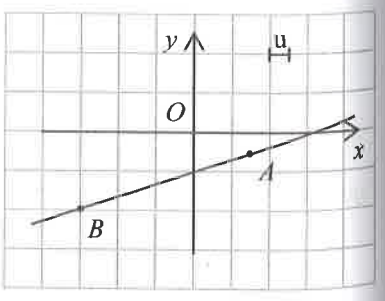
(3p) **b)** Află cantitatea inițială de mere.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)-(x-2)(x+3)$, unde x este un număr real.

(2p) **a)** Arată că $E(x) = 1 - x$, oricare ar fi numărul real x.

(3p) **b)** Calculează valoarea produsului $P = E\left(\frac{1}{2}\right)\cdot E\left(\frac{1}{3}\right)\cdot \ldots \cdot E\left(\frac{1}{10}\right)$.

3. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ și punctele $A(3, -1)$ și $B(-6, -4)$ situate pe graficul funcției f.



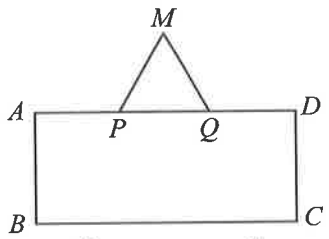
(2p) **a)** Arată că $a = \frac{1}{3}$ și $b = -2$.

(3p) **b)** Demonstrează că punctele $A(3, -1)$, $B(-6, -4)$ și $C(0, -2)$ sunt coliniare.

4. Un tablou, în formă de dreptunghi $ABCD$, $AD = 6$ cm, $AB = 2\sqrt{3}$ cm este fixat pe un perete printr-un fir de aţă PMQ, ca în figura alăturată, astfel încât $AP = PQ = QD$ şi $\measuredangle APM = \measuredangle DQM = 120°$.

(2p) **a)** Arată că triunghiul MPQ este echilateral.

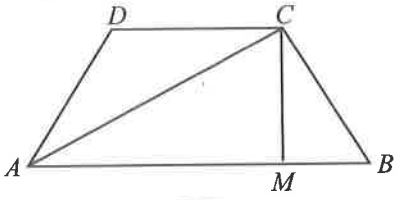
(3p) **b)** Demonstrează că punctele M, P, B sunt coliniare.



5. În figura alăturată este schiţa unei grădini în formă de trapez isoscel $ABCD$, având $AB = 120$ m, $CD = 60$ m, $AC \perp BC$, iar punctul M este proiecţia punctului C pe AB.

(2p) **a)** Arată că aria grădinii este mai mică decât o jumătate de hectar.

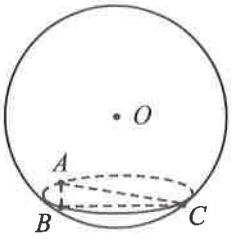
(3p) **b)** Dacă N este simetricul lui B faţă de M, demonstrează că DN este bisectoarea unghiului ADC.



6. Pe o sferă de centru O şi rază $R = 10$ cm considerăm punctele A, B, C, astfel încât $AB = 8$ cm, $BC = 12$ cm şi $AC = 4\sqrt{5}$ cm (vezi figura alăturată).

(2p) **a)** Arată că triunghiul ABC este dreptunghic.

(3p) **b)** Calculează distanţa de la punctul O la planul (ABC).



✦ TESTUL 51 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Sfertul numărului 2^{10} este:
a) 2^5; **b)** 256; **c)** 2^9; **d)** 512.

(5p) **2.** Vârstele elevilor din lotul naţional de matematică sunt reprezentate în tabelul de mai jos.

Vârsta (ani)	15	16	17	18	19
Număr elevi	1	3	5	8	4

Numărul elevilor din lot este:
a) 21; **b)** 20; **c)** 16; **d)** 17.

(5p) **3.** Considerăm numărul $a = |x - 3y + 5| - 2 \cdot |2x + y + 1|$. Valoarea numărului a pentru $x = -3$ şi $y = 2$ este:
a) -3; **b)** -2; **c)** 2; **d)** 3.

(5p) **4.** Considerăm propoziţiile:

p: $\frac{1}{4}$ din 1 ha $= 250$ m^2; q: 0,7 din 1 m^3 $= 70$ l;

r: $\frac{4}{5}$ din 1 tonă $= 800$ kg; s: $\frac{2}{3}$ din 1 oră $= 40$ min.

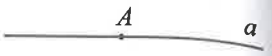
Dintre aceste propoziţii, cele adevărate sunt:
a) p şi q; **b)** p şi r; **c)** r şi s; **d)** q şi s.

(5p) **5.** Fie intervalul $A = (-4, 2)$ şi mulţimea $B = \left\{-\frac{3}{2}; \sqrt{3}; 1,7; \sqrt{5}\right\}$. Cel mai mare element din $A \cap B$ este:
a) $\sqrt{3}$; **b)** 1,7; **c)** $\sqrt{5}$; **d)** 1,9.

(5p) **6.** Andrei afirmă: „Există un număr real x, astfel încât $(x - 2)^2 = x^2 - 4$”. Afirmaţia lui Andrei este:
a) adevărată; **b)** falsă.

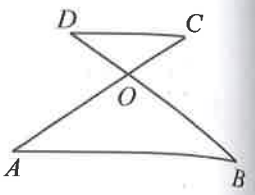
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Pe o dreaptă a considerăm un punct A (vezi figura alăturată). Numărul punctelor, de pe dreapta a, situate la doi cm de A este:



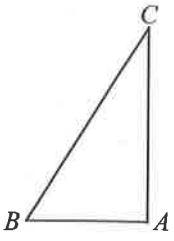
a) nici unul; **b)** 1;
c) 2; **d)** o infinitate.

(5p) **2.** În figura alăturată, punctele A, O, C sunt coliniare și $OA = 4$ cm, $OC = 2$ cm. La fel, punctele B, O, D sunt coliniare și $OB = 4$ cm, $OD = 2$ cm. Patrulaterul $ABCD$ este:



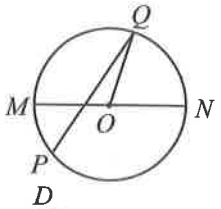
a) paralelogram; **b)** romb;
c) dreptunghi **d)** trapez isoscel.

(5p) **3.** Triunghiul dreptunghic ABC, din figura alăturată, are cateta $AB = 15$ cm și $\sin(\measuredangle ABC) = 0{,}8$. Lungimea celeilalte catete este:



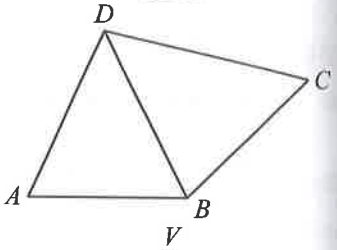
a) 15 cm; **b)** 30 cm;
c) 20 cm; **d)** 25 cm.

(5p) **4.** În figura alăturată, MN este diametru în cercul de centru O și rază R, iar PQ este o coardă, astfel încât $\measuredangle QON = 56°$. Măsura unghiului MPQ este egală cu:



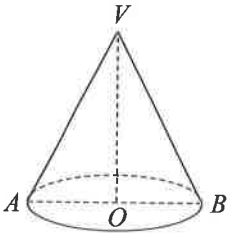
a) 62°; **b)** 28°;
c) 124°; **d)** 90°.

(5p) **5.** În patrulaterul $ABCD$ din figura alătură, triunghiul ABD este echilateral, $AB = BC = 4$cm, iar $\measuredangle ABC = 150°$. Aria patrulaterului, calculată cu o zecimală exactă, este:



a) 17,4 cm^2; **b)** 14,8 cm^2;
c) 14,9 cm^2; **d)** 15 cm^2.

(5p) **6.** Un cort are forma unui con circular drept cu raza bazei de 4 m și înălțimea de 3 m (vezi figura alăturată). Dacă o persoană are nevoie de 5 m^3 de aer, atunci numărul maxim de persoane care pot dormi în acest cort este:



a) 8; **b)** 10;
c) 20; **d)** 9.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Într-un coș sunt mere. Ionuț și Andrei iau mere din coș. Mai întâi Ionuț ia jumătate din numărul merelor din coș și încă un măr, apoi Andrei ia jumătate din numărul merelor rămase și încă un măr.

(2p) **a)** Dacă în coș erau zece mere, câte mere au rămas în coș?

(3p) **b)** Dacă în coș rămân două mere, câte mere erau la început în coș?

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\dfrac{x+2}{3} - \dfrac{3}{x+2}\right) : \dfrac{x^2+6x+5}{3x+6} + \dfrac{2}{x+1}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -5, -1\}$.

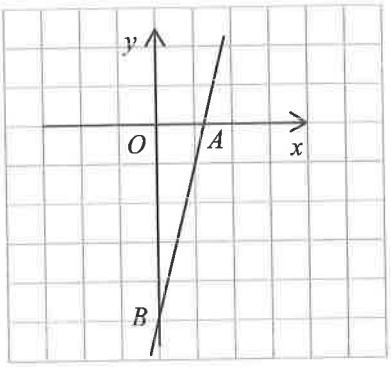
(2p) **a)** Calculează $E(0)$.

(3p) **b)** Arată că $E(x) = 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -2, -1\}$.

3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (3b - 5a)x + a - 2b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(2p) **a)** Determină a și b, știind că punctele $M(-1, -9)$ și $N(2, 3)$ sunt situate pe graficul funcției f.

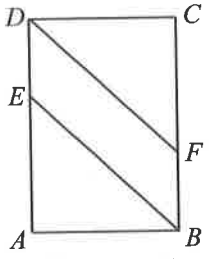
(3p) **b)** Pentru $a = 1$ și $b = 3$, arată că $f(x) = 4x - 5$ și calculează $\text{tg}(\sphericalangle OAB)$, unde A și B sunt punctele de intersecție a graficului funcției f cu axele de coordonate ale reperului ortogonal xOy.



4. În figura alăturată este reprezentat schematic un teren în formă de dreptunghi cu $AB = 100$ m și $AD = 300$ m. Terenul este împărțit în trei părți de arii egale prin drumurile BE și DF, $E \in AD$, $F \in BC$.

(2p) **a)** Arată că $DF \parallel BE$.

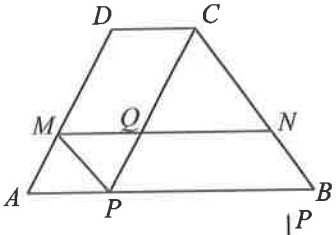
(3p) **b)** Împrejmuim terenul $DFBE$ cu un gard. Arată că lungimea gardului este mai mică de 650 m.



5. Fie $ABCD$ un trapez, $AB \parallel CD$, $AB = 14$ cm, $CD = 4$ cm și punctele $M \in (AD)$, $N \in (BC)$, $MN \parallel AB$ și $\frac{AM}{MD} = \frac{2}{3}$. Paralela prin C la AD intersectează dreptele MN și AB în punctele Q, respectiv P (vezi figura alăturată).

(2p) **a)** Calculează lungimea segmentului MN.

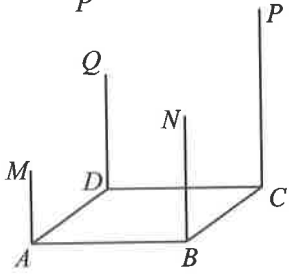
(3p) **b)** Demonstrează că $MP \parallel BC$.



6. Fie $ABCD$ un dreptunghi. De aceeași parte a planului (ABC), ridicăm pe acesta perpendicularele $MA = 2$ cm, $BN = 4$ cm, $CP = 7$ cm și $DQ = 5$ cm (ca în figura alăturată).

(2p) **a)** Arată că punctele M, N, P, Q sunt coplanare.

(3p) **b)** Demonstrează că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.



✦ TESTUL 52 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Numărul perechilor (a, b) de numere naturale nenule care verifică condiția $2a + 5b = 50$ este:

a) 3; **b)** 4; **c)** 5; **d)** 6.

(5p) **2.** Tabelul de mai jos indică recolta de grâu obținută de un agricultor de pe cele trei parcele cultivate.

Suprafața	Parcela I 0,5 ha	Parcela a II-a 1,5 ha	Parcela a III-a 3 ha
Cantitatea recoltată	1200 kg	3500 kg	8000 kg

Producția medie de grâu obținută de agricultor de pe întreaga suprafață cultivată, în kg/ha, este:

a) 2500; **b)** 2400; **c)** 2600; **d)** 2540.

(5p) **3.** Probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{0, 1, 2, ..., 5\}$, acesta să verifice inegalitatea $2^n \geq 6$, este:

a) $\frac{1}{2}$; **b)** $\frac{1}{6}$; **c)** $\frac{5}{6}$; **d)** $\frac{1}{3}$.

(5p) **4.** Scrisă sub formă de fracție ordinară ireductibilă, fracția zecimală 1,8(3) este:

a) $\frac{32}{15}$; **b)** $\frac{183}{100}$; **c)** $\frac{11}{6}$; **d)** $\frac{61}{33}$.

(5p) **5.** Numerele reale pozitive x, y verifică condițiile: $x - y = 2$ și $x^2 + y^2 = 10$. Valoarea numărului $x + y$ este:

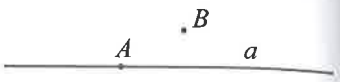
a) -4; **b)** 3; **c)** 5; **d)** 4.

(5p) **6.** Mihai parcurge, cu bicicleta, o anumită distanță în 3 ore mergând cu o viteză medie de 20 km/h. El afirmă: „Dacă aș fi mers cu 15 km/h, aș fi avut nevoie de 4 ore". Afirmația lui Mihai este:

a) adevărată; **b)** falsă.

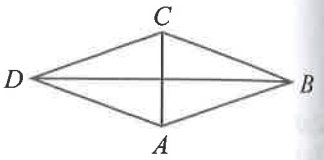
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Fie a o dreaptă, A un punct de pe dreaptă și B un punct exterior dreptei a (vezi figura alăturată). Numărul punctelor de intersecție dintre dreptele a și AB este:



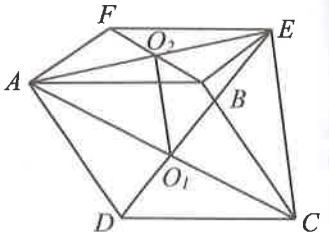
a) 1; **b)** 2;
c) 0; **d)** o infinitate.

(5p) **2.** În rombul $ABCD$, din figura alăturată, măsura unghiului ABD este de 20°. Măsura unghiului ACB este:



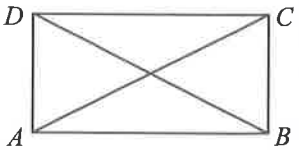
a) 60°; **b)** 50°;
c) 20°; **d)** 70°.

(5p) **3.** În figura alăturată, $ABCD$ și $ABEF$ sunt paralelograme, iar O_1 și O_2 sunt centrele lor. Dreptele O_1O_2 și CE sunt:



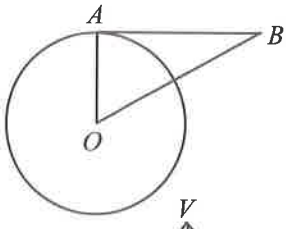
a) secante; **b)** coincid;
c) paralele; **d)** perpendiculare.

(5p) **4.** Dreptunghiul $ABCD$, din figura alăturată, are $AC = 60$ cm și unghiul dintre diagonale cu măsura de 60°. Aria dreptunghiului este:



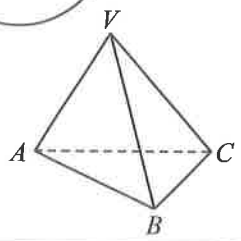
a) 3600 cm²; **b)** $1800\sqrt{3}$ cm²;
c) 1800 cm²; **d)** $900\sqrt{3}$ cm².

(5p) **5.** În figura alăturată punctul A este situat pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$, $R = \sqrt{6}$ m, iar punctul B este exterior cercului, $OB = 3\sqrt{2}$ m, iar $AB = 2\sqrt{3}$ m. Dreapta AB este:



a) secantă cercului; **b)** tangentă cercului;
c) exterioara cercului; **d)** perpendiculară pe OB.

(5p) **6.** O piramidă triunghiulară regulată are muchia laterală egală cu 6 cm și lungimea laturii bazei egală cu $6\sqrt{2}$ cm. Volumul piramidei este egal cu:



a) 36 cm³; **b)** $18\sqrt{2}$ cm³;
c) $24\sqrt{6}$ cm³; **d)** $36\sqrt{3}$ cm³.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. S-a constatat că într-o zi, la o clasă a VIII-a, numărul elevilor absenți reprezintă $\frac{1}{9}$ din numărul elevilor prezenți în clasă.

(2p) **a)** Dacă în clasă sunt 30 de elevi, câți elevi sunt absenți?

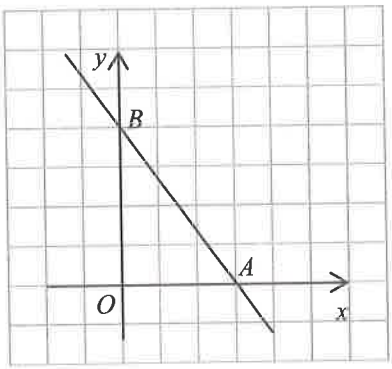
(3p) **b)** Dacă sunt trei absenți, care este numărul total al elevilor clasei a VIII-a?

2. Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{x}{4}+\frac{2}{3}\right)^2-x\left(\frac{3x}{16}-\frac{1}{3}\right)$, unde $x\in\mathbb{R}$.

(2p) **a)** Arată că $E(x)=\frac{x-1}{3}$, oricare ar fi numărul real x.

(3p) **b)** Pentru câte numere naturale $n\leq 100$, numărul $E(n)$ este întreg?

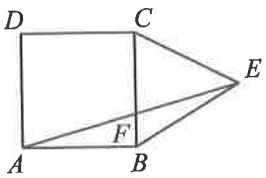
3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\frac{4}{3}x+4$. Notăm cu A și B punctele de intersecție a graficului funcției f cu axele de coordonate ale unui reper ortogonal xOy.



(2p) **a)** Calculează lungimea segmentului AB.

(3p) **b)** Fie D simetricul punctului C(3, –8) față de originea reperului O. Demonstrează că D este situat pe graficul funcției f.

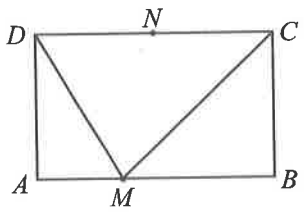
4. În figura alăturată $ABCD$ este un pătrat cu $AB=4$ cm, iar BCE este un triunghi isoscel cu $BE=CE=2\sqrt{2}$ cm. Notăm cu F punctul de intersecție a dreptelor AE și BC.



(2p) **a)** Arată că $BE \parallel AC$.

(3p) **b)** Demonstrează că $BF=\frac{1}{3}BC$.

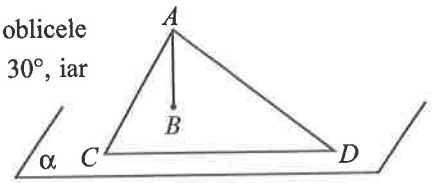
5. Pe un teren în formă de dreptunghi $ABCD$, $AB=20$ m, $BC=18$ m, se amenajează un loc de joacă în zona MDC, unde M este un punct pe latura AB, astfel încât $AM=8$ m (vezi figura alăturată).



(2p) **a)** Află suprafața locului de joacă.

(3p) **b)** Doi copii aleargă din N, mijlocul laturii CD spre M, primul pe traseul N–D–M, iar al doilea pe traseul N–C–M. Care dintre cei doi copii aleargă o distanță mai mare?

6. Distanța AB de la punctul A la planul α este de 6 cm. Din A se duc oblicele AC și AD, $C, D\in\alpha$, care fac cu planul α unghiuri de 45°, respectiv 30°, iar între ele formează un unghi drept (vezi figura alăturată).



(2p) **a)** Calculează lungimea segmentului CD.

(3p) **b)** Determină măsura unghiului dintre planele (ACD) și α.

✦ TESTUL 53 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $(2^6 - 2^5 : 8) : 12 - 3$ este:
a) 2; **b)** 3; **c)** 4; **d)** 5.

(5p) **2.** Situația mediilor generale ale unor absolvenți de clasa a VIII-a, dintr-o unitate școlară, este redată în următorul tabel.

Interval medii	[5, 6)	[6, 7)	[7, 8)	[8, 9)	[9, 10)	10
Numărul de elevi	4	15	20	60	76	3

Numărul de elevi care au medii cel puțin egale cu 8 este:
a) 159; **b)** 60; **c)** 136; **d)** 139.

(5p) **3.** Cel mai mic element din mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -20 < x \leq 15\}$ este:
a) –21; **b)** –20; **c)** –19; **d)** 0.

(5p) **4.** Media aritmetică a șase numere este 0,5, iar media aritmetică a altor patru numere este 0,25. Media aritmetică a celor zece numere este:
a) 0,1; **b)** 0,4; **c)** 0,5; **d)** 0,375.

(5p) **5.** Numărul real $a = \left|2-\sqrt{3}\right| - \left|\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right| + \sqrt{12} - 0{,}5$ este:
a) natural; **b)** întreg negativ; **c)** rațional neîntreg; **d)** irațional.

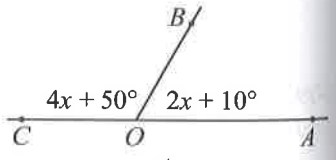
(5p) **6.** Ionuț merge cu bicicleta o distanță de 24 km între orele 8:10 și 11:40. El afirmă că a mers cu o viteză medie mai mare de 7 km/h. Afirmația lui Ionuț este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată este prezentată schematic o stradă. Stâlpii de pe stradă sunt puși din 12 m în 12 m. Distanța dintre stâlpul S_{12} și S_{23} este:

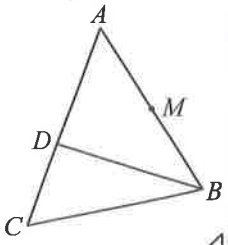
a) 132 m; **b)** 120 m;
c) 144 m; **d)** 276 m.

(5p) **2.** Unghiurile AOB și BOC, din figura alăturată, sunt adiacente suplementare. Valoarea lui x este:



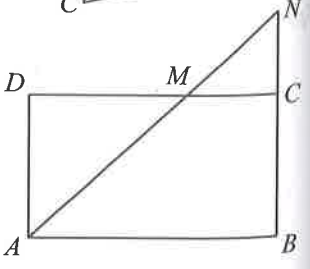
a) 10°; **b)** 20°;
c) 30°; **d)** 15°.

(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC, având $\measuredangle ABC = 40°$ și $\measuredangle ACB = 80°$. Dacă M este mijlocul laturii AB și $BD \perp AC$, atunci măsura unghiului BMD este:



a) 10°; **b)** 30°;
c) 60°; **d)** 120°.

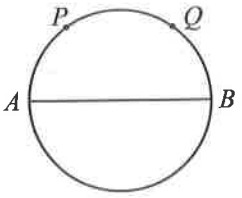
(5p) **4.** În figura alăturată, $ABCD$ este un dreptunghi cu $AB = 66$ cm și $BC = 36$ cm, iar M este un punct pe latura CD, $DM = 54$ cm. Dreapta AM intersectează dreapta BC în punctul N. Lungimea segmentului NC este:



a) 6 cm; **b)** 10 cm;
c) 8 cm; **d)** 12 cm.

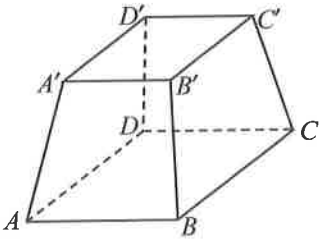
(5p) **5.** În figura alăturată este reprezentat un cerc, având diametrul $AB = 2$ cm. Dacă P și Q sunt puncte pe cerc, astfel încât $\overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{PQ} = \overset{\frown}{QB}$, atunci perimetrul patrulaterului $ABQP$ este:

a) 6 cm; **b)** 4 cm;
c) 2 cm; **d)** 5 cm.



(5p) **6.** Un postament al unei statui este reprezentat, în figura alăturată, sub forma de trunchi de piramidă patrulateră regulată cu latura bazei mari de 50 cm, latura bazei mici de 20 cm și înălțimea de 30 cm. Cantitatea de beton folosită pentru confecționarea postamentului este:

a) 39 dm^3; **b)** 39 cm^3;
c) 3900 cm^3; **d)** 0,39 m^3.



SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Suma de 300 de lei este plătită cu bancnote de 10 lei și de 5 lei, cel puțin câte o bancnotă de fiecare fel.

(2p) **a)** Care este numărul maxim de bancnote de 5 lei care poate fi folosit?

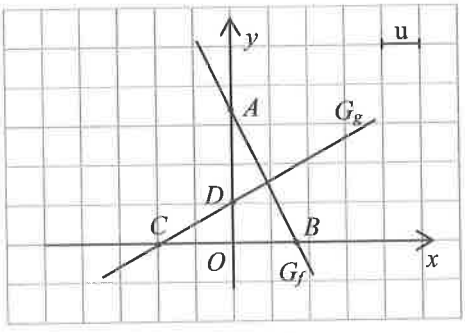
(3p) **b)** În câte moduri putem plăti suma de 300 de lei, în condițiile problemei?

2. Considerăm expresia $E(x) = \left(2+\frac{1}{x-3}\right):\left[1-\left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2\right]$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{2, \frac{5}{2}, 3\right\}$.

(2p) **a)** Arată că $E(x) = 3 - x$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{2, \frac{5}{2}, 3\right\}$.

(3p) **b)** Calculează $E^2(547) - E(546) \cdot E(548)$.

3. În figura alăturată sunt trasate graficele funcțiilor f și g, într-un reper xOy, unde $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 7$, $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$.

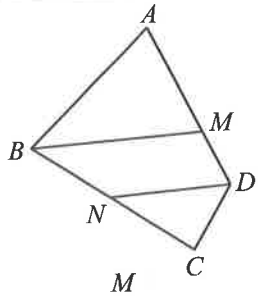


A și B sunt punctele de intersecție a graficului funcției f cu axele de coordonate, iar C și D sunt punctele de intersecție a graficului funcției g cu axele de coordonate.

(2p) **a)** Arată că $M(2, 3)$ este punct comun celor două grafice.

(3p) **b)** Demonstrează că D este ortocentrul triunghiului ABC.

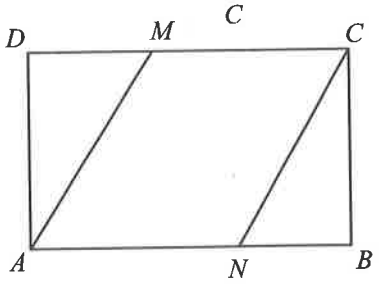
4. Fie $ABCD$ un patrulater convex, BM ($M \in AD$) bisectoarea unghiului ABC și DN ($N \in BC$) bisectoarea unghiului ADC (vezi figura alăturată).



(2p) **a)** Dacă $\measuredangle BAD = 80°$ și $BM \parallel DN$, calculează măsura unghiului BCD.

(3p) **b)** Știind că $\measuredangle BAD = \measuredangle DCB = 80°$, demonstrează că $BM \parallel DN$.

5. În figura alăturată este reprezentat schematic un parc sub forma dreptunghiului $ABCD$, cu $AB = 100$ m și $BC = 48$ m. Se știe că AM și CN sunt două alei, $DM = BN = 36$ m.



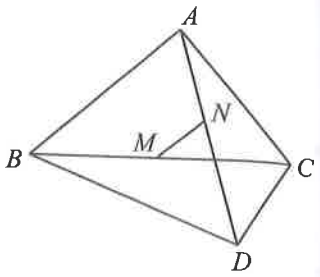
(2p) **a)** Arată că $AM \parallel CN$.

(3p) **b)** Calculează distanța dintre aleile AM și CN.

6. În figura alăturată ABC și DBC sunt două triunghiuri situate în plane diferite, cu $AB = AC = 5$ cm, $DB = DC = 5\sqrt{3}$ cm și $BC = 8$ cm.

(2p) **a)** Demonstrează că $BC \perp AD$.

(3p) **b)** Dacă, în plus, $AD = 10$ cm, calculează lungimea segmentului MN, unde M este mijlocul segmentului BC, iar N este mijlocul segmentului AD.



✦ TESTUL 54 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Dintre numerele 577, 152, 306 și 355, cel divizibil cu 17 este:
a) 577; **b)** 152; **c)** 306; **d)** 355.

(5p) **2.** Tabelul alăturat reprezintă situația statistică a absențelor, rezultată în urma monitorizării frecvenței elevilor dintr-o școală, în anul școlar 2019-2020. Numărul total de absențe înregistrate în acest an școlar este:

	Semestrul I	Semestrul II
Gimnaziu	870	590
Liceu	1730	1940

a) 5100; **b)** 5230;
c) 4130; **d)** 5130.

(5p) **3.** Considerăm mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |3x + 1| < 7\}$. Numărul elementelor mulțimii A este:
a) 4; **b)** 5; **c)** 3; **d)** 2.

(5p) **4.** Dintre numerele $x = 2\sqrt{15}$, $y = 8$, $z = 3\sqrt{7}$ și $t = \sqrt{130} : \sqrt{2}$, cel mai mic este:
a) t; **b)** x; **c)** y; **d)** z.

(5p) **5.** Considerăm numerele $a = 12 + 3\sqrt{12}$, $b = 6(2 - \sqrt{3})$. Patru elevi trebuie să calculeze media aritmetică a celor două numere. Ei obțin rezultatele din tabelul următor.

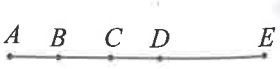
Elevul	Mihai	Ion	Maria	Ana
Rezultatul obținut	24	36	6	12

Elevul care a calculat corect este:
a) Mihai; **b)** Ion; **c)** Maria; **d)** Ana.

(5p) **6.** Fie $a = \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \frac{4}{8 \cdot 12}$. Vlad afirmă că $a \in \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right)$. Afirmația lui Vlad este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

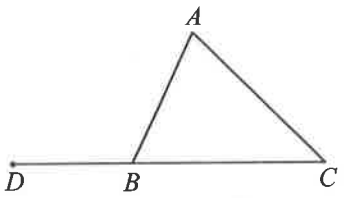
(5p) **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele coliniare A, B, C, D, E, astfel încât $AB = BC = CD = \frac{DE}{2}$. Valoarea raportului $\frac{AD}{BE}$ este:



a) 0,75; **b)** $\frac{3}{2}$; **c)** $\frac{4}{3}$; **d)** 1.

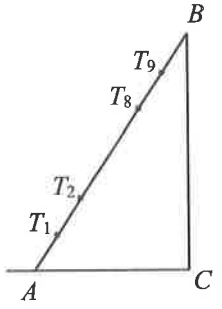
(5p) **2.** În figura alăturată, ABC este un triunghi, punctele B, C și D sunt coliniare, $\sphericalangle ACB = 30°$, iar $\sphericalangle ABD = 130°$. Măsura unghiului BAC este:

a) 90°; **b)** 100°.
c) 70°; **d)** 110°.



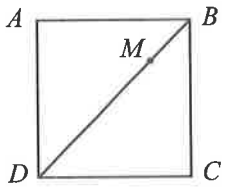
(5p) **3.** O scară AB este sprijinită de un perete $BC = 4$ m. Scara are 9 trepte: T_1, T_2, ..., T_9, astfel încât $AT_1 = T_1T_2 = ... = T_9B$. O pisică stă pe treapta T_8 (vezi figura alăturată). Distanța de la pisică la sol este:

a) 3 m; **b)** 3,2 m;
c) 4,5 m; **d)** 2,8 m.



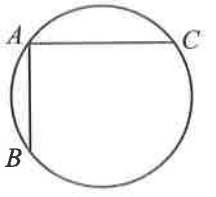
(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat pătratul $ABCD$, având $BD = 8$ cm. Punctul M se află pe diagonala BD, astfel încât $DM = 6$ cm. Aria patrulaterului $AMCD$ este egală cu:

a) 60 cm^2; **b)** 52 cm^2;
c) 48 cm^2; **d)** 24 cm^2.



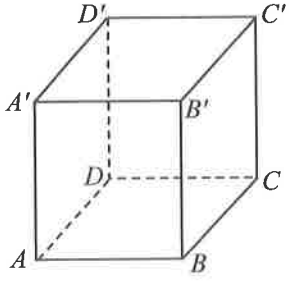
(5p) **5.** În figura alăturată sunt reprezentate două coarde perpendiculare AB și AC, ale unui cerc de rază R. Măsura unghiului BCA este egală cu 30° și $AB = 6$ cm. Raza cercului are lungimea:

a) 12 cm; **b)** 3 cm;
c) 6 cm; **d)** $6\sqrt{3}$ cm.



(5p) **6.** O cutie este confecționată din carton și are formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 30 cm, 40 cm și 50 cm (vezi figura alăturată). Un metru pătrat de carton cântărește 0,5 kg. Cutia cântărește:

a) 500 g; **b)** 520 g;
c) 480 g; **d)** 470 g.



SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Într-un bidon se află 30 de litri de lapte. Toader are la dispoziție nouă recipiente de doi litri și nouă recipiente de trei litri, care trebuie umplute în întregime pentru a putea fi sigilate.

(2p) **a)** Este posibil ca Toader să golească bidonul folosind exact 12 recipiente?

(3p) **b)** Care este numărul maxim de recipiente în care poate fi golit bidonul?

2. Fie $E(x) = \left(\dfrac{x}{x^2-x} - \dfrac{4}{4x^2-4} + \dfrac{3x^2+3x}{6x^2+12x+6}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2x^2}\right)$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

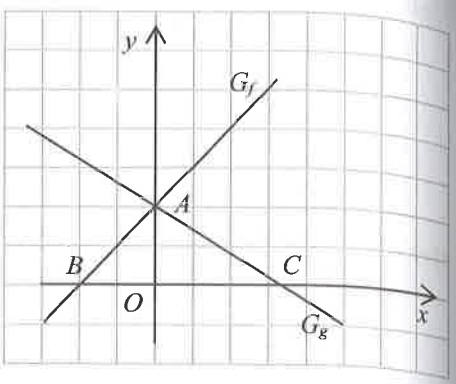
(2p) **a)** Arată că $E(x) = \dfrac{x+1}{4x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

(3p) **b)** Demonstrează că $E(x) + E(-x) = \dfrac{1}{2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

3. Considerăm funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 2$, $g(x) = -\frac{x}{\sqrt{3}} + 2$.

(2p) **a)** Arată că graficele celor două funcții se intersectează într-un punct $A \in Oy$.

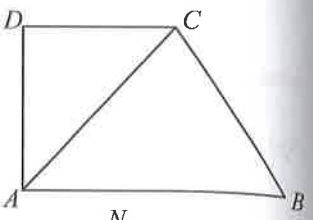
(3p) **b)** Notăm cu B punctul de intersecție dintre graficul funcției f și axa Ox și cu C punctul de intersecție dintre graficul funcției g și axa Ox. Calculează măsura unghiului BAC.



4. În figura alăturată, $ABCD$ este un trapez dreptunghic, $AB \parallel CD$, $CD < AB$, având $AD = 12$ cm, $AC = 20$ cm, $BC = 15$ cm.

(2p) **a)** Calculează perimetrul trapezului $ABCD$.

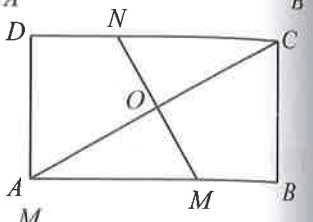
(3p) **b)** Demonstrează că $AC \perp BC$.



5. În figura alăturată este schița unui teren de joacă pentru copii sub forma unui dreptunghi $ABCD$, cu $AB = 80$ m și $BC = 60$ m. Terenul se împarte în două părți prin gardul MN, $M \in AB$, $N \in CD$, astfel încât MN este mediatoarea segmentului AC.

(2p) **a)** Arată că patrulaterul $AMCN$ este romb.

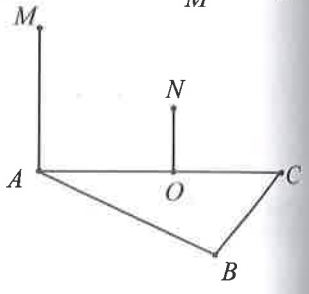
(3p) **b)** Calculează lungimea gardului MN.



6. În figura alăturată, triunghiul ABC este dreptunghic în B, $BC = 6$ m, $AC = 10$ m. Pe planul (ABC) se ridică perpendicularele MA, $MA = 8$ m și $NO = 4$ m, O fiind mijlocul lui AC.

(2p) **a)** Arată că punctele M, N și C sunt coliniare.

(3p) **b)** Determină raza sferei care conține punctele M, A, B și C.



✦ TESTUL 55 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $479 \cdot 478 - 478 \cdot 477 - 2 \cdot 476$ este:
a) 0; **b)** 2; **c)** 4; **d)** 1642.

(5p) **2.** În tabelul alăturat este descrisă o dependență funcțională. Valoarea lui a este:

x	-1	2	a
$y = 5 - 7x$	12	-9	26

a) 0; **b)** 3; **c)** -3; **d)** 4.

(5p) **3.** Fie a, b numere întregi distincte, astfel încât $a^3 = -64$ și $b^2 = 16$. Valoarea numărului $b - a$ este:
a) 0; **b)** -8; **c)** -1; **d)** 8.

(5p) **4.** Dacă x, y sunt numere reale nenule și $\frac{x}{y} = 0,6$, valoarea raportului $\frac{4y-3x}{5y-4x}$ este:
a) 1; **b)** $\frac{11}{12}$; **c)** $\frac{10}{13}$; **d)** $\frac{11}{13}$.

(5p) **5.** Considerăm numărul $a = \dfrac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - \sqrt{2}$ şi propoziţiile:

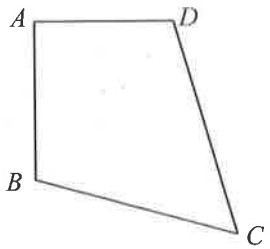
P_1: Numărul a este iraţional. P_2: Numărul a este raţional, neîntreg.
P_3: a este număr întreg negativ. P_4: a este număr natural.

Dintre aceste propoziţii, cea adevărată este:
a) P_1; **b)** P_2; **c)** P_3; **d)** P_4.

(5p) **6.** Un automobil merge cu 72 km/h. Afirmaţia: „Automobilul merge cu 20 m/s." este:
a) adevărată; **b)** falsă.

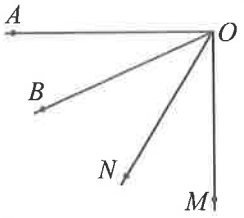
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată este desenat un patrulater convex $ABCD$, cu proprietatea că măsura unghiului A este media aritmetică a măsurilor celorlalte unghiuri. Măsura unghiului A este:



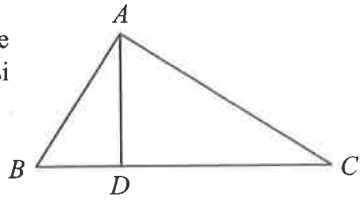
a) 70°; **b)** 100°;
c) 80°; **d)** 90°.

(5p) **2.** În figura alăturată, AOB este un unghi cu măsura egală cu 10°, OM este perpendiculară pe OA şi ON este bisectoarea unghiului BOM. Măsura unghiului AON este egală cu:



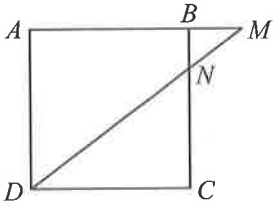
a) 50°; **b)** 80°;
c) 40°; **d)** 20°.

(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC în care punctul D este proiecţia vârfului A pe ipotenuza BC. Dacă $DC = 2 \cdot BD$ şi $AD = 2\sqrt{2}$ cm, atunci lungimea catetei AC este:



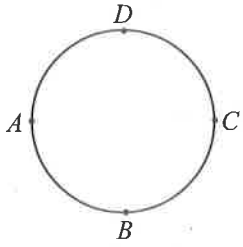
a) $2\sqrt{3}$ cm; **b)** 6 cm;
c) 4 cm; **d)** $2\sqrt{6}$ cm.

(5p) **4.** Pătratul $ABCD$ din figura alăturată are latura de 6 cm, punctul M este situat pe semidreapta AB astfel încât $AM = 8$ cm, iar $\{N\} = BC \cap DM$. Lungimea segmentului BN este egală cu:



a) 2 cm; **b)** 1,5 cm;
c) 1 cm; **d)** 3 cm.

(5p) **5.** Punctele A, B, C, D determină pe cercul din figura alăturată patru arce de măsuri egale. Dacă $BD = 6$ cm, atunci aria cercului este:



a) 36π cm^2; **b)** 6π cm^2;
c) 9 cm^2; **d)** 9π cm^2.

(5p) **6.** Aerul este un amestec gazos ce conţine 20% oxigen, în procente de volum. Volumul de oxigen dintr-o sală de clasă, în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 15 m, 8 m şi 4 m este:
a) 80 m^3; **b)** 96 m^3; **c)** 100 m^3; **d)** 106 m^3.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Media aritmetică a două numere reale a și b este 39. Mărind primul număr cu 30 și micșorând al doilea număr cu 12, primul număr devine de trei ori mai mare decât al doilea.

(2p) **a)** Arată că $a + b = 78$.

(3p) **b)** Determină numerele a și b.

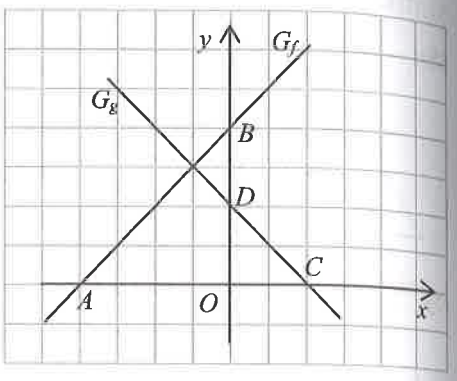
2. Se consideră expresia $E(x) = (2x - 1)^2 - 3(x - 1)^2$, unde x este un număr real.

(2p) **a)** Arată că $E(x) = x^2 + 2x - 2$, oricare ar fi numărul real x.

(3p) **b)** Demonstrează că $E(-a) = E(a - 2)$, oricare ar fi numărul real a.

3. Considerăm funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 4, g(x) = -x + 2$.

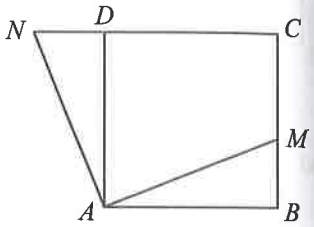
Într-un același reper xOy, graficul funcției f intersectează axele de coordonate în punctele A și B, iar graficul funcției g intersectează axele de coordonate în punctele C și D.



(2p) **a)** Arată că graficele celor două funcții sunt perpendiculare.

(3p) **b)** Demonstrează că $AD \perp BC$.

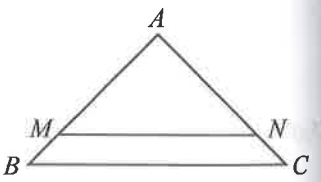
4. Fie $ABCD$ un pătrat și M un punct pe latura BC, iar N un punct pe prelungirea laturii CD, astfel încât $BM = DN$ (vezi figura alăturată).



(2p) **a)** Arată că $AM = AN$.

(3p) **b)** Determină măsura unghiului MAN.

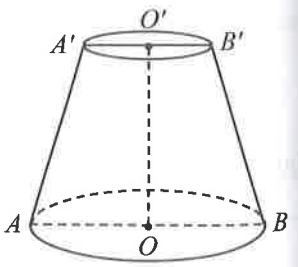
5. În figura alăturată, triunghiul ABC este isoscel, $AB = AC = 10$ cm și $BC = 16$ cm. Punctul M este pe latura AB, iar punctul N este pe latura AC, astfel încât $MN \parallel BC$ și perimetrul triunghiului AMN este egal cu perimetrul trapezului $BCNM$.



(2p) **a)** Arată că $AM = 9$ cm.

(3p) **b)** Determină lungimea segmentului MN.

6. Un trunchi de con $ABB'A'$ are raza bazei mari egală cu 12 cm, raza bazei mici egală cu 3 cm și aria laterală egală cu 225π cm^2 (vezi figura alăturată).



(2p) **a)** Arată că generatoarea trunchiului are 15 cm.

(3p) **b)** Calculează volumul trunchiului.

✦ TESTUL 56 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Numărul numerelor naturale de două cifre care împărțite la 7 dau restul egal cu 2 este:
a) 10; **b)** 11; **c)** 12; **d)** 13.

(5p) **2.** În tabelul de mai jos este prezentată situația notelor obținute de elevii unei școli la Evaluarea Națională.

Media	< 4	$4 - 4{,}99$	$5 - 5{,}99$	$6 - 6{,}99$	$7 - 7{,}99$	$8 - 8{,}99$	$9 - 9{,}99$	10
Numărul de elevi	3	4	5	4	11	22	34	7

Procentul care reprezintă numărul mediilor cel puțin egale cu 8 din numărul total este:
a) 70%; **b)** 50%; **c)** 80%; **d)** 41%.

(5p) **3.** Cel mai apropiat număr întreg de numărul $-\frac{5}{4}$ este numărul:
a) -2; **b)** -1; **c)** $-1{,}5$; **d)** 0.

(5p) **4.** Dacă x, y sunt numere reale nenule și $5x = 6y$, atunci numărul $\frac{10x}{3y}$ este egal cu:
a) 2; **b)** $\frac{25}{9}$; **c)** 1; **d)** 4.

(5p) **5.** Patru copii calculează media geometrică a numerelor $3\sqrt{8}$ și $4\sqrt{18}$. Ei obțin rezultatele:

Elevul	Ion	Maria	Vlad	Elena
Rezultatul	144	$12\sqrt{2}$	$9\sqrt{2}$	12

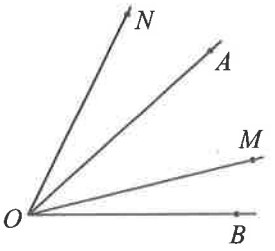
Răspunsul corect este cel dat de:
a) Ion; **b)** Maria; **c)** Vlad; **d)** Elena.

(5p) **6.** Ionuț călătorește cu trenul. El pleacă la ora 21:07 și ajunge la destinație la ora 02:42. El afirmă că a mers cu trenul 5 h și 35 minute. Afirmația lui Ionuț este:
a) adevărată; **b)** falsă.

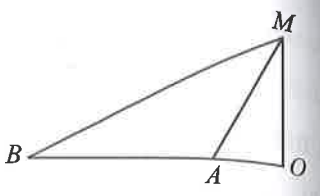
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată, punctele A, B, C, D, E sunt coliniare și $AC = 4$ cm, $BD = 8$ cm, $BC = 3$ cm, iar $AE = 10$ cm. Sunt congruente segmentele:
a) BC și CD; **b)** AC și CD;
c) CE și AC; **d)** AB și DE.

(5p) **2.** În figura alăturată, AOB este un unghi cu măsura 50°, OM este o semidreaptă interioară unghiului, $\measuredangle MOB = 22°43'7''$, iar ON este o semidreaptă exterioară unghiului AOB, $\measuredangle AON = 22°43'7''$. Măsura unghiului MON este:
a) 40°; **b)** 42°;
c) 49°36'43''; **d)** 50°.

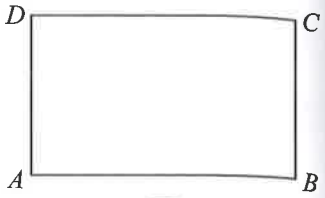


(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic MOB, având ipotenuza MB și măsura unghiului OBM egală cu 30°. Pe cateta OB se consideră punctul A, astfel încât $AB = 4\sqrt{3}$ cm și măsura unghiului MAO este de 60°. Lungimea segmentului OM este:



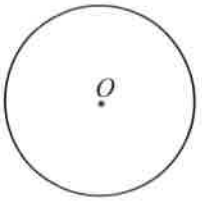
a) 4 cm; **b)** 5 cm;
c) 6 cm; **d)** 8 cm.

(5p) **4.** Un teren de joacă pentru copii are formă de dreptunghi. Lungimea acestuia este de 20 m, iar lățimea are 0,75 din lungime (vezi figura alăturată). Aria terenului este egală cu:



a) 300 m^2; **b)** 70 m^2;
c) 300 m; **d)** 150 m^2.

(5p) **5.** Cercul din figura alătură are raza de 4 cm. Raportul dintre lungimea cercului și diametrul acestuia este:



a) 3,14; **b)** 3;
c) 3,1; **d)** π.

(5p) **6.** Un bazin în formă de cub are latura de 2,5 m. În el se pune apă până la înălțimea de 2 m. Zilnic se scot 1250 ℓ de apă din bazin. Numărul de zile în care bazinul se golește este:

a) 5; **b)** 10; **c)** 4; **d)** 20.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Două numere naturale a și b au cel mai mare divizor comun egal cu 15 și cel mai mic multiplu comun egal cu 420.

(2p) **a)** Arată că $a \cdot b = 6300$.

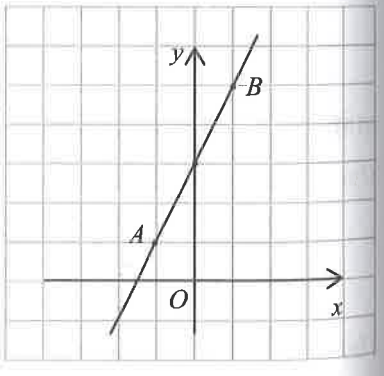
(3p) **b)** Determină numerele a și b.

2. Se consideră expresia $E(x) = (x-2)(x+1) - (x-3)(x+4)$, unde x este un număr real.

(2p) **a)** Arată că $E(x) = -2x + 10$, oricare ar fi numărul real x.

(3p) **b)** Calculează valoarea sumei $S = E(1) + E(2) + ... + E(10)$.

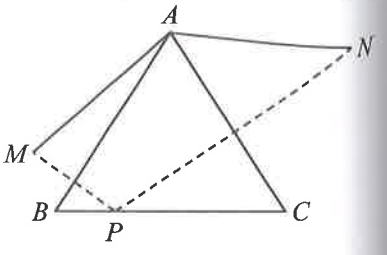
3. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$ și punctele $A(-1, a)$ și $B(b, 5)$, situate pe graficul funcției f, cu $a, b \in \mathbb{R}$.



(2p) **a)** Arată că $a = 1$ și $b = 1$.

(3p) **b)** Calculează lungimea segmentului AB.

4. În figura alăturată, P este un punct pe latura BC a triunghiului ascuțitunghic ABC, iar M și N sunt simetricele punctului P față de dreapta AB, respectiv AC.



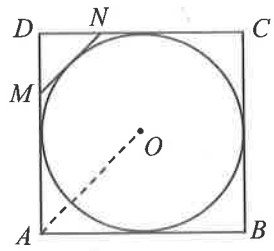
(2p) **a)** Arată că $AM = AN$.

(3p) **b)** Arată că, oricare ar fi poziția punctului P pe latura BC, punctele M, A și N nu sunt coliniare.

5. În figura alăturată, $ABCD$ este un pătrat de centru O și latură $AB = 12$ cm. Pe latura AD considerăm punctul M, astfel încât $DM = 3$ cm, iar pe latura CD considerăm punctul N, astfel încât $DN = 4$ cm.

(2p) **a)** Arată că aria triunghiului OMN este egală cu 15 cm^2.

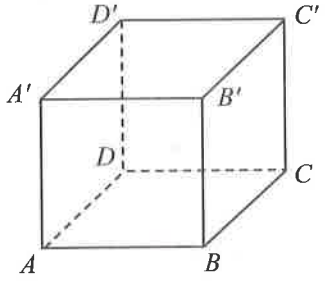
(3p) **b)** Demonstrează că MN este tangentă cercului înscris pătratului.



6. În figura alăturată este reprezentat un cub din lemn, având muchia de 6 cm. Tăiem cubul în 27 de cubulețe egale.

(2p) **a)** Arată că muchia unui cubuleț este de 2 cm.

(3p) **b)** Înainte de tăiere, vopsim cubul în albastru și constatăm că avem nevoie de exact 80 g de vopsea. Câtă vopsea albastră mai este necesară pentru a vopsi fețele noi, rezultate în urma tăierii?

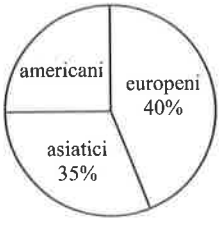


✦ TESTUL 57 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $4^0 - 5^1 + 0^6$ este:
a) –5; **b)** –4; **c)** 4; **d)** 5.

(5p) **2.** Diagrama alăturată arată repartiția celor 200 de cercetători ai unui institut, în raport cu continentul de proveniență. Numărul cercetătorilor americani din acest institut este:
a) 25; **b)** 40;
c) 50; **d)** 60.



(5p) **3.** Media geometrică a numerelor întregi din intervalul $(0, 4]$ este:
a) 4; **b)** $2\sqrt{6}$; **c)** $2\sqrt{2}$; **d)** $\frac{7}{2}$.

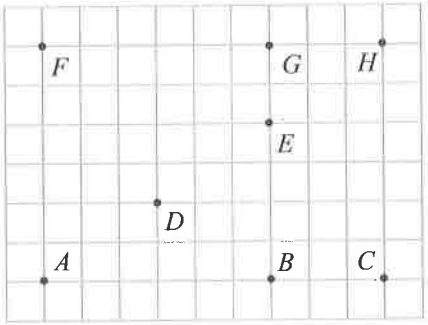
(5p) **4.** Intervalul $(-2, a]$ conține exact patru numere întregi, iar a este un număr întreg. Valoarea numărului a este:
a) 1; **b)** 2; **c)** 3; **d)** 4.

(5p) **5.** Media geometrică a numerelor $a = 3 - \sqrt{8}$ și $b = (\sqrt{2}+1)^2$ este:
a) 3; **b)** $2\sqrt{2}$; **c)** 0; **d)** 1.

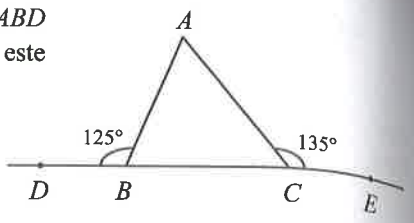
(5p) **6.** Un robinet are debitul de 10 litri pe minut. Mama spune că acest robinet va umple cada de 150 litri în mai puțin de un sfert de oră. Afirmația mamei este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele A, B, C, D, E, F, G și H. Cel mai mare număr de puncte coliniare care pot fi identificate în figură este:
a) 2; **b)** 3;
c) 4; **d)** 5.

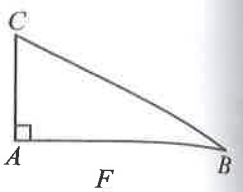


(5p) **2.** În figura alăturată, punctele B, C, D și E sunt coliniare. Unghiurile $\sphericalangle ABD$ și $\sphericalangle ACE$ au măsurile 125°, respectiv 135°. Măsura unghiului $\sphericalangle BAC$ este egală cu:



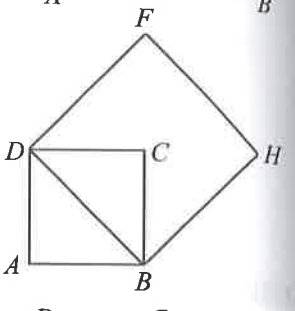
a) 80°; **b)** 85°;
c) 90°; **d)** 100°.

(5p) **3.** Triunghiul dreptunghic ABC, din figura alăturată, are catetele $AB = 60$ cm și $AC = 45$ cm. Distanța dintre ortocentrul triunghiului și centrul cercului circumscris este:



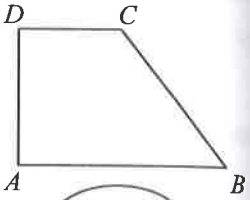
a) 37,5 cm; **b)** 50 cm;
c) 75 cm; **d)** 30 cm.

(5p) **4.** În figura alăturată, $ABCD$ și $BDFH$ sunt pătrate. Aria pătratului $ABCD$ este 75 cm^2. Aria pătratului $BDFH$ este:



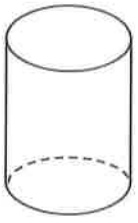
a) 100 cm^2; **b)** 150 cm^2;
c) 225 cm^2; **d)** 300 cm^2.

(5p) **5.** Trapezul $ABCD$, din figura alăturată, are $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 8$ cm, $CD = 3$ cm, $AD = 5$ cm și $BC = 5\sqrt{2}$ cm. Măsura unghiului BCD este:



a) 30°; **b)** 45°;
c) 135°; **d)** 120°.

(5p) **6.** O cutie de creioane are forma unui cilindru circular drept cu raza $R = 5$ cm și înălțimea $H = 20$ cm, ca în figura alăturată. Ionuț are patru creioane, având lungimile 15 cm, 20 cm, 22 cm, respectiv 23 cm. Numărul de creioane care încap, în întregime, în cutie este:



a) 1; **b)** 2;
c) 3; **d)** 4.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Două kilograme de roșii și patru kilograme de cartofi costă 22 de lei. Un kilogram de roșii este cu 2 lei mai scump decât unul de cartofi.

(2p) **a)** Este posibil ca un kilogram de cartofi să coste 2,50 lei? Justifică răspunsul.

(3p) **b)** Află prețul unui kilogram de roșii.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\dfrac{x+2}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+2} + \dfrac{9}{x^2+x-2}\right) : \dfrac{3}{1-x}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

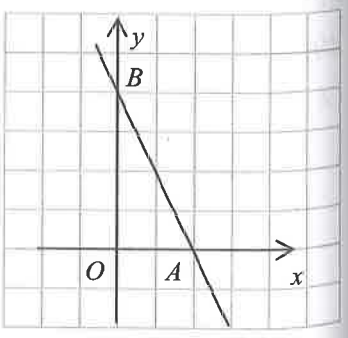
(2p) **a)** Arată că $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$, pentru orice număr real x.

(3p) **b)** Demonstrează că $E(x) = -2$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - 2x$.

(2p) **a)** Punctul $P(1, a)$ aparține graficului funcției. Determină numărul real a.

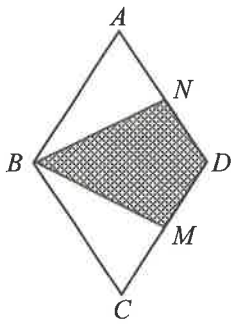
(3p) **b)** Graficul funcției intersectează axele Ox și Oy ale reperului cartezian xOy în punctele A, respectiv B. Află lungimea segmentului AB.



4. În figura alăturată este reprezentată o bucată de material textil sub forma rombului $ABCD$. O croitoreasă are nevoie de suprafața patrulateră $BMDN$ haşurată; punctele M şi N sunt mijloacele segmentelor CD, respectiv AD.

(2p) **a)** Arată că segmentele BM şi BN au lungimi egale.

(3p) **b)** Demonstrează că materialul folosit de croitoreasă are aria egală cu jumătate din cea a bucății inițiale.

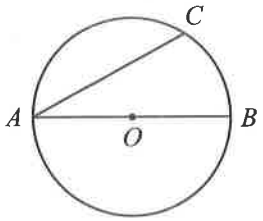


5. În figura alăturată, AB este un diametru al cercului de centru O, iar AC este o coardă a acestuia.

Segmentele AB şi AC au lungimile 10 cm, respectiv $5\sqrt{3}$ cm.

(2p) **a)** Arată că măsura unghiului $\measuredangle ACB$ este 90°.

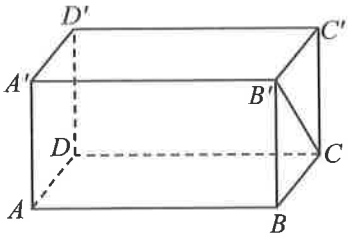
(3p) **a)** Determină lungimea arcului mic $\overset{\frown}{BC}$.



6. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ din figura alăturată are dimensiunile $AB = 12$ m, $BC = 3$ m şi $AA' = 4$ m.

(2p) **a)** Calculează aria totală a paralelipipedului.

(3p) **b)** Determină distanța de la punctul A la dreapta $B'C$.



✦ TESTUL 58 ✦

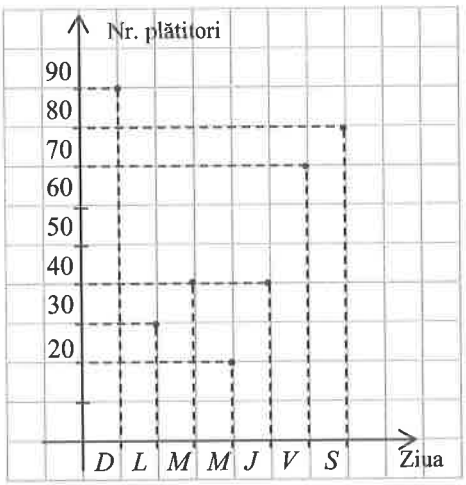
SUBIECTUL I. ***Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $0{,}75 + \frac{1}{2} : 2$ este:

a) 1; **b)** 2,75; **c)** 1,25; **d)** 1,5.

(5p) **2.** Numărul vizitatorilor plătitori ai ştrandului municipal în decursul unei săptămâni de vară este reprezentat în graficul alăturat. Diferența dintre numărul vizitatorilor de marți şi numărul celor din ziua de sâmbătă este:

a) 50; **b)** 40; **c)** –40; **d)** 60.



(5p) **3.** Dacă 5 ouă costă 6 lei, atunci 12 ouă costă:

a) 13 lei; **b)** 14 lei; **c)** 14,5 lei; **d)** 14,4 lei.

(5p) **4.** Se consideră mulțimea $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{x+6}{x-1} \in \mathbb{Z} \right\}$. Suma elementelor mulțimii A este:

a) 4; **b)** 2; **c)** 0; **d)** –2.

(5p) **5.** Ecuația $\frac{x+2}{5}+\frac{mx-1}{4}=m$ are soluția $x=3$. Valoarea parametrului real m este:

a) 4; **b)** 3; **c)** 2; **d)** 1.

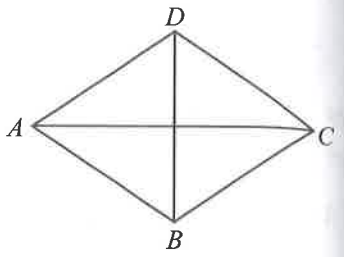
(5p) **6.** Iulia amestecă 2 ℓ de apă, având temperatura de 20°C, cu 1 ℓ de apă, având temperatura de 30°C, și spune că a obținut 3 ℓ de apă, având temperatura de 25°C. Afirmația Iuliei este:

a) adevărată; **c)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

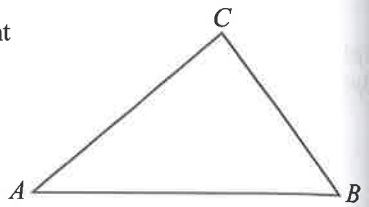
(5p) **1.** În figura alăturată este desenat cu romb cu latura de 7 cm. Distanța dintre simetricul lui A față de BD și simetricul lui B față de AC este:

a) 14 cm; **b)** 7 cm;
c) 3,5 cm; **d)** 28 cm.



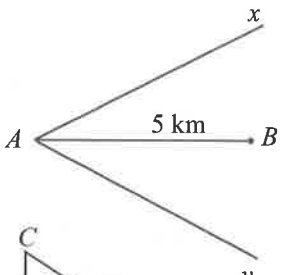
(5p) **2.** Măsurile unghiurilor $\measuredangle A$, $\measuredangle B$ și $\measuredangle C$ ale triunghiului din figura alăturată sunt direct proporționale cu numerele 2, 3 și 4. Unghiul $\measuredangle A$ are măsura:

a) 30°; **b)** 40°;
c) 60°; **d)** 80°.



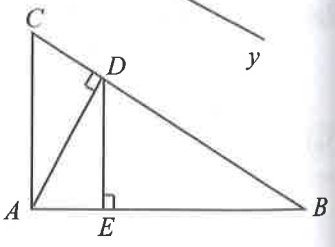
(5p) **3.** Două drumuri rectilinii Ax și Ay formează un unghi xAy, având măsura 60°, ca în figura alăturată. Domnul Ionescu vrea să construiască o casă în punctul B, aflată la 5 km de punctul A și la egală distanță de drumurile Ax și Ay. Distanța de la punctul B la Ax este:

a) 3 km; **b)** 2,5 km;
c) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ km; **d)** 2 km.



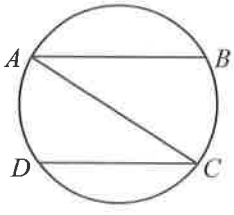
(5p) **4.** Fie ABC un triunghi cu $\measuredangle A=90°$, $\measuredangle B=30°$ și $BC=12$ cm. Construim, ca în figura alăturată, $AD\perp BC$ și $DE\perp AB$, cu $D\in BC$ și $E\in AB$. Lungimea segmentului DE este:

a) 6 cm; **b)** $3\sqrt{3}$ cm;
c) 4 cm; **d)** 4,5 cm.



(5p) **5.** În figura alăturată, AB și CD sunt două coarde paralele ale unui cerc, astfel încât $\overset{\frown}{AB}=120°$ și $\overset{\frown}{CD}=100°$. Măsura unghiului ACD este egală cu:

a) 140°; **b)** 35°;
c) 60°; **d)** 50°.



(5p) **6.** Un vas de forma unui cilindru circular drept cu raza $R=1{,}5$ dm și înălțimea $H=6$ dm. Vasul este plin cu apă. Vărsăm toată apa din vas în pahare cilindrice identice, cu raza $r=3$ cm și înălțimea $h=12$ cm. Numărul paharelor necesare este:

a) 10; **b)** 25; **c)** 125; **d)** 60.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Într-un grup de copii, numărul fetelor este de trei cincimi din numărul membrilor grupului. Dacă ar mai veni patru fete, numărul fetelor ar fi dublul numărului băieților.

(2p) **a)** Ce procent reprezintă numărul inițial al fetelor din numărul total inițial de copii?

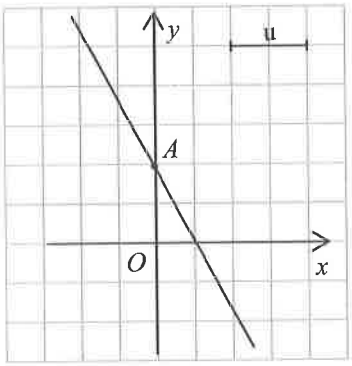
(3p) **b)** Câți băieți sunt în grup?

2. Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right):\frac{x^2+x-6}{x^3+3x^2-4x-12}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-2,-1,2\}$.

(2p) **a)** Arată că $x^3+3x^2-4x-12=(x-2)(x+2)(x+3)$, oricare ar fi numărul real x.

(3p) **b)** Demonstrează că $E(x)=\frac{x+3}{x+1}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-2,-1,2\}$.

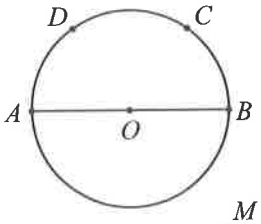
3. În figura alăturată este reprezentată grafic funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=1-2x$, într-un sistem de coordonate xOy. Notăm cu A punctul de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy.



(2p) **a)** Arată că punctul A are coordonatele $(0, 1)$.

(3p) **b)** Află coordonatele punctului B, situat pe graficul funcției, pentru care $AB=2\sqrt{5}$.

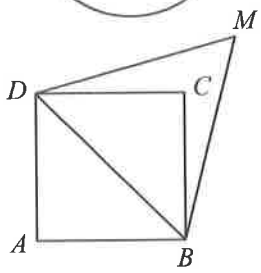
4. În figura alăturată, AB este un diametru al cercului de centru O, iar C și D situate pe același semicerc delimitat de AB, sunt astfel încât $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DA}$.



(2p) **a)** Arată că unghiul COD are măsura $60°$.

(3p) **b)** Demonstrează că patrulaterul $ABCD$ este un trapez isoscel.

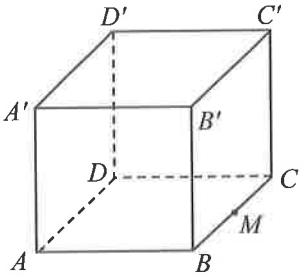
5. În figura alăturată, $ABCD$ este un pătrat cu diagonala $AC=10$ cm, iar BDM este un triunghi echilateral (punctele C și M sunt de aceeași parte a dreptei BD).



(2p) **a)** Calculează aria pătratului.

(3p) **b)** Arată că segmentul CM are lungimea $5(\sqrt{3}-1)$ cm.

6. În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$, având latura $AB=30$ cm. Punctul M este mijlocul laturii BC.



(2p) **a)** Câți litri de apă încap într-un vas ce are forma și dimensiunile acestui cub?

(3p) **b)** Determină distanța de la punctul A' la planul (MDD').

✦ TESTUL 59 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Opusul numărului rațional $a = 3 - 0{,}4 : 0{,}1$ este:
a) -24; **b)** -1; **c)** 1; **d)** 24.

(5p) **2.** Dacă numerele reale x și y verifică relația $\frac{x-1}{0{,}2} = \frac{y+1}{0{,}(3)}$, atunci rezultatul calculului $5x - 3y$ este:
a) 8; **b)** -2; **c)** -8; **d)** 2.

(5p) **3.** După o ieftinire cu 10%, o mașină de spălat costă 900 de lei. Prețul mașinii înainte de ieftinire era:
a) 1000 de lei; **b)** 990 de lei; **c)** 810 lei; **d)** 1900 de lei.

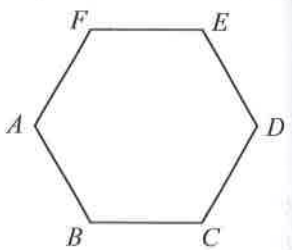
(5p) **4.** Numărul natural n are proprietatea că produsul numerelor întregi din intervalul $[1, n)$ este 6. Valoarea numărului n este:
a) 2; **b)** 3; **c)** 4; **d)** 5.

(5p) **5.** Se consideră numerele reale $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$ și $b = \sqrt{5^2 - 3^2}$. Media geometrică a numerelor a și b este:
a) 1; **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **c)** $\frac{3}{2}$; **d)** $\frac{1}{6}$.

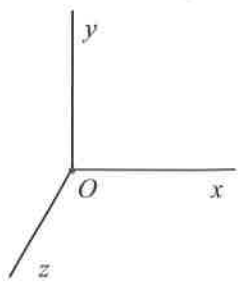
(5p) **6.** Gabriel are o datorie de 20 de lei față de Dorel. El îi dă 15 lei lui Dorel și afirmă că îi rămâne dator cu încă 5 lei. Afirmația lui Gabriel este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

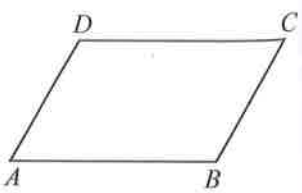
(5p) **1.** În figura alăturată este desenat un hexagon regulat $ABCDEF$. Numărul diagonalelor hexagonului este:
a) 3; **b)** 6;
c) 8; **d)** 9.



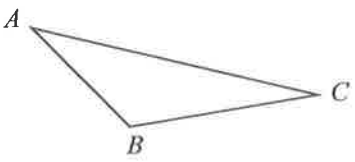
(5p) **2.** Semidreptele Ox, Oy și Oz, din figura alăturată, sunt poziționate astfel încât Ox se află în exteriorul unghiului yOz. Știm că $\sphericalangle xOy = 90°$ și $\sphericalangle yOz = 130°$. Măsura unghiului xOz este:
a) $220°$; **b)** $140°$;
c) $130°$; **d)** $210°$.



(5p) **3.** Paralelogramul $ABCD$ din figura alăturată reprezintă harta unei zone turistice: patru obiective importante sunt situate în vârfurile sale. Un turist parcurge traseul A–B–C–D–A, mergând 42 km. Distanța dintre A și B este cu 3 km mai mare decât distanța dintre B și C. Distanța dintre obiectivele C și D este:
a) 9 km; **b)** 10 km;
c) 11 km; **d)** 12 km.

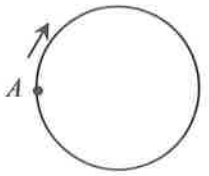


(5p) **4.** Triunghiul ABC din figura alăturată are $AB = 5$ cm, $BC = 8$ cm și $\measuredangle ABC = 150°$. Aria triunghiului este:



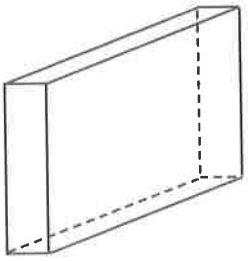
a) 10 cm²; **b)** 20 cm²;
c) 24 cm²; **d)** 40 cm².

(5p) **5.** O piscină circulară are suprafața de 100π m². Adrian pleacă din punctul A, în sensul indicat de săgeata din figură, ocolește piscina și revine în punctul A. Distanța parcursă de Adrian, aproximată la cel mai apropiat număr întreg de metri, este:



a) 10 m; **b)** 20 m;
c) 62 m; **d)** 63 m.

(5p) **6.** Zidul din figura alăturată are forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile bazei 10 m × 1 m și înălțimea de 2 m. Jorj văruiește toate fețele vizibile ale zidului, consumând câte 0,5 ℓ de var pentru fiecare metru pătrat de suprafață. Cantitatea totală de var pe care o consumă Jorj este:



a) 27 ℓ; **b)** 22 ℓ;
c) 44 ℓ; **d)** 18 ℓ.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Maria cumpără 12 caiete și creioane, plătind, în total, 28 de lei. Numărul creioanelor este dublul numărului de caiete. Un caiet este de cinci ori mai scump decât un creion.

(2p) **a)** Câte caiete cumpără Maria?

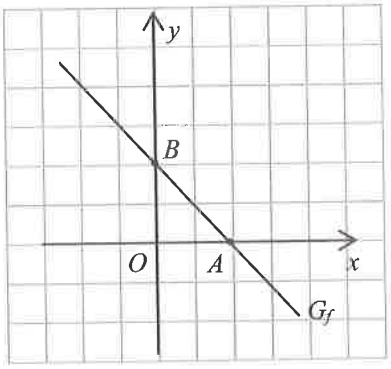
(3p) **b)** Care este prețul unui caiet?

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{x+3}{x+1} - \frac{x+1}{x+3}\right) : \frac{2x+4}{x^2+x} - \frac{x-3}{x+3}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1, 0\}$.

(2p) **a)** Arată că $E(1) = 1$.

(3p) **b)** Demonstrează că $E(x)$ are o valoare constantă oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1, 0\}$.

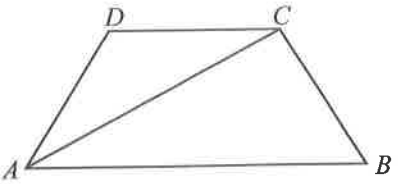
3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - x$. În figura alăturată, punctele A și B sunt intersecțiile graficului funcției f cu axele Ox, respectiv Oy ale sistemului de coordonate xOy.



(2p) **a)** Află coordonatele punctului A.

(3p) **b)** Determină coordonatele simetricului punctului A față de punctul B.

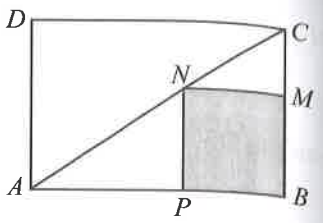
4. În figura alăturată este desenat un trapez cu baza mare AB. Se știe că $AB = 2AD = 2BC = 2CD$.



(2p) **a)** Arată că $\measuredangle ACD \equiv \measuredangle CAB$.

(3p) **b)** Determină măsurile unghiurilor trapezului.

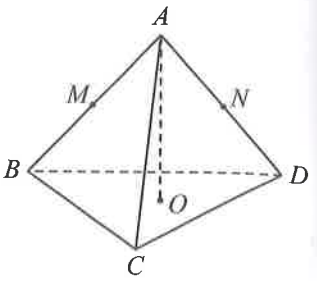
5. Un covor dreptunghiular are lungimea diagonalei $AC = 5$ m și lungimea laturii $AB = 4$ m. Un colț al covorului este acoperit de un șifonier, ca în figura alăturată; baza șifonierului este pătratul $BMNP$, cu $M \in BC$, $N \in AC$ și $P \in AB$.



(2p) **a)** Află aria covorului.

(3p) **b)** Arată că lungimea segmentului BM este $\frac{12}{7}$ m.

6. Tetraedrul regulat $ABCD$ din figura alăturată are înălțimea AO de lungime $2\sqrt{6}$ cm. Punctele M și N sunt mijloacele muchiilor AB, respectiv AD.



(2p) **a)** Arată că lungimea segmentului MN este 3 cm.

(3p) **b)** Află aria proiecției triunghiului CMN pe planul (BCD).

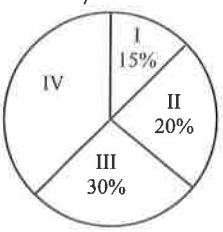
✦ TESTUL 60 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Inversul numărului rațional $a = 0{,}5 - \frac{1}{6} : \frac{2}{3}$ este:

a) 4; **b)** $-\frac{1}{4}$; **c)** -4; **d)** $-\frac{2}{7}$.

(5p) **2.** O firmă trebuie să construiască 100 km de autostradă în 4 ani. În diagrama alăturată este reprezentat procentul din lucrare realizat în fiecare dintre primii trei ani. Numărul de kilometri care trebuie realizați în ultimul an este:



a) 30; **b)** 35;
c) 40; **d)** 70.

(5p) **3.** Dacă 30 de muncitori pot termina o lucrare în 12 ore, atunci 40 de muncitori, la fel de harnici, vor termina lucrarea în:

a) 12 ore; **b)** 16 ore; **c)** 9 ore; **d)** 10 ore.

(5p) **4.** Considerăm mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 9\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^x < 9\}$. Atunci:

a) $A \subset B$; **b)** $A = B$; **c)** $A \supset B$; **d)** $A \cap B = \emptyset$.

(5p) **5.** Se dau numerele $a = (2+\sqrt{2})^2 - \sqrt{8} - \frac{1}{3-2\sqrt{2}}$ și $b = (0{,}2)^{-1}$. Media aritmetică a numerelor a și b este:

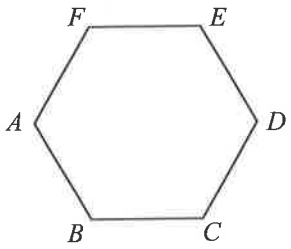
a) $2\sqrt{2}$; **b)** $2+\sqrt{2}$; **c)** 4; **d)** 1.

(5p) **6.** În școala Anei sunt două clase a V-a: prima are 25 elevi, iar a doua cu 3 mai mult. Ana spune că în școala sa învață 52 de elevi de clasa a V-a. Afirmația Anei este:

a) adevărată; **b)** falsă.

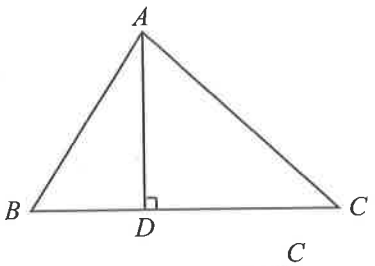
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată este desenat un hexagon regulat $ABCDEF$. Trasând câteva dintre diagonale, împărțim interiorul hexagonului în suprafețe triunghiulare. Numărul minim de triunghiuri care se pot obține este:



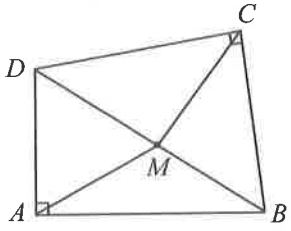
a) 5; **b)** 3;
c) 6; **d)** 4.

(5p) **2.** Fie AD înălțimea corespunzătoare ipotenuzei triunghiului dreptunghic ABC, din figura alăturată. Diferența dintre măsurile unghiurilor BAD și ACB este:



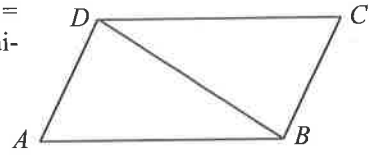
a) 30°; **b)** 45°;
c) 0°; **d)** 15°.

(5p) **3.** În figura alăturată, $ABCD$ este un patrulater cu $\measuredangle A = \measuredangle C = 90°$. Lungimile diagonalelor sale sunt $AC = 10$ cm și $BD = 11$ cm, iar M este mijlocul segmentului BD. Perimetrul triunghiului MAC este:



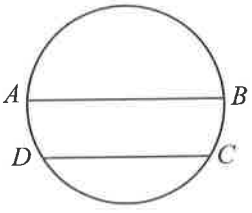
a) 20 cm; **b)** 20,5 cm;
c) 21 cm; **d)** 24 cm.

(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat paralelogramul $ABCD$, având $AD = 4$ cm și perimetrul egal cu 24 cm. Dacă diagonala BD este perpendiculară pe latura AD, atunci măsura unghiului ABC este egală cu:



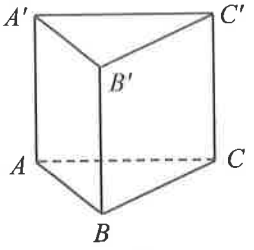
a) 120°; **b)** 100°;
c) 30°; **d)** 90°.

(5p) **5.** În figura alăturată, AB și CD sunt două coarde paralele ale unui cerc. Măsura arcului mic CD este egală cu 100°, iar $\measuredangle BAC = 30°$. Măsura unghiului ACB este egală cu:



a) 120°; **b)** 140°;
c) 70°; **d)** 55°.

(5p) **6.** În figura alăturată este reprezentată o prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu muchia bazei $AB = 8$ cm și muchia laterală $AA' = 4$ cm. Măsura unghiului format de planele $(A'BC)$ și (ABC) este:



a) 30°; **b)** 45°;
c) 60°; **d)** 90°.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Tatăl și fiul au împreună 55 ani, iar raportul vârstelor lor este 4,5.

(2p) **a)** Află vârsta fiului.

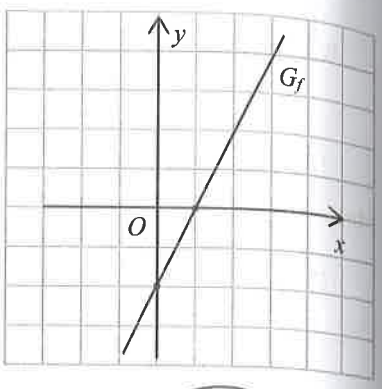
(3p) **b)** Peste câți ani vârsta tatălui va fi dublul vârstei fiului?

2. Se consideră expresia $E(x) = \frac{2x}{x+1} + \left(\frac{x-3}{x+1} + \frac{x+1}{x-3} - 2\right) : \frac{8}{x-3}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$.

(2p) **a)** Arată că $E(0) = 2$.

(3p) **b)** Demonstrează că $E(x)$ are valoare constantă, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$.

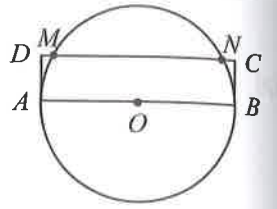
3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$. În figura alăturată este reprezentat graficul funcției într-un reper cartezian xOy.



(2p) **a)** Comparați numerele $f(1)$ și $f(\sqrt{2})$.

(3p) **b)** Află aria suprafeței delimitată de graficul funcției și axele de coordonate.

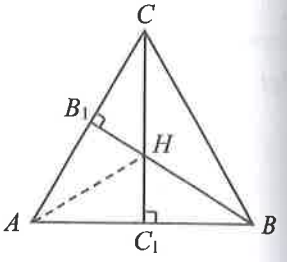
4. În figura alăturată, $ABCD$ este un dreptunghi cu $AB = 26$ cm și $BC = 5$ cm, iar cercul de centru O admite segmentul AB ca diametru.



(2p) **a)** Demonstrează că dreapta CD este secantă cercului.

(3p) **b)** Calculează lungimea segmentului MN, unde M și N sunt punctele în care dreapta CD intersectează cercul.

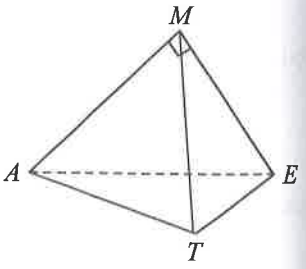
5. În figura alăturată, BB_1 și CC_1 sunt înălțimi în triunghiul ascuțitunghic BAC, iar $\{H\} = BB_1 \cap CC_1$.



(2p) **a)** Arată că dreptele AH și BC sunt perpendiculare.

(3p) **b)** Demonstrează că $BH \cdot B_1H = CH \cdot C_1H$.

6. În figura alăturată este reprezentată piramida triunghiulară regulată $MATE$, având vârful M. Se știe că $MA = 3\sqrt{2}$ cm, iar $\sphericalangle AME = 90°$.



(2p) **a)** Arată că aria laterală a piramidei este 27 cm^2.

(3p) **b)** Determină distanța de la punctul A la planul (MTE).

✦ TESTUL 61 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Cel mai mare număr de forma $\overline{x2y}$, divizibil cu 9, este:

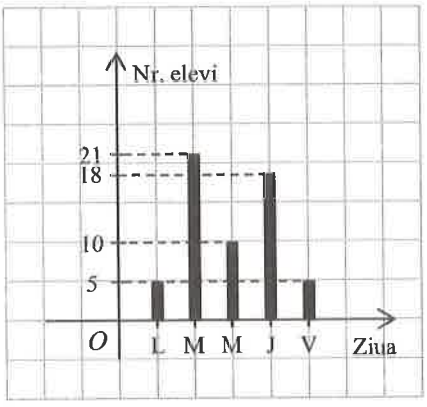
a) 929; **b)** 999; **c)** 729; **d)** 927.

(5p) **2.** Se dizolvă 25g sare în 225g apă. Concentrația soluției obținute este:

a) 9%; **b)** 10%; **c)** 12%; **d)** 11,(1)%.

(5p) **3.** Diagrama alăturată arată numărul elevilor unei şcoli care au absentat într-o săptămână în care condiţiile meteorologice au fost nefavorabile. Cei mai mulţi absenţi au fost în ziua de:

a) luni; **b)** marţi;
c) miercuri; **d)** joi.



(5p) **4.** Se consideră ecuaţia $x^2 - 3x + m = 0$, având necunoscuta x. Una dintre soluţiile ecuaţiei este $x_1 = 1$. Cea de-a doua soluţie a ecuaţiei este:

a) 0; **b)** 3;
c) 2; **d)** 0,5.

(5p) **5.** Se dau numerele reale $a = 3\sqrt{21} - \sqrt{\frac{7}{3}} - 2\sqrt{\frac{27}{7}}$ şi $b = \left(\frac{\sqrt{21}}{19}\right)^{-1}$. Rezultatul calculului $a : b$ este:

a) $\frac{722}{21}$; **b)** $\frac{2\sqrt{21}}{19}$; **c)** 2; **d)** 1.

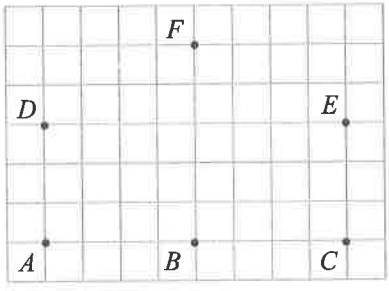
(5p) **6.** Vasile numără din doi în doi: 1, 3, 5, 7, ..., 31. Nicolae numără din trei în trei: 1, 4, 7, ..., 31 şi observă că exact şase dintre numerele spuse de el au fost rostite şi de Vasile. Observaţia lui Nicolae este:

a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

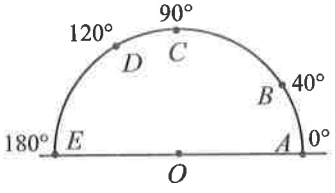
(5p) **1.** În figura alăturată, simetricul punctului C faţă de dreapta BF este punctul:

a) A; **b)** B;
c) E; **d)** D.



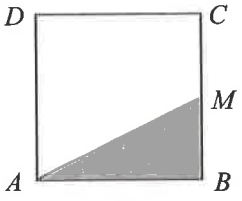
(5p) **2.** În figura alăturată sunt marcate cinci puncte pe conturul unui raportor. În aceste condiţii, diferenţa dintre măsurile unghiurilor $\sphericalangle COE$ şi $\sphericalangle BOD$ este:

a) 10°; **b)** 20°;
c) 40°; **d)** 170°.



(5p) **3.** În figura alăturată, punctul M este mijlocul laturii BC a pătratului $ABCD$. Aria triunghiului ABM este 13 cm^2. Aria pătratului $ABCD$ este:

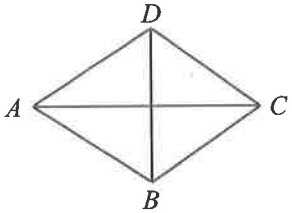
a) 26 cm^2; **b)** 39 cm^2;
c) 52 cm^2; **d)** 65 cm^2.



(5p) **4.** În figura alăturată, $ABCD$ este un romb cu $AB = BD$. Sinusul unghiului $\sphericalangle A$ este:

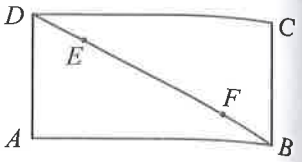
a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **b)** $\frac{3}{5}$;

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **d)** $\frac{1}{2}$.



(5p) **5.** Fie $ABCD$ un dreptunghi, având $AB = 40$ cm și $BC = 30$ cm, ca în figura alăturată. Dacă punctele E și F sunt proiecțiile ortogonale ale punctelor A, respectiv C pe diagonala BD, atunci lungimea segmentului EF este:

a) 25 cm; **b)** 20 cm;
c) 16 cm; **d)** 14 cm.



(5p) **6.** O bilă sferică are raza de 6 cm și cântărește 4320g. Se topește bila și, folosind tot materialul obținut, se fabrică bile mai mici, având raza de 1 cm. Masa unei bile mici este:

a) 120g; **b)** 720g; **c)** 144g; **d)** 20g.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Un teren agricol a fost recoltat în trei zile: 25% în prima zi, $\frac{7}{15}$ din rest în a doua zi și ultimele 20 ha în cea de-a treia zi:

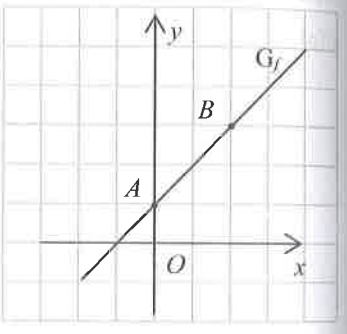
(2p) **a)** Arată că, în cea de-a treia zi, s-a recoltat de pe 40% din suprafața terenului.

(3p) **b)** Determină suprafața întregului teren agricol.

2. Se consideră expresia $E(x) = \frac{2x+1}{x-1} : \left(1 - \frac{3x^2}{1-x^2}\right)$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

(2p) **a)** Arată că $E(x) = \frac{x+1}{2x-1}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

(3p) **b)** Rezolvă ecuația $E(x) = 2$.



3. Punctele $A(0, 1)$ și $B(2, 3)$ se află pe graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$.

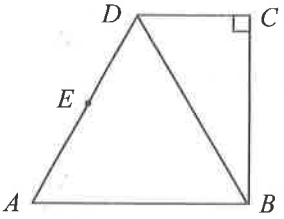
(2p) **a)** Află coordonatele mijlocului segmentului AB.

(3p) **b)** Arată că $a = b = 1$.

4. În figura alăturată, triunghiul ABD este echilateral, iar triunghiul BCD este dreptunghic, cu ipotenuza $BD = 10$ cm. Punctul E este mijlocul segmentului AD, iar dreptele AB și CD sunt paralele.

(2p) **a)** Demonstrează că triunghiurile ABE și DBC sunt congruente.

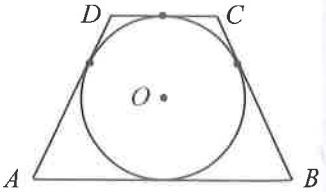
(3p) **b)** Determină măsura unghiului format de dreptele BD și CE.



5. În figura alăturată, laturile trapezului isoscel $ABCD$ sunt tangente cercului de centru O. Bazele trapezului au lungimile $AB = 10$ cm și $CD = 4$ cm.

(2p) **a)** Arată că lungimea laturii BC este 7 cm.

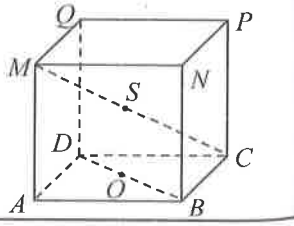
(3p) **b)** Află lungimea razei cercului.



6. Cubul $ABCDMNPQ$ din figura alăturată are muchia $AB = 4$ cm. Punctele O și S sunt mijloacele diagonalelor BD, respectiv CM.

(2p) **a)** Arată că măsura unghiului format de planele (MSB) și (ABC) este 45°.

(3p) **b)** Demonstrează că dreapta SO este perpendiculară pe planul (ABC).



✦ TESTUL 62 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $\left(1-\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{27}{4}$ este:

a) 4,5; **b)** 0,75; **c)** 1,5; **d)** 1.

(5p) **2.** În diagrama alăturată sunt prezentate opțiunile celor 30 de elevi ai clasei a VIII-a D, cu privire la alegerea șefului clasei. Numărul voturilor obținute de Ioana a fost:

a) 10; **b)** 11;
c) 12; **d)** 13.

(5p) **3.** Se aruncă un zar. Probabilitatea ca numărul punctelor care apar pe fața de sus a zarului să fie un divizor al lui 10 este:

a) $\frac{1}{3}$; **b)** $\frac{1}{2}$; **c)** $\frac{2}{3}$; **d)** $\frac{1}{6}$.

(5p) **4.** Cel mai mare număr natural $\overline{ab}$ pentru care $\frac{a+3b}{5a-b}=\frac{5}{9}$ este:

a) 510; **b)** 48; **c)** 84; **d)** 96.

(5p) **5.** Cel mai mare număr întreg care este mai mic decât $-4\sqrt{3}$ este:

a) –7; **b)** –6; **c)** –5; **d)** 6.

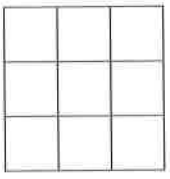
(5p) **6.** Roxana afirmă că jumătatea numărului 2^{10} este 2^5. Afirmația Roxanei este:

a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

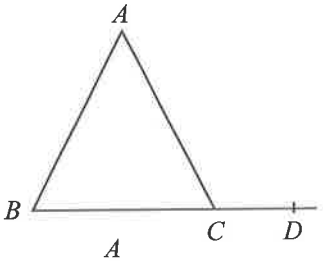
(5p) **1.** Împărțind fiecare latură a pătratului din figura alăturată în 3 părți egale, obținem o împărțire a interiorului pătratului în 9 pătrate mai mici. Dacă am împărți fiecare latură a pătratului inițial în 5 părți egale, numărul pătrățelelor care s-ar obține ar fi:

a) 10; **b)** 15;
c) 25; **d)** 125.



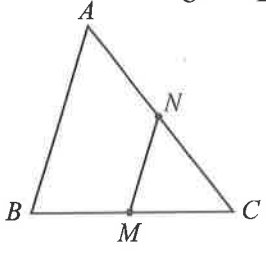
(5p) **2.** Triunghiul ABC din figura alăturată este echilateral, iar punctele B, C și D sunt coliniare. Măsura unghiului ACD este:

a) 60°; **b)** 120°;
c) 90°; **d)** 135°.

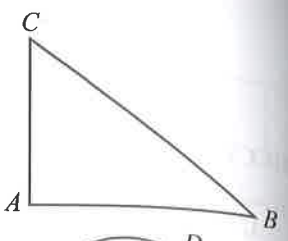


(5p) **3.** În figura alăturată, MN este o linie mijlocie a triunghiului ABC. Raportul dintre aria patrulaterului $ABMN$ și aria triunghiului CMN este:

a) 4; **b)** $\frac{3}{4}$;
c) 3; **d)** 2.

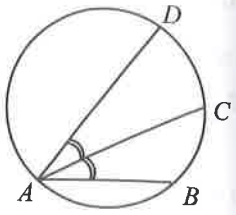


(5p) **4.** Triunghiul ABC din figura alăturată are $\measuredangle A = 90°$, $BC = 15$ cm și $\sin(\measuredangle C) = \frac{4}{5}$. Perimetrul triunghiului este:



a) 36 cm; **b)** 30 cm;
c) 48 cm; **d)** 52 cm.

(5p) **5.** În figura alăturată, AC este bisectoarea unghiului $\measuredangle BAD$, iar măsura arcului mic $\overset{\frown}{BD}$ este 100°. Unghiul $\measuredangle BAC$ are măsura de:



a) 50°; **b)** 25°;
c) 75°; **d)** 12°30′.

(5p) **6.** Pentru a vopsi toate fețele unui tetraedru regulat cu muchia de 6 cm avem nevoie de 72 g vopsea. Cantitatea de vopsea necesară pentru a acoperi toate fețele unui tetraedru regulat cu muchia de 1 cm este:
a) 12 g; **b)** 6 g; **c)** 2 g; **d)** 1 g.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Denisa are cu 27 de ani mai puțin decât mama ei, care are cu un an mai puțin decât tatăl fetei. Denisa este de cinci ori mai tânără decât tatăl său.

(2p) **a)** Cu câți ani este mai tânără Denisa decât tatăl ei?

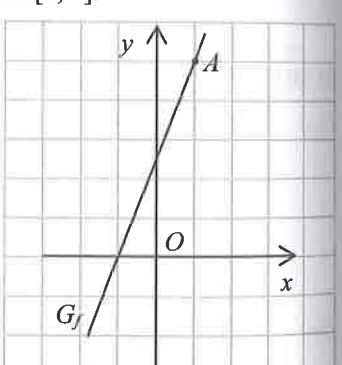
(3p) **b)** Determină vârsta fetei.

2. Se dă expresia $E(x) = \left(\frac{3}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{4}{x^2-1}\right) : \frac{x-2}{x^2-2x+1}$ unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$.

(2p) **a)** Arată că $E(x) = \frac{x-1}{x+1}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$.

(3p) **b)** Determină numerele naturale n, pentru care $E(n)$ este un număr din intervalul $[0, 1]$.

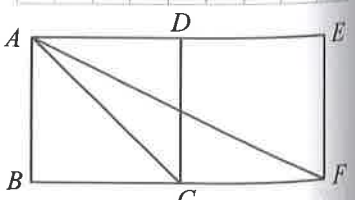
3. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 2$, unde $a \in \mathbb{R}$, al cărei grafic într-un reper cartezian xOy este reprezentat în figura alăturată. Punctul $A(1, 5)$ aparține graficului funcției.



(2p) **a)** Arată că $a = 3$.

(3p) **b)** Determină punctul B, situat pe graficul funcției, care are coordonate egale.

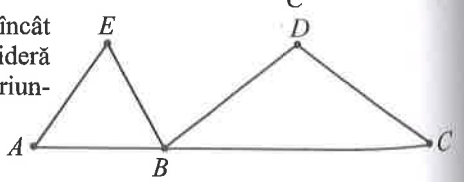
4. În figura alăturată sunt reprezentate două pătrate, $ABCD$ și $CDEF$, având laturile de 10 cm.



(2p) **a)** Demonstrează că distanța de la punctul C la dreapta AF este $2\sqrt{5}$ cm.

(3p) **b)** Calculează sinusul unghiului FAC.

5. În figura alăturată, A, B și C sunt trei puncte coliniare, astfel încât $BC = 3AB = 18$ cm. De aceeași parte a dreptei AC se consideră punctele D și E, astfel încât triunghiul EAB este echilateral, iar triunghiul BCD este isoscel cu $\measuredangle BDC = 120°$.



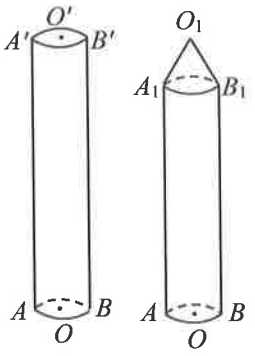
(2p) **a)** Arată că dreptele BD și BE sunt perpendiculare.

(3p) **b)** Demonstrează că dreptele DE și AC sunt paralele.

6. Un creion neascuțit are forma unui cilindru circular drept cu raza de 5 mm și generatoarea de 20 cm. Se ascute creionul, vârful ascuțit având forma unui con circular drept cu generatoarea de 13 mm, ca în figura alăturată.

(2p) **a)** Află volumul creionului neascuțit.

(3p) **b)** Ce procent din volumul creionului s-a îndepărtat prin ascuțire?

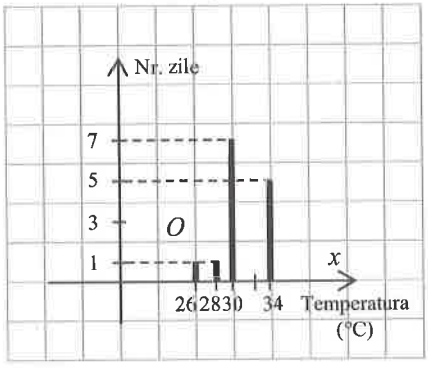


✦ TESTUL 63 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Numărul care este cu 7 mai mare ca –11 este:
a) –18; **b)** –4; **c)** 4; **d)** 18.

(5p) **2.** În luna iunie, timp de două săptămâni, se înregistrează temperatura la amiază, în fiecare zi, obținând rezultatele din tabelul alăturat. Temperatura medie în respectiva perioadă este:
a) 29,5 °C; **b)** 30°C;
c) 31°C; **d)** 31,5°C.



(5p) **3.** Alegem, la întâmplare, un număr din mulțimea $A = \{0, 1, 2, ..., 19\}$. Probabilitatea ca numărul ales să fie prim este:
a) 0,35; **b)** 0,4; **c)** 0,45; **d)** 0,5.

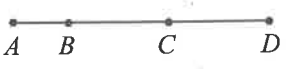
(5p) **4.** Numerele a și b sunt direct proporționale cu 2 și 3, iar suma lor este 12,5. Numărul mai mare este egal cu:
a) 5; **b)** 6,5; **c)** 7; **d)** 7,5.

(5p) **5.** Rezultatul calculului $\left(\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{32}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right):\frac{\sqrt{2}}{2}$ este:
a) $-\frac{1}{4}$; **b)** 0; **c)** –1; **d)** 1.

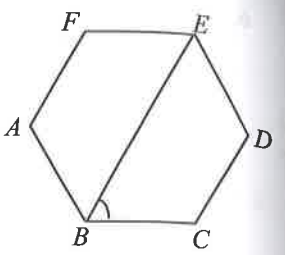
(5p) **6.** Alice afirmă că suma cifrelor numărului $A = 5 \cdot 10^{100} + 22$ este 9. Afirmația fetei este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Numărul de segmente ce pot fi identificate în figura alăturată sunt:
a) 3; **b)** 4;
c) 5; **d)** 6.

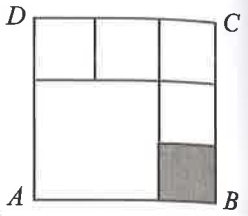


(5p) **2.** În figura alăturată este reprezentat un hexagon regulat $ABCDEF$. Măsura unghiului $\measuredangle CBE$ este:



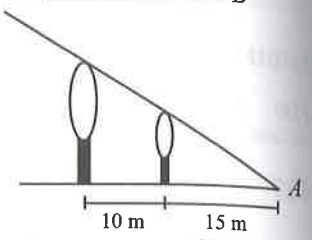
a) 30°; **b)** 45°;
c) 60°; **d)** 90°.

(5p) **3.** Pătratul $ABCD$ din figura alăturată este împărțit în 6 pătrate mai mici. Aria pătrățelului haşurat este 7 cm^2. Aria pătratului $ABCD$ este:



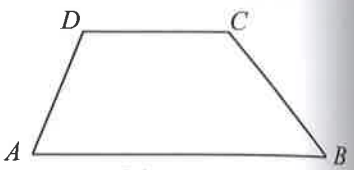
a) 42 cm^2; **b)** 49 cm^2;
c) 63 cm^2; **d)** 81 cm^2.

(5p) **4.** Umbrele ambilor copaci din figura alăturată se întind exact până în punctul A. Înălțimea copacului mic este 2,4 m. Înălțimea copacului mare este:



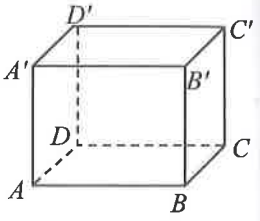
a) 4,8 m; **b)** 5,6 m;
c) 4 m; **d)** 3,6 m.

(5p) **5.** În figura alăturată este reprezentat un trapez cu baza mare $AB = 8$ cm şi $\measuredangle B = 45°$. Lungimea celui mai scurt segment care uneşte punctul A cu un punct al dreptei BC este:



a) 4 cm; **b)** $4\sqrt{2}$ cm;
c) 6 cm; **d)** $8\sqrt{2}$ cm.

(5p) **6.** În figura alăturată este desenat un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Măsura unghiului format de dreptele CC' şi BD este:



a) 60°; **b)** 45°;
c) 90°; **d)** 0°.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Avem 240 de smochine, 192 de portocale şi 216 mere.

(2p) **a)** Grupăm toate fructele în 8 pachete identice (acelaşi număr de smochine în fiecare, acelaşi număr de portocale şi acelaşi număr de mere). Câte smochine conține un pachet? Dar portocale? Dar mere?

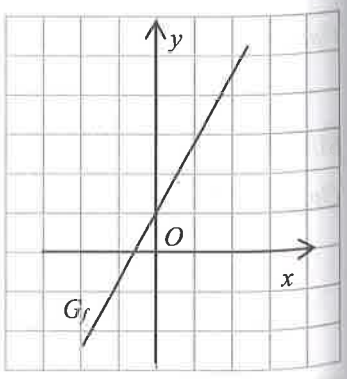
(3p) **b)** Care este cel mai mare număr de pachete identice care se poate obține?

2. Se consideră $E(x) = \left(\frac{2x}{3} - \frac{6}{x}\right) : \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 3\}$.

(2p) **a)** Arată că $E(x) = \frac{2x+6}{3}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 3\}$.

(3p) **b)** Pentru câte numere naturale n, unde $n \leq 100$, numărul $E(n)$ este întreg?

3. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$, al cărei grafic într-un reper cartezian xOy este reprezentat în figura alăturată.



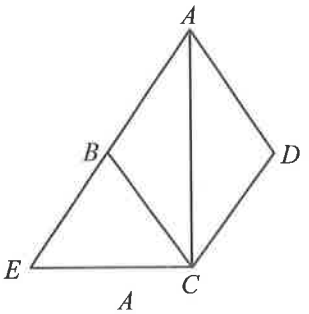
(2p) **a)** Stabilește care dintre punctele $A(1, 4)$ şi $B(-1, -1)$ aparține graficului funcției.

(3p) **b)** Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuația $2 - f(x + 1) = 3f(x)$.

4. În figura alăturată este reprezentată o rețea de drumuri județene. Se știe că $AB = BC = CD = DA = 6$ km, B este mijlocul lui AE, iar $\measuredangle ABC = 2 \cdot \measuredangle BAD$.

(2p) **a)** Arată că unghiul $\measuredangle BAD$ are măsura 60°.

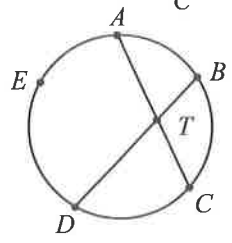
(3p) **b)** Un automobil parcurge traseul $A–C–E–A$ cu viteza de 60 km/h. Demonstrează că timpul necesar parcurgerii acestei distanțe este mai mic de jumătate de oră.



5. În figura alăturată, punctele A, B, C, D și E împart cercul în cinci arce de măsuri egale, iar $\{T\} = AC \cap BD$.

(2p) **a)** Află măsura unghiului $\measuredangle AED$.

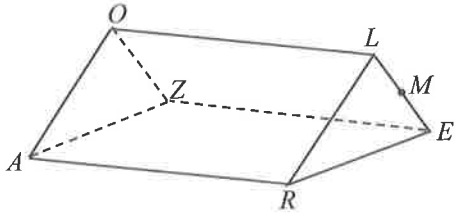
(3p) **b)** Demonstrează că punctele E și T sunt simetrice față de dreapta AD.



6. În figura alăturată, este reprezentată cușca unui câine, având forma prismei triunghiulare regulate $AZOREL$, cu $AR = 12$ dm și $AZ = 8$ dm.

(2p) **a)** Află câți metri cubi de aer se află în cușcă, aproximând rezultatul cu două zecimale exacte.

(3p) **b)** O furnică se deplasează, în linie dreaptă, pe traseul $O–M–R–O$, unde M este mijlocul muchiei EL. Arată că dreapta AE este paralelă cu planul în care se deplasează furnica.



✦ TESTUL 64 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Mulțimea divizorilor întregi ai numărului 6 are cardinalul:
a) 6; **b)** 4; **c)** 10; **d)** 8.

(5p) **2.** În tabelul următor este reprezentată distribuția elevilor clasei a VIII-a C, în funcție durata deplasării de acasă până la școală. Numărul de elevi din clasa a VIII-a C este:

Durata deplasării (minute)	[1, 5]	(5, 15]	(15, 30]	(30, 60]
Numărul de elevi	10	9	7	4

a) 28; **b)** 29;
c) 30; **d)** 31.

(5p) **3.** Un aliaj de aur și cupru are titlul 0,900 și masa de 200g. Cantitatea de aur aflată în aliaj este:
a) 180 g; **b)** 20 g; **c)** 90 g; **d)** 900 g.

(5p) **4.** Un număr irațional care aparține intervalului $(-2, -1)$ este:
a) $-\frac{7}{5}$; **b)** $1-\sqrt{5}$; **c)** $-\sqrt{5}$; **d)** $\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

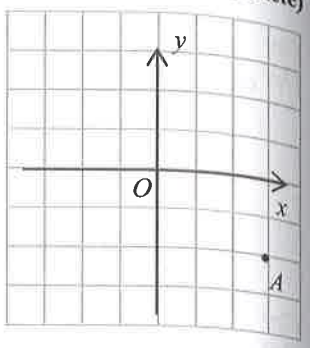
(5p) **5.** Rezultatul calculului $\left(\sqrt{\frac{9}{7}}-\sqrt{7}-\frac{2}{\sqrt{7}}\right):\sqrt{\frac{1}{7}}$ este:
a) 6; **b)** $2\sqrt{7}$; **c)** $2-\sqrt{7}$; **d)** -6.

(5p) **6.** Mașina tatei merge cu viteza constantă de 75 km/h. Până în orașul bunicii, sunt de parcurs 175 km. Paula îi spune tatei că drumul de acasă până la bunica va dura 2 ore și 20 minute. Afirmația Paulei este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

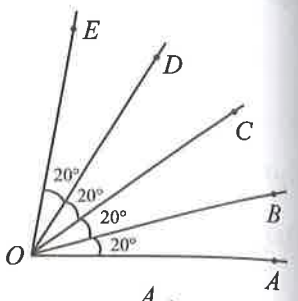
(5p) **1.** În raport cu reperul cartezian xOy din figura alăturată se consideră punctul $A(3, -2)$. Simetricul punctul A față de originea O a sistemului de axe este punctul:

a) $A_1(-3, -2)$; **b)** $A_2(3, 2)$;
c) $A_3(-3, 2)$; **d)** $A_4(3, 0)$.



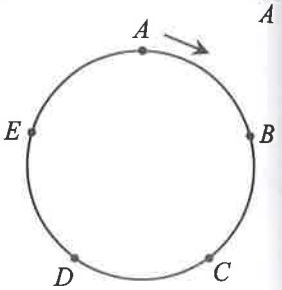
(5p) **2.** Numărul unghiurilor cu măsura de 40°, care pot fi identificate în figura alăturată, este:

a) 0; **b)** 1;
c) 2; **d)** 3.



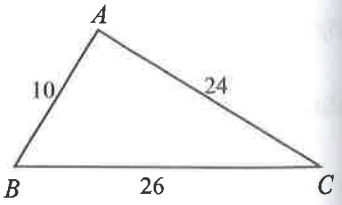
(5p) **3.** Alexandra se află în punctul A al pistei circulare din figura alăturată și dorește să parcurgă un tur complet. Punctele A, B, C, D, E împart cercul în cinci arce egale. După ce parcurge 60% din tur, Alexandra se află în punctul:

a) E; **b)** D;
c) C; **d)** B.



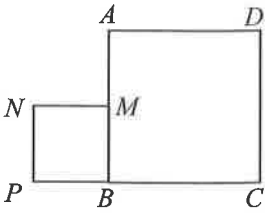
(5p) **4.** În figura alăturată sunt date lungimile laturilor triunghiului ABC, în centimetri. Aria triunghiului este:

a) 120 cm^2; **b)** 34 cm^2;
c) 240 cm^2; **d)** 260 cm^2.



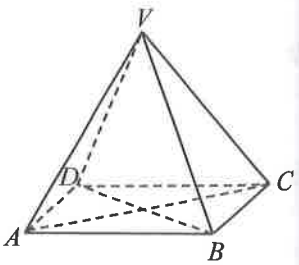
(5p) **5.** În figura alăturată, $ABCD$ și $BMNP$ sunt pătrate cu interioarele disjuncte, iar punctul M este mijlocul laturii AB. Lungimea segmentului ND este egală cu $2\sqrt{10}$ cm. Perimetrul pătratului $ABCD$ este egal cu:

a) 16 cm; **b)** 8 cm;
c) 20 cm; **d)** 12 cm.



(5p) **6.** În figura alăturată este reprezentată piramida patrulateră regulată $VABCD$, având vârful V, în care triunghiul VAC este dreptunghic cu aria egală cu 72 cm^2. Volumul piramidei este:

a) $288\sqrt{3}$ cm^3; **b)** $144\sqrt{3}$ cm^3;
c) $288\sqrt{2}$ cm^3; **d)** 144 cm^3.



SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Într-un bloc de locuințe sunt 19 apartamente cu două și trei camere, care au, în total, 46 camere.

(2p) **a)** Numărul apartamentelor cu trei camere ar putea fi 15? Justifică răspunsul.

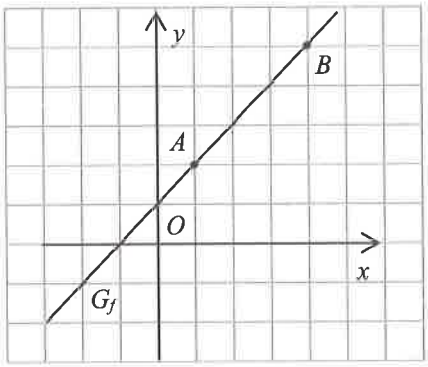
(3p) **b)** Află care este numărul apartamentelor cu două camere.

2. Se consideră expresia $E(x) = x^2 + 2x - 24$, unde x este un număr real.

(2p) **a)** Arată că $E(x) = (x + 6)(x - 4)$, oricare ar fi numărul real x.

(3p) **b)** Determină valorile întregi ale n, pentru care $E(n)$ este număr natural prim.

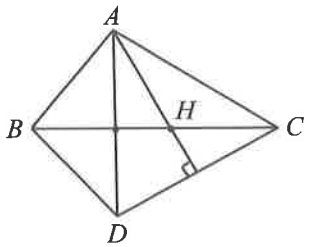
3. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$; graficul său într-un reper cartezian xOy este reprezentat în figura alăturată. Punctele A și B au abscisele 1, respectiv 4 și sunt situate pe graficul funcției f.



(2p) **a)** Determină coordonatele punctelor A și B.

(3p) **b)** Notăm cu M și N proiecțiile pe axa Ox ale punctelor A, respectiv B. Calculează aria patrulaterului $ABNM$.

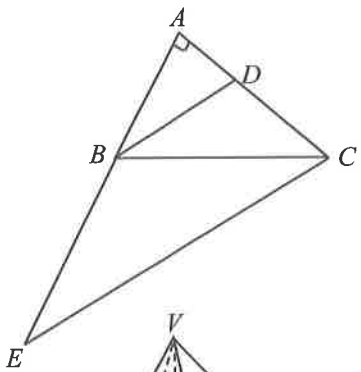
4. Fie ABC un triunghi. În figura alăturată, D este simetricul punctului A față de dreapta BC.



(2p) **a)** Arată că $AB = BD$.

(3p) **b)** Pe dreapta BC se consideră punctul H, astfel încât $AH \perp CD$. Demonstrează că dreptele DH și AC sunt perpendiculare.

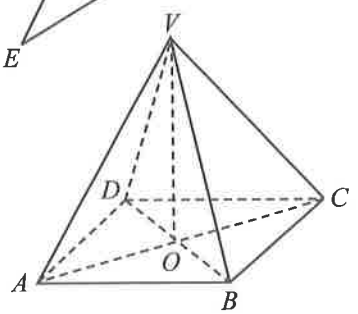
5. În figura alăturată, ABC este un triunghi dreptunghic cu $AB = 6$ cm și $BC = 10$ cm. Fie BD bisectoarea unghiului ABC, unde $D \in AC$, iar dreapta CE este paralelă cu BD, cu $E \in AB$.



(2p) **a)** Arată că $\sphericalangle BEC \equiv \sphericalangle BCE$.

(3p) **b)** Determină perimetrul triunghiului ABD.

6. În figura alăturată, $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată cu muchia bazei $AB = 2$ cm și înălțimea $VO = \sqrt{6}$ cm.



(2p) **a)** Demonstrează că triunghiul VAC este echilateral.

(3p) **b)** Arată că unghiul format de planele (VAC) și (VBC) are cosinusul egal cu $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

✦ TESTUL 65 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Cel mai mare divizor prim al numărului 18 este:
a) 2; **b)** 3; **c)** 9; **d)** 18.

(5p) **2.** Notele pe care le are Sebastian la limba engleză sunt cele din tabelul alăturat. Media care i se încheie lui Sebastian este:

Nota	5	7	8
Nr. note	1	3	2

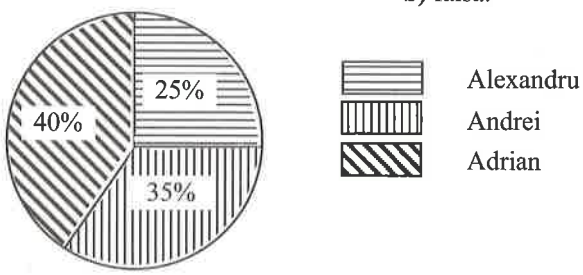
a) 5; **b)** 6;
c) 7; **d)** 8.

(5p) **3.** Numărul perechilor (a, b) de numere întregi, cu proprietatea că $a \cdot b = 4$, este:
a) 2; **b)** 3; **c)** 4; **d)** 6.

(5p) **4.** Dacă numerele reale nenule a și b au proprietatea că $\frac{a}{3} = \frac{2}{b}$, atunci numărul $2ab - 7$ este egal cu:
a) 1; **b)** 6; **c)** -1; **d)** 5.

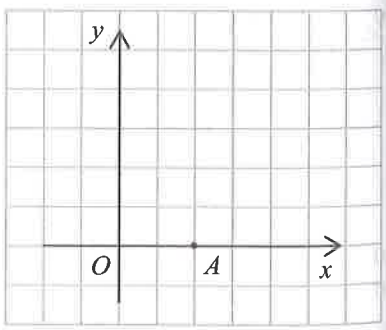
(5p) **5.** Rezultatul calculului $(2+\sqrt{3})^2 + |4\sqrt{3} - 7|$ este:
a) $8\sqrt{3}$; **b)** 14; **c)** 0; **d)** 12.

(5p) **6.** La alegerea șefului clasei a VIII-a E s-au înregistrat rezultatele din diagrama de mai jos. Miruna spune că Andrei a câștigat aceste alegeri. Afirmația Mirunei este:
a) adevărată; **b)** falsă.

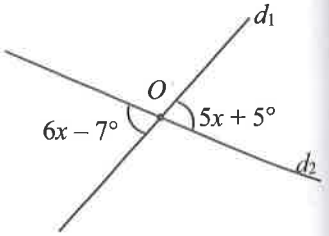


SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

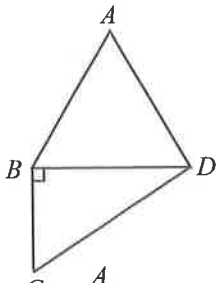
(5p) **1.** În reperul cartezian xOy din figura alăturată se consideră punctele $A(2, 0)$ și $B(a, 3)$, astfel încât dreapta AB este paralelă cu axa Oy. Valoarea numărului real a este:
a) 0; **b)** 1;
c) 2; **d)** 3.



(5p) **2.** În figura alăturată sunt date două dintre măsurile unghiurilor care se formează în jurul punctului O de intersecție a dreptelor d_1 și d_2. Valoarea lui x este:
a) 12°; **b)** 10°;
c) 20°; **d)** 15°.

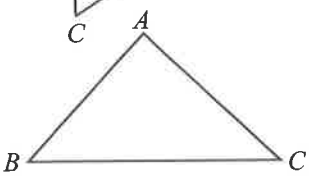


(5p) **3.** În figura alăturată, ABD este un triunghi echilateral cu latura de 10 cm, iar BCD este un triunghi dreptunghic, $\measuredangle B = 90°$, având același perimetru cu triunghiul ABD. Perimetrul patrulaterului $ABCD$ este:



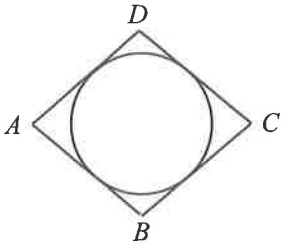
a) 40 cm; **b)** $5(5+\sqrt{3})$ cm;
c) 50 cm; **d)** 60 cm.

(5p) **4.** Triunghiul isoscel ABC, din figura alăturată, are $AB = AC = 6$ cm și aria egală cu 18 cm^2. Măsura unghiului ACB este:



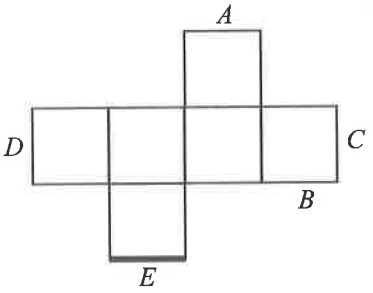
a) 30°; **b)** 45°;
c) 75°; **d)** 60°.

(5p) **5.** În figura alăturată, laturile rombului $ABCD$ sunt tangente unui cerc cu raza 2,5 cm. Distanța dintre dreptele AB și CD este:



a) 2,5 cm; **b)** 3,75 cm;
c) 4,8 cm; **d)** 5 cm.

(5p) **6.** În figura alăturată este desenată o desfășurare a unui cub. Atunci când refacem cubul, segmentul îngroșat (marcat E) se va lipi peste segmentul marcat:



a) A; **b)** B;
c) C; **d)** D.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Într-o cutie sunt 30 de bile albe, roșii și galbene. 19 bile nu sunt galbene, iar numărul bilelor roșii este cu 1 mai mic decât numărul bilelor albe.

(2p) **a)** Află numărul bilelor galbene.

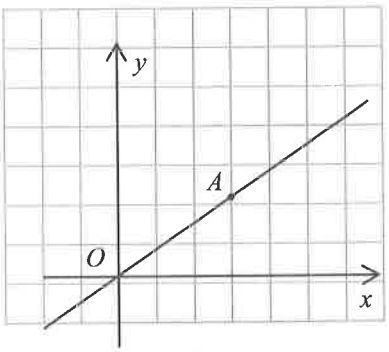
(3p) **b)** Găsește numărul bilelor roșii.

2. Se consideră expresia $E(x) = (x^2 + 2x + 3)^2 - (x^2 - 2x + 5)^2$, unde x este un număr real.

(2p) **a)** Arată că $E(x) = 4(2x - 1)(x^2 + 4)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

(3p) **b)** Determină $a \in \mathbb{R}$ pentru care $E(a) = 0$.

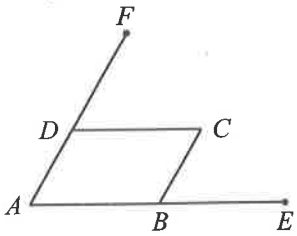
3. În figura alăturată, dreapta OA, unde $A(3, 2)$, este graficul unei funcții $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, într-un sistem de axe de coordonate xOy.



(2p) **a)** Arată că lungimea segmentului OA este $\sqrt{13}$.

(3p) **b)** Determină legea de corespondență a funcției f.

4. În figura alăturată, $ABCD$ este paralelogram. Punctele E și F sunt simetricele punctului A față de B, respectiv D.



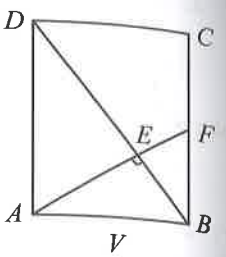
(2p) **a)** Arată că patrulaterul $BCFD$ este un paralelogram.

(3p) **b)** Demonstrează că punctele C, E și F sunt coliniare.

5. Într-un parc având forma dreptunghiului $ABCD$ există două alei, BD și AF, care se întâlnesc în punctul E, ca în figura alăturată. Știm că $BD \perp AF$, $BE = 90$ m și $DE = 160$ m.

(2p) **a)** Arată că lungimea gardului care împrejmuiește parcul este 700 m.

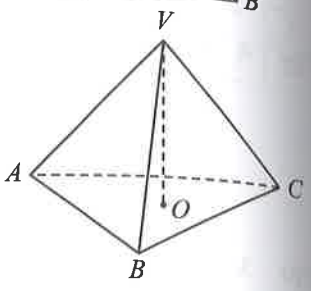
(3p) **b)** Calculează distanța dintre punctele C și F.



6. În figura alăturată este reprezentată piramida triunghiulară $VABC$ cu latura bazei $AB = 12$ cm și înălțimea $VO = 12$ cm.

(2p) **a)** Calculează volumul piramidei.

(3p) **b)** Arată că sinusul unghiului format de dreapta AB cu planul (VBC) este egal cu $\frac{3}{\sqrt{13}}$.



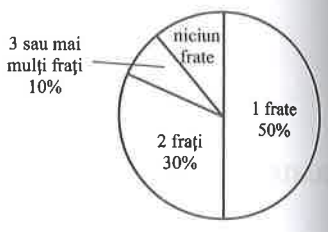
✦ TESTUL 66 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Cel mai mare divizor propriu al numărului 18 este:

a) 2; **b)** 3; **c)** 9; **d)** 18.

(5p) **2.** În diagrama alăturată sunt prezentate datele obținute de către diriginte în urma chestionării celor 30 de elevi ai clasei a V-a A, cu privire la numărul fraților.



Numărul elevilor care sunt singuri la părinți este:

a) 3; **b)** 6; **c)** 15; **d)** 9.

(5p) **3.** Numărul numerelor întregi din intervalul $[-3, 3]$ este:

a) 3; **b)** 4; **c)** 6; **d)** 7.

(5p) **4.** Se consideră mulțimea $A = \{15; 6\sqrt{6}; 10\sqrt{2}; 4\sqrt{13}; \sqrt{242}\}$. Suma dintre cel mai mic și cel mai mare dintre elementele mulțimii este:

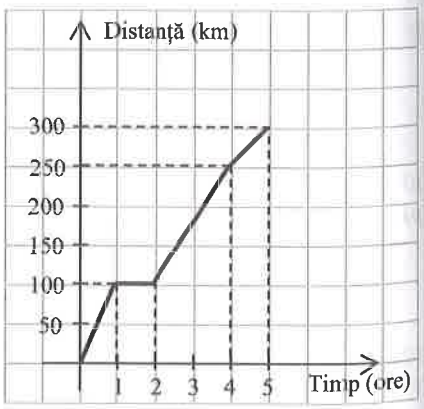
a) $5(3+2\sqrt{2})$; **b)** $21\sqrt{2}$; **c)** $15+4\sqrt{13}$; **d)** $2(3\sqrt{6}+2\sqrt{13})$.

(5p) **5.** Fie x_1 și x_2 soluțiile reale ale ecuației $x^2 + 2x - 1 = 0$. Valoarea numărului $|x_1 - x_2|$ este:

a) $2\sqrt{2}$; **b)** 2; **c)** $2+2\sqrt{2}$; **d)** $2\sqrt{2}-2$

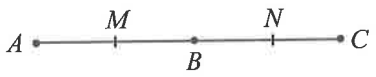
(5p) **6.** În graficul alăturat este reprezentată deplasarea unui automobil care pleacă la ora 0:00 din Bacău și ajunge la ora 5:00 în București. Claudiu spune că automobilul a avut cea mai mare viteză în intervalul dintre orele 2:00 și 4:00. Afirmația lui Claudiu este:

a) adevărată; **b)** falsă.



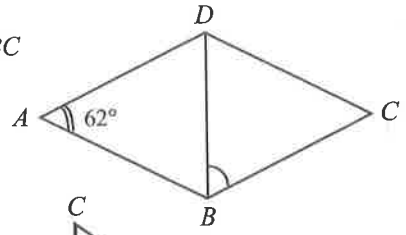
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată, punctul B aparține segmentului AC, iar M și N sunt mijloacele segmentelor AB, respectiv BC. Se știe că $AB = 4$ cm și $NC = 3$ cm. Lungimea segmentului MN este:



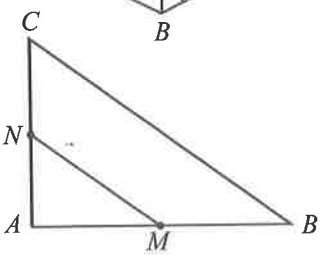
a) 7 cm; **b)** 6 cm;
c) 5 cm; **d)** 4 cm.

(5p) **2.** Rombul $ABCD$ din figura alăturată are $\measuredangle A = 62°$. Măsura unghiului $\measuredangle DBC$ este:



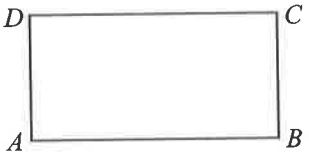
a) 59°; **b)** 61°;
c) 62°; **d)** 118°.

(5p) **3.** Punctele M și N sunt mijloacele catetelor AB și AC ale triunghiului dreptunghic ABC. Se știe că $MN = 5$ cm, iar perimetrul triunghiului AMN este 12 cm. Perimetrul patrulaterului $BCNM$ este:



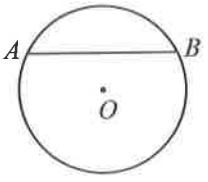
a) 17 cm; **b)** 22 cm;
c) 27 cm; **d)** 30 cm.

(5p) **4.** Un teren agricol are forma dreptunghiului $ABCD$, cu $AB = 200$ m, $AD = 80$ m și este cultivat cu legume. Într-un an, cheltuielile cu irigarea unui hectar de culturi se ridică la 50000 de lei. Costurile irigării acestui teren într-un an sunt:



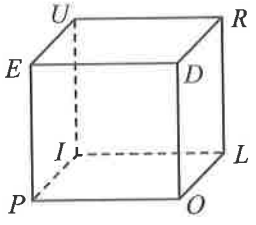
a) 800 de lei; **b)** 8000 de lei;
c) 80000 de lei; **d)** 20000 de lei.

(5p) **5.** În figura alăturată este reprezentat un cerc de centru O în care o coardă AB, având lungimea de 24 cm, este situată la 5 cm de centrul cercului. Aria cercului este:



a) 144π cm^2; **b)** 169π cm^2;
c) 12π cm^2; **d)** 25π cm^2.

(5p) **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul $POLIEDRU$. Măsura unghiului dintre dreptele ER și DL este:



a) 30°; **b)** 45°;
c) 90°; **d)** 60°.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Trei copii se joacă în parc. Media vârstelor celor trei este 12 ani. La un moment dat, vine și frățiorul unuia dintre ei și, acum, media vârstelor celor patru este 10 ani.

(2p) **a)** Calculează suma vârstelor primilor trei copii.

(3p) **b)** Arată că vârsta frățiorului venit este 4 ani.

2. Se consideră expresia $E(x) = x^2 + 2x + 3$, unde x este un număr real.

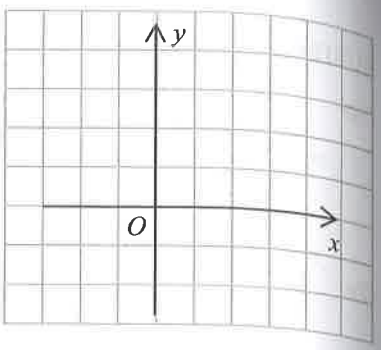
(2p) **a)** Arată că $E(x) = (x + 1)^2 + 2$, oricare ar fi numărul real x.

(3p) **b)** Determină numerele reale a și b, pentru care $E(a) + E(b) = 4$.

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$.

(2p) **a)** Reprezintă grafic funcția în sistemul de axe ortogonale xOy alăturat.

(3p) **b)** Determină numărul real a, știind că punctul $A(a - 1, a + 1)$ este situat pe graficul funcției.



4. Dintr-un disc de carton cu diametrul de 12 cm se decupează un hexagon regulat, cu pierdere minimă de material, ca în figura alăturată (prin urmare, vârfurile hexagonului se vor afla pe frontiera discului).

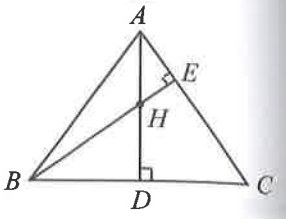
(2p) **a)** Arată că latura hexagonului are lungimea de 6 cm.

(3p) **b)** Află aria suprafeței de carton care se elimină în urma decupării.

5. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC = 10$ cm și $BC = 12$ cm, în care construim înălțimile AD și BE, ca în figura alăturată. Notăm $\{H\} = AD \cap BE$.

(2p) **a)** Demonstrează că unghiurile $\sphericalangle DAC$ și $\sphericalangle EBC$ sunt congruente.

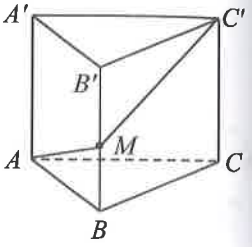
(3p) **b)** Arată că segmentul HE are lungimea 2,1 cm.



6. Un vas are formă de prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, cu latura bazei $AB = 24$ cm și muchia laterală $AA' = 63$ cm, ca în figura alăturată.

(2p) **a)** Stabilește dacă în vas încap 20 ℓ de apă.

(3p) **b)** O furnică merge pe suprafața laterală a vasului, pe traseul A–M–C', unde M este punct al muchiei BB', astfel încât $BM = 18$ cm. Determină lungimea drumului parcurs de furnică.

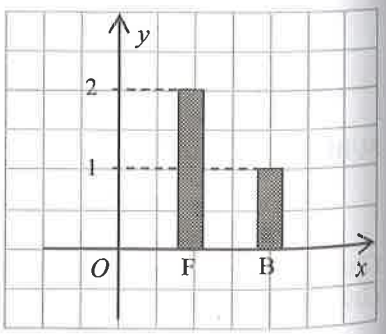


✦ TESTUL 67 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Câtul împărțirii numărului 1234 la 5 este:
a) 24; **b)** 244;
c) 246; **d)** 248.

(5p) **2.** În figura alăturată este reprezentată proporția femei/bărbați dintr-un sat cu 480 locuitori. Numărul bărbaților din sat este:
a) 160; **b)** 240;
c) 144; **d)** 200.



(5p) **3.** Se dau mulțimile $A = \{-2, 0, 1, 3\}$ și $B = \{-1, 0, 2, 3\}$. Cardinalul mulțimii $A \cup B$ este:
a) 5; **b)** 6;
c) 7; **d)** 8.

(5p) **4.** Numerele reale x și y sunt invers proporționale cu numerele 2 și 3, iar produsul lor este 24. Suma $x + y$ este:
a) 16; **b)** 10; **c)** 8; **d)** 4.

(5p) **5.** Rezultatul calculului $|5-\sqrt{5}|+|2-\sqrt{5}|-2$ este:

a) $4-2\sqrt{5}$; **b)** $5-2\sqrt{5}$; **c)** 5; **d)** 1.

(5p) **6.** În tabelul alăturat sunt date temperaturile maxime înregistrate de-a lungul unei săptămâni. Adelina studiază tabelul și spune că respectiva săptămână a fost în luna august. Afirmația Adelinei este:

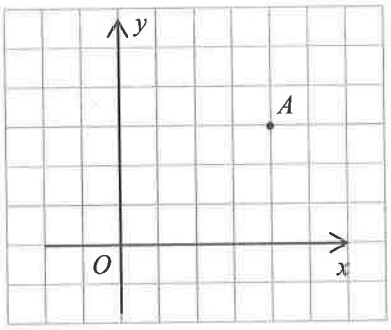
a) adevărată; **b)** falsă.

Ziua	L	M	M	J	V	S	D
Temperatura (°C)	5	2	2	0	–1	–3	0

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

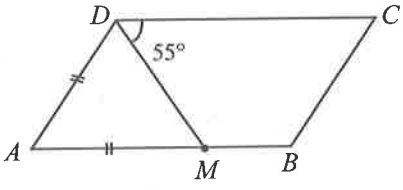
(5p) **1.** În reperul cartezian xOy din figura alăturată se consideră punctul $A(4, 3)$. Punctul B este proiecția pe axa Oy a punctului A. Coordonatele punctului B sunt:

a) (3, 4); **b)** (–4, 3);
c) (4, 0); **d)** (0, 3).



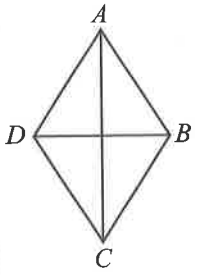
(5p) **2.** În figura alăturată, M este punct pe latura AB a paralelogramului $ABCD$, astfel încât $AM = AD$. Măsura unghiului CDM este 55°. Unghiul BAD are măsura:

a) 55°; **b)** 70°;
c) 65°; **d)** 75°.



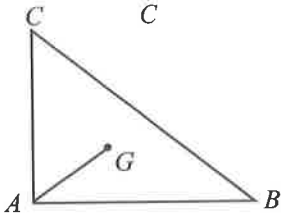
(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat rombul $ABCD$, având $AC = 8\sqrt{3}$ cm și măsura unghiului ABC egală cu 120°. Perimetrul triunghiului ADB este egal cu:

a) 24 cm; **b)** 16 cm;
c) $\left(16+8\sqrt{3}\right)$ cm; **d)** $\left(4\sqrt{3}+8\right)$ cm.



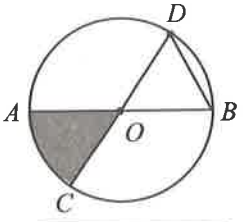
(5p) **4.** În figura alăturată, G este centrul de greutate al triunghiului dreptunghic ABC. Ipotenuza BC a acestuia are lungimea 24 cm. Lungimea segmentului AG este:

a) 8 cm; **b)** 12 cm;
c) 15 cm; **d)** 16 cm.



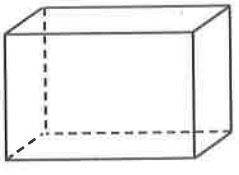
(5p) **5.** În figura alăturată, AB și CD sunt două diametre ale cercului de centru O. Triunghiul OBD este echilateral, cu latura 6 cm. Aria sectorului de disc OAC este:

a) 18π cm^2; **b)** 12π cm^2;
c) 9π cm^2; **d)** 6π cm^2.



(5p) **6.** Folosind cărămizi paralelipipedice cu dimensiunile 25 cm × 12,5 cm × × 6 cm, se construiește zidul paralelipipedic din figura alăturată, având dimensiunile 10 m × 2 m × 6 m. Numărul de cărămizi care intră în componența zidului este:

a) 64; **b)** 640;
c) 6 400; **d)** 64 000.



SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Prețul unui telefon este 2000 de lei. În cadrul unei promoții, prețul se micșorează cu 20%. După un timp, telefonul se ieftinește din nou, tot cu 20%.

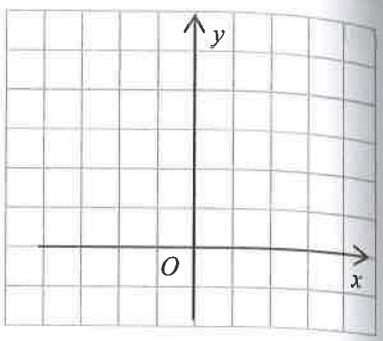
(2p) **a)** Arată că, în urma celor două ieftiniri, telefonul ajunge să coste 1280 de lei.

(3p) **b)** Cu ce procent ar trebui să se ieftinească telefonul, o singură dată, pentru ca prețul său să coboare de la 2000 de lei la 1280 de lei?

2. Se consideră expresia $E(x) = \dfrac{(2x+3)^2-(x+1)^2}{x^2-4} \cdot \dfrac{x^2-x-2}{x+1}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$.

(2p) **a)** Arată că $E(x) = 3x + 4$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$.

(3p) **b)** Calculează produsul $E\left(-\dfrac{10}{9}\right) \cdot E\left(-\dfrac{9}{8}\right) \cdot \ldots \cdot E\left(-\dfrac{3}{2}\right)$.



3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$.

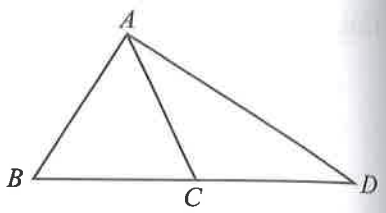
(2p) **a)** Reprezintă grafic funcția în sistemul de axe ortogonale xOy alăturat.

(3p) **b)** Punctele $A(-1, a)$ și $B(b, 5)$ sunt situate pe graficul funcției. Află lungimea segmentului AB.

4. Figura alăturată reprezintă o hartă pe care se văd satele Albeni (A), Bârleana (B), Cocârlați (C) și Dudești (D) ale comunei Dudești, precum și cele cinci drumuri care leagă aceste localități. Pe hartă, drumurile AB, AC, BC și CD au câte 5 cm, iar punctele B, C și D sunt coliniare. Se știe că scara hărții este 1 : 100000.

(2p) **a)** Arată că, în realitate, lungimea drumului AB este 5 km.

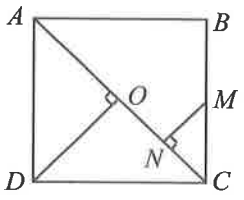
(3p) **b)** Află distanța dintre satele Albeni și Dudești.



5. Pătratul $ABCD$ din figura alăturată are perimetrul 48 cm. Punctul M este mijlocul laturii BC, iar O și N sunt proiecțiile pe diagonala AC ale punctelor D, respectiv M.

(2p) **a)** Arată că patrulaterul $DOMN$ este un trapez.

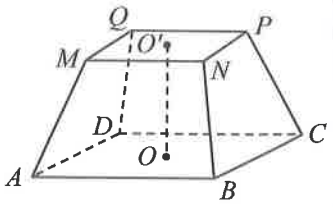
(3p) **b)** Demonstrează că aria trapezului $DOMN$ este 27 cm^2.



6. În figura alăturată este reprezentat un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCDMNPQ$ cu muchia bazei mari $AB = 12$ cm și înălțimea $OO' = 3\sqrt{2}$ cm. Unghiul format de muchia laterală cu planul bazei mari are măsura 45°.

(2p) **a)** Arată că muchia bazei mici are lungimea 6 cm.

(3p) **b)** Demonstrează că unghiul format de dreptele AM și BP are sinusul egal cu $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.



✦ TESTUL 68 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Dublul jumătății numărului $a = 305$ este:
a) 305; **b)** 610; **c)** 152,5; **d)** 1220.

(5p) **2.** Fiecare elev din clasa a VIII-a B participă numai la unul dintre următoarele cercuri: matematică (M), literatură (L), sport (S), istorie (I). Tabelul următor arată numărul participanților la fiecare cerc.

Cercul	M	L	S	I
Numărul de elevi	8	5	8	4

Numărul elevilor care participă la cercul de matematică sau la cel de literatură este:
a) 8; **b)** 5; **c)** 13; **d)** 12.

(5p) **3.** Fracția 2,(7) se poate scrie sub formă de fracție ordinară astfel:
a) $\frac{25}{10}$; **b)** $\frac{25}{9}$; **c)** $\frac{27}{10}$; **d)** 3.

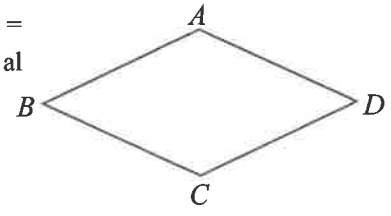
(5p) **4.** Mulțimea soluțiilor inecuației $3 - 2x \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$, este:
a) $(-\infty, -1]$; **b)** $(-\infty, 1]$; **c)** $[-1, \infty)$; **d)** $[1, \infty)$.

(5p) **5.** Numărul $\sqrt{2n}$, unde $n \in \{1, 2, ..., 50\}$, este rațional. Numărul de valori convenabile ale lui n este:
a) 2; **b)** 4; **c)** 5; **d)** 10.

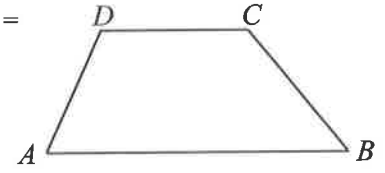
(5p) **6.** Cosette clipește o dată pe secundă. Ea spune că, dacă va sta trează 24 de ore, va clipi de cel puțin 90000 de ori. Afirmația Cosettei este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

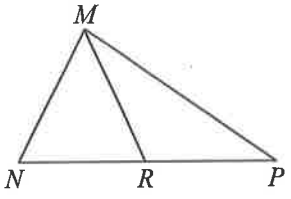
(5p) **1.** În figura alăturată, $ABCD$ este un romb cu perimetrul 36 cm și $\measuredangle A = 120°$. Lungimea celui mai scurt drum care unește vârful A cu un punct al dreptei BD este:
a) 18 cm; **b)** 12 cm;
c) 9 cm; d) 4,5 cm.



(5p) **2.** Trapezul $ABCD$ din figura alăturată are unghiurile alăturate bazei mari $\measuredangle A = 70°$ și $\measuredangle B = 45°$. Măsura unghiului format de dreptele AD și BC este:
a) 105°; **b)** 115°;
c) 90°; **d)** 65°.

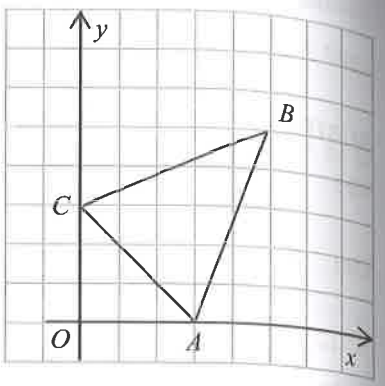


(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic MNP în care punctul R este mijlocul ipotenuzei NP. Dacă segmentele MN și MR sunt congruente, iar $MP = 4\sqrt{3}$ cm, atunci lungimea ipotenuzei este:
a) 2 cm; **b)** 4 cm;
c) 8 cm; **d)** $8\sqrt{3}$ cm.



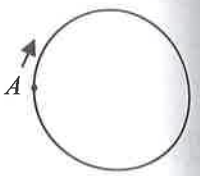
(5p) **4.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, 0)$, $B(5, 5)$ și $C(0, 3)$, ca în figura alăturată. Aria triunghiului ABC este:

a) 15; **b)** 12,5;
c) 10,5; **d)** 10.



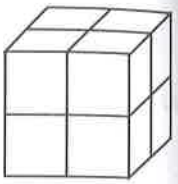
(5p) **5.** În figura alăturată este reprezentată o pistă circulară cu raza de 65 m. Un vehicul pleacă din A. Distanța maximă la care se poate afla vehiculul față de punctul de plecare este:

a) 100 m; **b)** 65π m;
c) 130π m; **d)** 130 m.



(5p) **6.** Un cub din lemn are suma ariilor tuturor fețelor egală cu 24 cm^2. Tăiem cubul în 8 cubulețe identice, având latura egală cu jumătate din latura cubului inițial. Suma ariilor tuturor fețelor cubulețelor obținute este:

a) 24 cm^2; **b)** 48 cm^2;
c) 64 cm^2; **d)** 72 cm^2.



SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Doi muncitori, la fel de harnici, culeg strugurii dintr-o vie. Primul lucrează 5 zile, iar al doilea 3 zile și primesc, împreună, 960 de lei pentru munca lor.

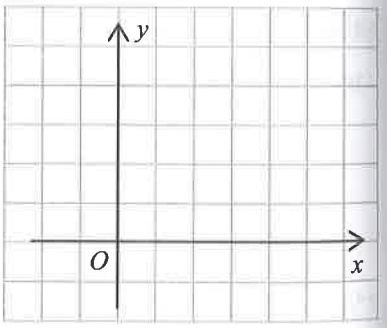
(2p) **a)** Ce procent din suprafața viei culege primul muncitor?

(3p) **b)** Ce sumă i se cuvine primului muncitor?

2. Se consideră expresia $E(x) = \dfrac{(x-2)^3 - x + 2}{x(x-4)+3}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$.

(2p) **a)** Arată că $(x-2)^3 - x + 2 = (x-1)(x-2)(x-3)$.

(3p) **b)** Demonstrează că $E(n)$ este număr întreg, oricare ar fi numărul întreg n, cu $n \neq 1$ și $n \neq 3$.



3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 3$.

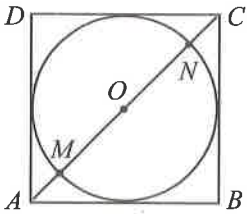
(2p) **a)** Reprezintă grafic funcția în reperul cartezian xOy alăturat.

(3p) **b)** Determină numărul real a, știind că punctul $A(a^2, 2a)$ este situat pe graficul funcției.

4. În figura alăturată, $ABCD$ este un pătrat din carton cu diagonala $AC = 10\sqrt{2}$ cm. Din acest pătrat se decupează un disc de arie maximă, mărginit de cercul $\mathscr{C}$. Fie M și N intersecțiile dintre AC și cercul $\mathscr{C}$, cu M între A și O.

(2p) **a)** Află lungimea conturului discului.

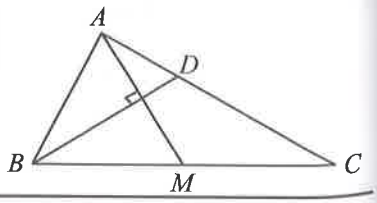
(3p) **b)** Determină lungimea segmentului AM.



5. În figura alăturată, ABC este un triunghi dreptunghic în A, în care mediana AM și bisectoarea BD sunt perpendiculare. Segmentul DM are lungimea $2\sqrt{3}$ cm.

(2p) **a)** Demonstrează că triunghiul ABM este echilateral.

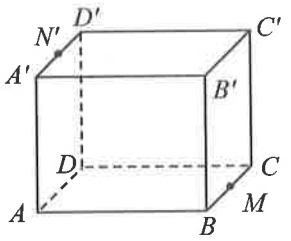
(3p) **b)** Calculează aria triunghiului ABC.



6. În figura alăturată, $ABCDA'B'C'D'$ este un cub cu muchia de 10 cm, iar M și N' sunt mijloacele muchiilor BC, respectiv $A'D'$.

(2p) **a)** Demonstrează că planele $(A'AM)$ și $(CC'N')$ sunt paralele.

(3p) **b)** Arată că distanța dintre planele $(A'AM)$ și $(CC'N')$ este $2\sqrt{5}$ cm.



✦ TESTUL 69 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Dacă x, y sunt numere naturale și $2^x \cdot 3^y = 48$, atunci $x + y$ este:

a) 3; **b)** 2; **c)** 5; **d)** 4.

(5p) **2.** Dacă $5 \cdot x = y, y \neq 0$, atunci $\frac{y}{x}$ este:

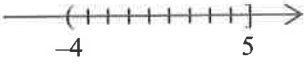
a) $\frac{2}{5}$; **b)** 5; **c)** $\frac{1}{5}$; **d)** 10.

(5p) **3.** Cel mai mic multiplu comun al numerelor 30 și 40 este:

a) 10; **b)** 70; **c)** 120; **d)** 60.

(5p) **4.** Fie mulțimea $M = \left\{-\frac{3}{4}; 0,1; \sqrt{\frac{16}{25}}; 2\sqrt{5}; 1+\sqrt{2}\right\}$. Cardinalul mulțimii $M \cap \mathbb{Q}$ este:

a) 4; **b)** 3; **c)** 1; **d)** 2.

(5p) **5.** Rezolvând cerința: „Scrieți intervalul care are imaginea geometrică alăturată 

”, patru elevi au obținut rezultatele înregistrate în tabelul alăturat.

Elevul care a rezolvat corect este:

a) David; **b)** Simona;

c) Radu; **d)** Costel.

Simona	Radu	Costel	David
$(-4, 5)$	$[-4, 5]$	$[-4, 5)$	$(-4, 5]$

(5p) **6.** Denisa este născută pe 7 martie. Pe 25 februarie 2020 îi spune unei prietene: „Peste 10 zile va fi ziua mea”. Afirmația Denisei este:

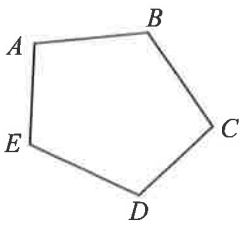
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată este reprezentat un pentagon convex $ABCDE$. Numărul diagonalelor pentagonului este:

a) 4; **b)** 6;

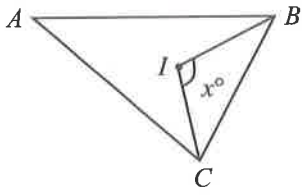
c) 3; **d)** 5.



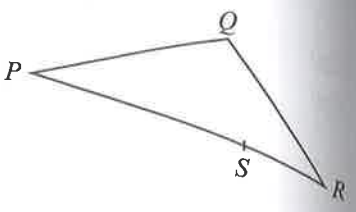
(5p) **2.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu măsura unghiului A egală cu $50°$ și punctul I de intersecție a bisectoarelor unghiurilor B și C. Măsura unghiului BIC este $x°$. Valoarea lui x este:

a) 115; **b)** 120;

c) 100; **d)** 95.

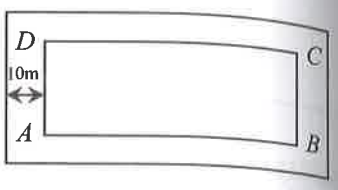


(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat un triunghi isoscel PQR cu măsura unghiului PQR egală cu $120°$. Punctul S aparține laturii PR, astfel încât PQ este perpendiculară pe QS. Dacă $PS = 16$ cm, atunci distanța de la S la dreapta QR este egală cu:



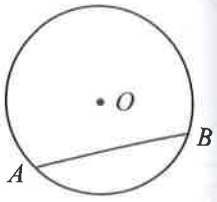
a) 8 cm; **b)** 16 cm;
c) 4 cm; **d)** 10 cm.

(5p) **4.** Figura alăturată reprezintă schița unui teren dreptunghiular $ABCD$, cu $AB = 100$ m și $AD = 60$ m. Terenul este înconjurat de o pistă de alergare cu lățimea de 10 m. Aria suprafeței reprezentând pista de alergare este egală cu:



a) 3800 m^2; **b)** 4000 m^2;
c) 3600 m^2; **d)** 11200 m^2.

(5p) **5.** În figura alăturată este reprezentat un cerc cu centrul în O și o coardă AB, aflată la distanța de 3 cm de centrul cercului. Dacă raza cercului este egală cu 6 cm, atunci lungimea arcului $\overset{\frown}{AB}$ va fi egală cu:



a) π cm; **b)** 4π cm;
c) $6\sqrt{3}$ cm; **d)** 12 cm.

(5p) **6.** Pentru fundația unei construcții se sapă o groapă în formă de trunchi de piramidă patrulateră regulată, având latura bazei mari de 6 m, latura bazei mici de 4 m și înălțimea de 3 m. Pământul este transportat cu un camion care poate duce cel mult 5 m^3 de pământ la un transport. Numărul curselor pe care trebuie să le efectueze camionul este:

a) 13; **b)** 20; **c)** 15; **d)** 16.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Irina a susținut un test-grilă, având 20 de întrebări. Pentru fiecare răspuns corect a primit 5 puncte și pentru fiecare răspuns greșit sau lipsă i s-au scăzut 2 puncte. La final, punctajul Irinei este 72 de puncte.

(2p) **a)** Este posibil ca Irina să fi dat exact 5 răspunsuri greșite? Justifică răspunsul.

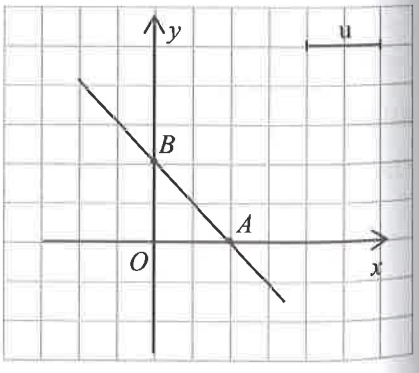
(3p) **b)** Determină numărul răspunsurilor corecte ale Irinei.

2. Se consideră expresia $E(x) = (x + 1)^2 - (x - 1)^2$, unde x este un număr real.

(2p) **a)** Arată că $E(x) = 4x$, oricare ar fi numărul real x.

(3p) **b)** Demonstrează că numărul $E(n^3) - E(n)$ este divizibil cu 24, oricare ar fi numărul natural n.

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x + 1$.



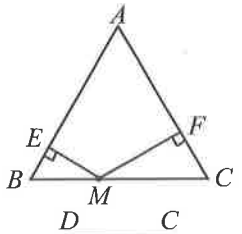
(2p) **a)** Calculează $f(\sqrt{2}) \cdot f(-\sqrt{2})$.

(3p) **b)** Știind că A și B sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox, respectiv Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy, determină distanța de la punctul $C(3, 0)$ la dreapta AB.

4. În figura alăturată, se consideră un punct M pe latura BC a triunghiului echilateral ABC și notăm cu E și F proiecțiile punctului M pe laturile AB, respectiv AC.

(2p) **a)** Arată că $ME \cdot AB + MF \cdot AC = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABC}$.

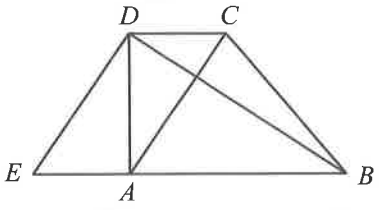
(3p) **b)** Demonstrează că valoarea sumei $ME + MF$ nu depinde de poziția punctului M.



5. În figura alăturată este reprezentat trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $\measuredangle A = \measuredangle D = 90°$, $AD = 12$ cm și $DC = 9$ cm. Diagonalele AC și BD sunt perpendiculare. Paralela prin D la dreapta AC intersectează dreapta AB în punctul E.

(2p) **a)** Arată că $ED = 15$ cm.

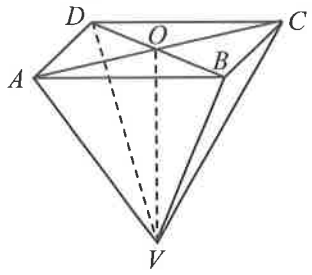
(3p) **b)** Determină aria trapezului $ABCD$.



6. În grădina lui Radu se află o fântână artizanală săpată în piatră, având forma piramidei patrulatere $VABCD$ din figura alăturată. Latura bazei are lungimea de 60 cm, iar măsura unghiului format de muchia laterală cu planul bazei este egală cu 45°.

(2p) **a)** Arată că în fântâna lui Radu încap mai mult de 50 ℓ de apă.

(3p) **b)** Determină măsura unghiului format de dreptele VA și BC.



✦ TESTUL 70 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $47 \cdot 56 + 45 \cdot 47 - 101 \cdot 46$ este:
a) 1; **b)** 102; **c)** 101; **d)** 36.

(5p) **2.** Tabelul alăturat cuprinde informații despre activitățile a patru copii în sala de antrenament. Copilul care a stat cel mai mult pe banda de alergare, raportat la timpul total petrecut în sală, este:
a) Marius; **b)** Corina;
c) Sorin; **d)** Andrei.

	Banda de alergare (min)	Alte aparate (min)
Marius	12	18
Corina	30	30
Sorin	10	20
Andrei	20	30

(5p) **3.** Rezultatul calculului $(-3)^3 + 4 \cdot 7$ este:
a) -1; **b)** 1; **c)** 18; **d)** -18.

(5p) **4.** Fracția ireductibilă echivalentă cu fracția $\frac{24}{18}$ este:
a) $\frac{48}{36}$; **b)** $\frac{8}{6}$; **c)** $\frac{12}{9}$; **d)** $\frac{4}{3}$.

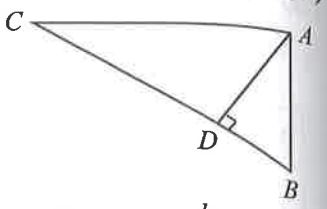
(5p) **5.** Patru elevi efectuează individual următorul calcul: $\sqrt{0,(4)} - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} - \left|\sqrt{5} - \frac{1}{3}\right|$. Ei obțin rezultatele înregistrate în tabelul alăturat. Elevul care a obținut rezultatul corect este:
a) Anca; **b)** Elena;
c) Călin; **d)** George.

Anca	**Călin**	**Elena**	**George**
$2\sqrt{2}$	$\frac{1}{3}+\sqrt{2}$	1	$-2\sqrt{5}+\frac{2}{3}$

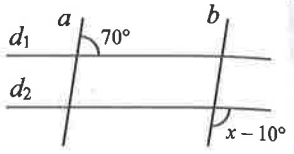
(5p) **6.** În parcare erau două biciclete şi de trei ori mai multe maşini. Crina afirmă că „Numărul roţilor tuturor autovehiculelor este egal cu 24." Afirmaţia sa este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

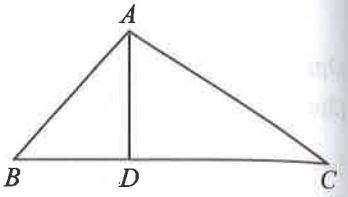
(5p) **1.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC şi înălţimea AD corespunzătoare ipotenuzei. Proiecţia punctului C pe dreapta AD este:
a) D; **b)** A;
c) C; **d)** B.



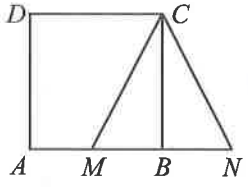
(5p) **2.** În figura alăturată, dreptele a şi b sunt paralele; la fel sunt dreptele d_1 şi d_2. În figură sunt marcate măsurile a două dintre unghiurile care se formează. Valoarea lui x este:
a) 60°; **b)** 80°;
c) 120°; **d)** 90°.



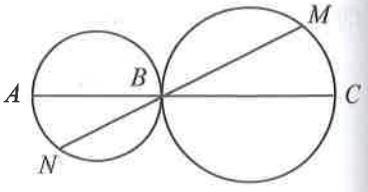
(5p) **3.** În triunghiul ABC, din figura alăturată, cunoaştem $AB = 120$ m, dreapta AD este perpendiculară pe BC, $D \in BC$, iar măsurile unghiurilor ABC şi ACB sunt egale cu 30°, respectiv cu 45°. Lungimea segmentului CD este egală cu:
a) 120 m; **b)** 60 m;
c) 30 m; **d)** 90 m.



(5p) **4.** În figura alăturată sunt reprezentate pătratul $ABCD$ şi triunghiul echilateral CMN, unde $M, N \in AB$. Dacă $MC = 4$ cm, atunci aria pătratului este:
a) 20 cm^2; **b)** $4\sqrt{3}$ cm^2;
c) 16 cm^2; **d)** 12 cm^2.



(5p) **5.** Cercurile din figura alăturată sunt tangente exterior, punctul de tangenţă fiind B. Segmentele AB şi BC sunt diametre în cele două cercuri, iar N, B şi M sunt puncte coliniare. Dacă măsura arcului $\overset{\frown}{BN}$ este 140°, atunci măsura arcului $\overset{\frown}{MC}$ va fi egală cu:
a) 30°; **b)** 170°;
c) 40°; **d)** 140°.



(5p) **6.** Laboratorul unei cofetării topeşte o bucată cubică de ciocolată menaj cu latura de 15 cm şi o transformă în tablete de ciocolată, având forma unor paralelipipede dreptunghice cu dimensiunile 9 cm, 6 cm, respectiv 1,5 cm. Dacă în procesul de fabricaţie sunt pierderi de 20%, numărul maxim de tablete de ciocolată ce pot fi obţinute este:
a) 30; **b)** 33; **c)** 34; **d)** 31.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

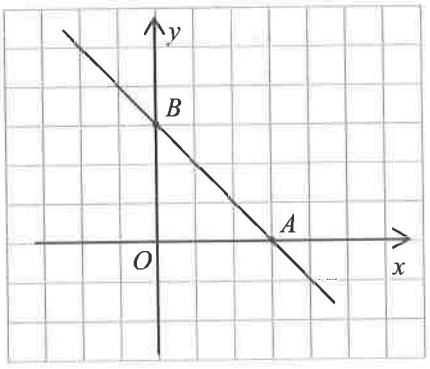
1. La Grădina Botanică, pentru trei bilete de adulţi şi şase bilete de copii s-au plătit 93 de lei. Altă dată, pentru patru bilete de adulţi şi două bilete de copii s-au plătit 76 de lei.
(2p) **a)** Este posibil ca preţul unui bilet pentru adulţi să fie 20 de lei? Justifică răspunsul.
(3p) **b)** Determină diferenţa dintre preţul unui bilet pentru adulţi şi cel al unui bilet pentru copii.

2. Se consideră expresia $E(x) = (x-3)^2 + 2(x-3)(x+2) + (x+2)^2$, unde x este un număr real.
(2p) **a)** Arată că $E(x) = (2x-1)^2$, oricare ar fi numărul real x.
(3p) **b)** Determină numărul raţional a pentru care $E(\sqrt{3}) + a\sqrt{3}$ este un număr raţional.

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a \cdot x + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

(2p) **a)** Calculează $f(1) + f(-1) - 2f(0)$.

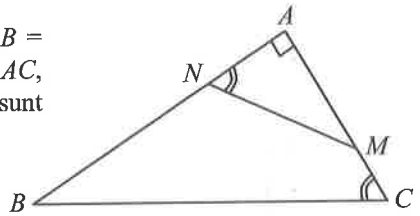
(3p) **b)** Știind că $A(3, 0)$ și $B(0, 3)$ sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox, respectiv Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy, determină expresia legii de corespondență.



4. În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC cu $AB = 8$ cm și $AC = 6$ cm. Punctele M și N sunt situate pe catetele AC, respectiv AB, astfel încât $AN = 3$ cm și unghiurile $\sphericalangle MNA$ și $\sphericalangle BCA$ sunt congruente.

(2p) **a)** Arată că $BC = 10$ cm.

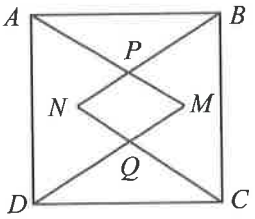
(3p) **b)** Determină lungimea segmentului MN.



5. Modelul unui covor este reprezentat de un pătrat $ABCD$ în interiorul căruia se află triunghiurile echilaterale BCN și ADM. Latura pătratului este de 12 cm, dreptele AM și BN se intersectează în punctul P, iar dreptele NC și DM se intersectează în punctul Q.

(2p) **a)** Arată că $BP = 4\sqrt{3}$ cm.

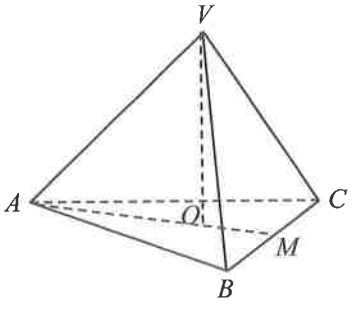
(3p) **b)** Demonstrează că perimetrul patrulaterului $MPNQ$ este mai mic decât 20,32 cm. (Se admite cunoscut că $\sqrt{3} > 1{,}73$).



6. O piatră semiprețioasă are forma piramidei triunghiulare regulate $VABC$ din figura alăturată. Punctul M este mijlocul laturii BC, O este centrul bazei ABC, $AB = 6$ cm și $VM = 2$ cm.

(2p) **a)** Arată că volumul pietrei este mai mare decât 5 cm^3.

(3p) **b)** Determină măsura unghiului format de o față laterală cu planul bazei.



✦ TESTUL 71 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Câtul împărțirii numărului 435 la 11 este:
a) 6; **b)** 39; **c)** 38; **d)** 50.

(5p) **2.** Probabilitatea ca, alegând un număr de forma $\overline{3x}$, acesta să fie număr prim este:
a) 0,2; **b)** 0,5; **c)** 1; **d)** 0,75.

(5p) **3.** Numărul perechilor (x, y) de numere întregi care verifică relația $x^2 + y^2 = 4$ este:
a) 1; **b)** 2; **c)** 4; **d)** 5.

(5p) **4.** Patru elevi trebuie să determine cardinalul mulțimii $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid 1 \le n \le 8 \text{ și } \frac{10}{n} \text{ este fracție periodică} \right\}$.

Rezultatele lor sunt înregistrate în tabelul de mai jos.

Roxana	Elena	Octavian	Marcu
1	2	3	4

Dintre cei patru elevi, cel care a obținut rezultatul corect este:

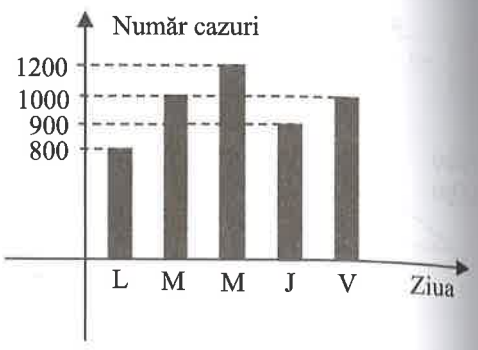
a) Roxana; **b)** Elena; **c)** Octavian; **d)** Marcu.

(5p) **5.** Pentru $a = \frac{1}{\sqrt{3}+1}$ și $b = \left(\sqrt{12}+\sqrt{27}\right) \cdot 5^{-1}$, rezultatul calculului $2a - b$ este egal cu:

a) 1; **b)** -1; **c)** $\sqrt{3}$; **d)** 0.

(5p) **6.** Numărul cazurilor noi din timpul unei săptămâni a pandemiei Covid-19 este prezentat în diagrama alăturată. Denisa afirmă că, în respectiva săptămână, cele mai puține cazuri au fost înregistrate joi. Afirmația Denisei este:

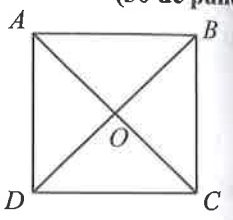
a) adevărată; **b)** falsă.



SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

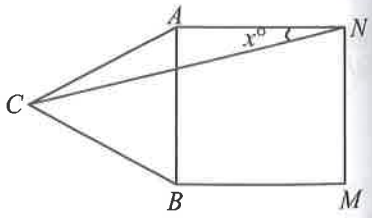
(5p) **1.** În figura alăturată este reprezentat un pătrat $ABCD$ cu centrul O. Proiecția ortogonală a segmentului AB pe dreapta AC este segmentul:

a) DC; **b)** AC;
c) OC; **d)** AO.



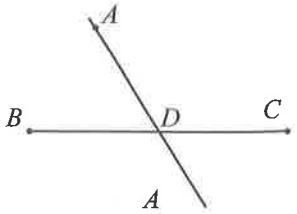
(5p) **2.** În figura alăturată, triunghiul echilateral ABC este în exteriorul pătratului $ABMN$, iar măsura unghiului ANC este $x°$. Valoarea lui x este:

a) 10; **b)** 20;
c) 30; **d)** 15.



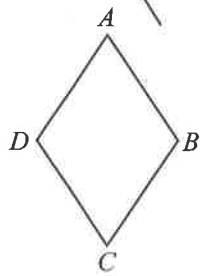
(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentată o hartă: două localități B și C sunt separate de un râu AD care trece prin mijlocul D al segmentului BC. Măsura unghiului ADC este egală cu 150°, iar $BC = 24$ km. Distanța de la C la râul AD este egală cu:

a) 12 km; **b)** 6 km;
c) 8 km; **d)** 24 km.

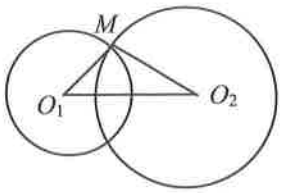


(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat un romb $ABCD$, având perimetrul egal cu 40 cm și $\measuredangle B = 3 \cdot \measuredangle A$. Aria rombului este egală cu:

a) 10 cm^2; **b)** $5\sqrt{2}$ cm^2;
c) $50\sqrt{2}$ cm^2; **d)** $25\sqrt{2}$ cm^2.



(5p) **5.** Cercurile din figura alăturată au razele egale cu 9 cm, respectiv 12 cm și distanța dintre centre de 15 cm. Dacă M este unul dintre punctele lor de intersecție, atunci măsura unghiului O_1MO_2 este egală cu:



a) 120°; **b)** 90°;
c) 150°; **d)** 60°.

(5p) **6.** Pentru a construi fundația unei case se sapă o groapă în formă de trunchi de piramidă patrulateră regulată. Adâncimea gropii este de 6 m, latura bazei mici are 4 m și latura bazei mari are 10 m. Volumul pământului excavat este egal cu:

a) 312 m^3; **b)** 300 m^3; **c)** 320 m^3; **d)** 280 m^3.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Un croitor dispune de 11 m de material. Pentru a confecționa o rochie utilizează 3 m de material, iar pentru a confecționa o bluză folosește 2 m de material. Rochia se vinde cu 105 lei bucata și bluza cu 80 de lei bucata.

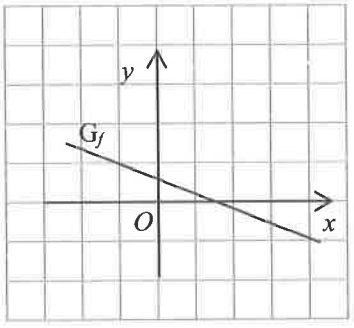
(2p) **a)** Este posibil să confecționeze doar bluze folosind tot materialul? Justifică răspunsul.

(3p) **b)** Determină câte bluze și câte rochii va face croitorul, astfel încât să folosească tot materialul și să obțină o sumă cât mai mare de bani.

2. Se consideră expresia $E(x)=\frac{x}{3}\cdot\left(\frac{8x-12}{4x^2-12x+9}-\frac{5x}{2x^2+3x}-\frac{20x}{9-4x^2}\right)$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2},\ 0,\ \frac{3}{2}\right\}$.

(2p) **a)** Arată că $E(x)=\frac{3x}{2x-3}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2},\ 0,\ \frac{3}{2}\right\}$.

(3p) **b)** Determină valorile întregi ale lui n, pentru care $E(n)$ este număr întreg.

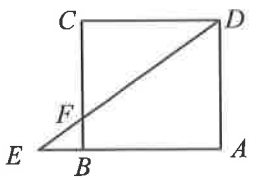


3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-\frac{x}{3}+\frac{1}{2}$.

(2p) **a)** Calculează $f(-2)+f(-1)+f(1)+f(2)$.

(3p) **b)** Demonstrează că nu există puncte $P(a,\ b)$, aparținând graficului funcției f, astfel încât a și b să fie simultan numere întregi.

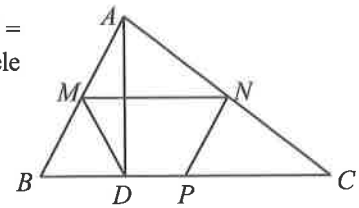
4. În figura alăturată este reprezentat pătratul $ABCD$ cu $AB = 6$ cm. Prelungim latura AB cu $BE = 2$ cm și notăm cu F intersecția dreptelor BC și DE.



(2p) **a)** Arată că $DE = 10$ cm.

(3p) **b)** Determină lungimea segmentului EF.

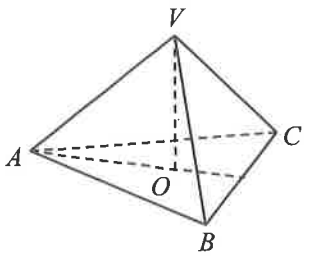
5. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC, având $AB = 12$ cm, $BC = 20$ cm și măsura unghiului ABC egală cu 60°. Notăm cu M, N, P mijloacele segmentelor AB, AC, respectiv BC și cu D piciorul înălțimii din A.



(2p) **a)** Arată că $MD = NP = 6$ cm.

(3p) **b)** Determină perimetrul patrulaterului $MNPD$.

6. Un corp din lemn are forma piramidei triunghiulare regulate $VABC$ din figura alăturată. Înălțimea piramidei este $VO = 1$ cm și latura bazei are lungimea $AB = 24$ cm. Pe suprafața laterală se aplică un strat de vopsea. Se știe că 1,5 g de vopsea acoperă o suprafață de 14 cm^2.



(2p) **a)** Stabilește ce cantitate de vopsea este necesară pentru a vopsi întreaga suprafață laterală.

(3p) **b)** Arată că tangenta unghiului format de muchia laterală a piramidei cu planul bazei este mai mare decât $\frac{1}{14}$.

✦ TESTUL 72 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $(-15 + 1) : (-6 - 1)$ este:
a) -2; **b)** 2; **c)** 3; **d)** 1.

(5p) **2.** Numărul natural $\overline{xy}$ pentru care $\frac{x+y}{x} = 2\frac{2}{3}$ este:
a) 53; **b)** 35; **c)** 81; **d)** 18.

(5p) **3.** Suma tuturor numerelor întregi din intervalul $[-3, 4)$ este:
a) 4; **b)** -6; **c)** 0; **d)** 16.

(5p) **4.** Soluția inecuației $\frac{-4}{2x+1} \geq 0$ este:
a) $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$; **b)** $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$; **c)** $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$; **d)** $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$.

(5p) **5.** Patru elevi au avut de calculat media aritmetică și media geometrică a numerelor $a = 2 - \sqrt{3}$, $b = 2 + \sqrt{3}$ și de ordonat crescător numerele a, b, m_a și m_g. Rezultatele lor sunt înregistrate mai jos.

Alin	$a < b < m_g < m_a$
Bogdan	$a < m_g < m_a < b$

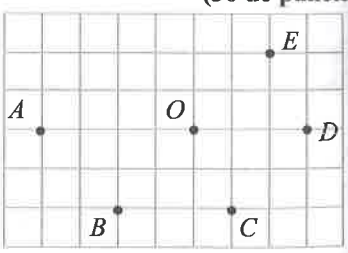
Cristi	$m_g < a < b < m_a$
Diana	$b > m_a > m_g > a$

Dintre cei patru elevi, cel care a scris ordinea corectă este:
a) Diana; **b)** Alin; **c)** Bogdan; **d)** Cristi.

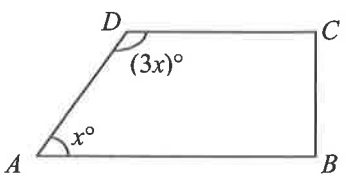
(5p) **6.** Bacul de la Galați poate transporta la o cursă fie 20 de automobile, fie 12 camioane. Când începe îmbarcarea, în fața lui Alin (care conduce un automobil) sunt 9 automobile și 6 camioane. Alin afirmă că va avea loc în prima cursă. Afirmația lui Alin este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

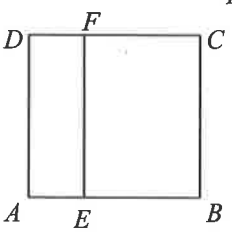
(5p) **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele A, B, C, D, E și O. Unghiul opus la vârf cu unghiul AOB este:
a) $\sphericalangle DOE$; **b)** $\sphericalangle COD$;
c) $\sphericalangle BOA$; **d)** $\sphericalangle EOC$.



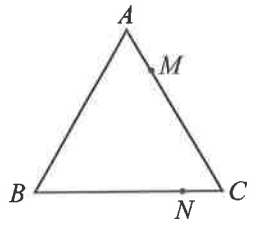
(5p) **2.** În figura alăturată, $ABCD$ este un trapez dreptunghic cu $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 90°$, $\sphericalangle A = x°$ și $\sphericalangle D = (3x)°$. Valoarea lui x este:
a) 45; **b)** 90;
c) 135; **d)** 60.



(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentată o suprafață pătratică $ABCD$, obținută prin alăturarea a două suprafețe dreptunghiulare $AEFD$ și $FEBC$, având ariile egale cu 1500 m^2, respectiv 2100 m^2. Lungimea segmentului AE este egală cu:
a) 15 m; **b)** 50 m;
c) 25 m; **d)** 60 m.

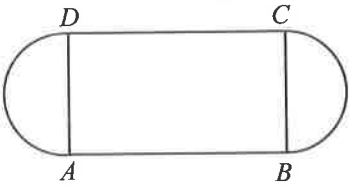


(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat un triunghi echilateral ABC cu latura de 6 cm. Punctele M și N aparțin laturilor AC, respectiv BC, astfel încât $AM = CN = 2$ cm. Măsura unghiului CMN este:



a) 15°; **b)** 30°;
c) 60°; **d)** 90°.

(5p) **5.** O pistă de atletism are forma din figura alăturată. Dreptunghiul $ABCD$, cu $AB = 100$ m și $AD = 70$ m, are la capete două semicercuri. Distanța parcursă de un atlet care pleacă din A și înconjoară complet pista este de:



a) 420 m; **b)** 490 m;
c) 485 m; **d)** 455 m.

(Se va considera valoarea aproximativă $\pi = \frac{22}{7}$.)

(5p) **6.** Apa aflată într-un recipient plin, în formă de con circular drept cu înălțimea de 12 cm și raza bazei de 5 cm, se toarnă într-un vas cilindric cu înălțimea de 6 cm și raza bazei de 10 cm. Înălțimea la care se ridică apa în cilindru este:

a) 1 cm; **b)** 0,5 cm; **c)** 2 cm; **d)** 4 cm.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Bunica își așteaptă nepoții cu pere și caise. Numărul perelor este cu trei mai mare decât dublul numărului caiselor. Fiecare nepot a primit câte o caisă și câte trei pere și au rămas patru caise și patru pere.

(2p) **a)** Este posibil ca bunica să aibă exact 16 pere? Justifică răspunsul.

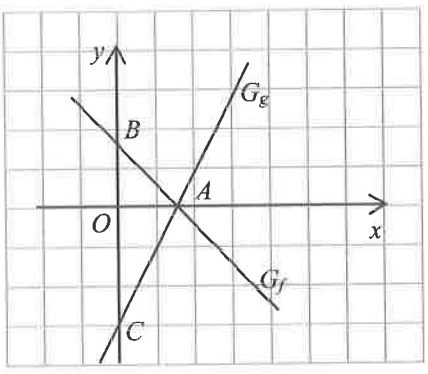
(3p) **b)** Determină numărul nepoților bunicii.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{x^2+6}{x^2+6x+9} - \frac{x}{x+3}\right) : \left(\frac{1}{x-3} + \frac{5}{9-x^2}\right)$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2, 3\}$.

(2p) **a)** Arată că $E(x) = \frac{3(3-x)}{x+3}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2, 3\}$.

(3p) **b)** Demonstrează că numărul $\sqrt{E\left(\sqrt{2}\right) \cdot E\left(-\sqrt{2}\right)}$ aparține mulțimii numerelor naturale.

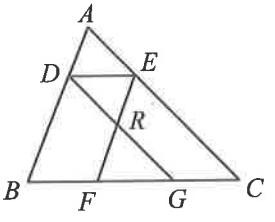
3. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x + a, g(x) = bx - 3$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Graficele celor două funcții se intersectează în punctul $A\left(\sqrt{3}, 0\right)$.



(2p) **a)** Arată că $a = b = \sqrt{3}$.

(3p) **b)** Știind că B și C sunt punctele de intersecție a reprezentărilor graficelor funcțiilor f, respectiv g, cu axa Oy a sistemului de axe ortogonale xOy, determină măsura unghiului BAC.

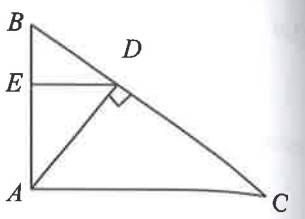
4. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu $AB = 10$ cm și $BC = 15$ cm. Se consideră punctul D pe latura AB, cu $AD = 4$ cm. Construim DG paralelă cu AC, $G \in BC$, DE paralelă cu BC, $E \in AC$ și EF paralelă cu AB, $F \in BC$. Dreptele DG și EF se intersectează în punctul R.



(2p) **a)** Arată că $BF = GC = 6$ cm.

(3p) **b)** Determină lungimea segmentului ER.

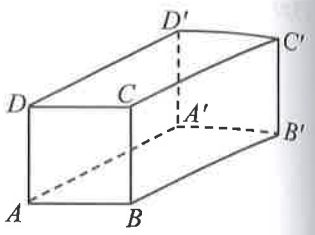
5. În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC cu $AB = 15$ cm, $AC = 20$ cm și măsura unghiului BAC de $90°$. Construim AD perpendiculară pe BC, $D \in BC$ și DE paralelă cu AC, $E \in AB$.



(2p) **a)** Arată că $AD = 12$ cm.

(3p) **b)** Determină lungimea segmentului DE.

6. Un garaj are forma paralelipipedului dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ din figura alăturată. Dimensiunile paralelipipedului sunt $AB = AD = 2$ m, iar $AA' = 4$ m.



(2p) **a)** Arată că o vergea cu lungimea de 5 m nu poate încăpea în întregime în garaj, fără a fi ruptă.

(3p) **b)** Determină măsura unghiului dreptelor AB și $B'D'$.

✦ TESTUL 73 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Suma divizorilor naturali proprii ai numărului 15 este:

a) 8; **b)** 16; **c)** 24; **d)** 20.

(5p) **2.** Bunica a făcut aceeași cantitate de dulceață de caise și dulceață de cireșe. Dacă pentru dulceața de caise i-au trebuit 8 recipiente de 600 ml fiecare, atunci numărul recipientelor de 800 ml, pentru dulceața de cireșe, a fost:

a) 10; **b)** 5; **c)** 6; **d)** 4.

(5p) **3.** Dacă $x_1 < 0 < x_2$ sunt soluțiile ecuației $x^2 = 4$, atunci $x_2 - x_1$ este:

a) 4; **b)** –4; **c)** 0; **d)** –2.

(5p) **4.** Fie $y = -1{,}5$. Numărul real x care verifică relația $x + y = x \cdot y$ este:

a) $-\frac{3}{5}$; **b)** $-\frac{5}{3}$; **c)** 0,6; **d)** 0.

(5p) **5.** Patru elevi au de calculat suma numerelor naturale n, pentru care $3\sqrt{n} \in \left(2\sqrt{5},\ 4\sqrt{3}\right)$. Rezultatele sunt înregistrate în tabelul următor.

Eduard	Măriuca	Daria	Vlad
3	12	7	14

Elevul care a obținut rezultatul corect este:

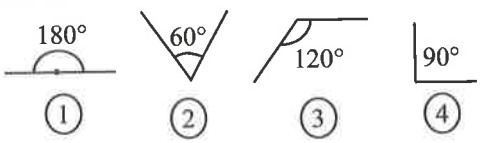
a) Măriuca; **b)** Daria; **c)** Vlad; **d)** Eduard.

(5p) **6.** Marius susține că suma primelor opt zecimale ale numărului $n = 0{,}(123)$ este 15. Afirmația lui Marius este:

a) adevărată; **b)** falsă.

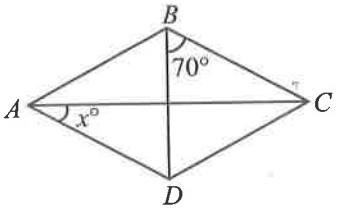
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată sunt reprezentate patru unghiuri și măsurile corespunzătoare. Singurul unghi impropriu este cel numerotat cu:



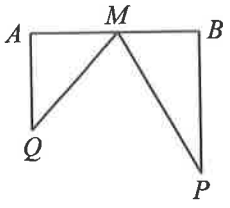
a) (2); **b)** (1);
c) (3); **d)** (4).

(5p) **2.** În figura alăturată, $ABCD$ este un romb. Măsurile unghiurilor DAC și DBC sunt $x°$, respectiv $70°$. Valoarea lui x este egală cu:



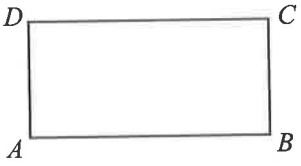
a) 70; **b)** 140;
c) 10; **d)** 20.

(5p) **3.** De aceeași parte a segmentului AB se construiesc perpendicularele AQ și BP pe acesta, ca în figura alăturată. Dacă $AB = 12$ cm, $AQ = 6$ cm, $BP = 6\sqrt{3}$ cm și punctul M este mijlocul AB, atunci măsura unghiului PMQ este egală cu:



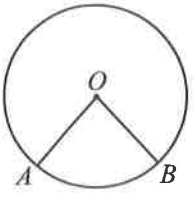
a) 60°; **b)** 105°;
c) 75°; **d)** 45°.

(5p) **4.** În figura alătură este reprezentat un dreptunghi $ABCD$ cu $AB = 320$ cm și $AD = 80$ cm. Dacă un pătrat are aceeași arie ca dreptunghiul, atunci lungimea laturii pătratului este egală cu:



a) 80 cm; **b)** 60 cm;
c) 160 cm; **d)** 120 cm.

(5p) **5.** În figura alătură este reprezentat un cerc în care AOB este unghi la centru cu măsura egală cu 72°. Dacă aria sectorului circular $\overset{\frown}{AOB}$ este egală cu 16π cm^2, atunci lungimea cercului este egală cu:



a) 10π cm; **b)** $20\sqrt{5}\pi$ cm;
c) 80π cm; **d)** $8\sqrt{5}\pi$ cm.

(5p) **6.** Dintr-o bucată de tablă, având forma unui triunghi echilateral cu latura de 8 dm, se confecționează tetraedre regulate cu latura de 1 dm. Numărul maxim de tetraedre care pot fi obținute este:
a) 4; **b)** 64; **c)** 8; **d)** 16.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Cu un an în urmă, vârsta mamei era de patru ori mai mare decât vârsta fiicei sale. Peste trei ani, vârsta mamei va fi de trei ori mai mare decât vârsta fiicei sale.

(2p) **a)** Este posibil ca vârsta fiicei să fie 11 ani? Justifică răspunsul.

(3p) **b)** Determină vârsta mamei.

2. Se consideră expresia $E(x) = x - \left(1 + \dfrac{\sqrt{18}}{x - 2\sqrt{2}}\right) : \dfrac{x^2 + 3x\sqrt{2} + 4}{x^2 - 8}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right\}$.

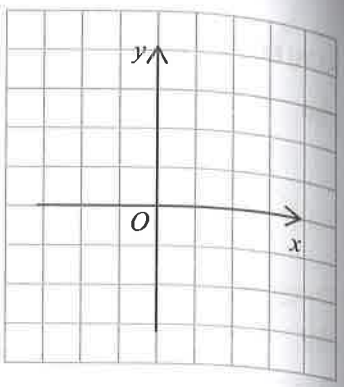
(2p) **a)** Arată că $x^2 + 3x\sqrt{2} + 4 = \left(x + \sqrt{2}\right)\left(x + 2\sqrt{2}\right)$, pentru orice număr real x.

(3p) **b)** Demonstrează că $E(x) = x - 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right\}$.

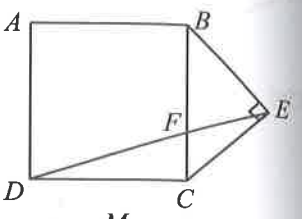
3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+1$.

(2p) **a)** Arată că numărul $\sqrt{1+f(9)\cdot f(10)}$ este număr natural.

(3p) **b)** Reprezintă graficul funcției în sistemul de axe ortogonale xOy alăturat.



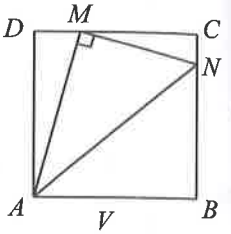
4. În figura alăturată este reprezentat pătratul $ABCD$, în exteriorul căruia este construit triunghiul dreptunghic isoscel BCE cu unghiul drept în E. Latura pătratului este egală cu 6 cm, iar punctul F este intersecția segmentelor DE și BC.



(2p) **a)** Arată că $DE=3\sqrt{10}$ cm.

(3p) **b)** Determină lungimea segmentului EF.

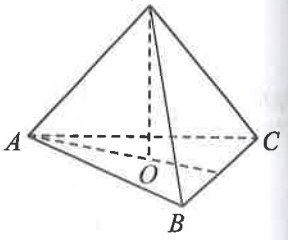
5. În figura alăturată este reprezentat un pătrat $ABCD$ cu $AB=9$ cm, iar M este un punct pe latura DC, astfel încât $3DM=DC$. Perpendiculara în M pe dreapta AM intersectează latura BC în punctul N.



(2p) **a)** Arată că triunghiurile DAM și CMN sunt asemenea.

(3p) **b)** Determină lungimea segmentului BN.

6. Un sortiment de suc este ambalat în cutii, având forma tetraedrului regulat $VABC$ din figura alăturată, cu suma lungimilor muchiilor egală cu 72 cm.



(2p) **a)** Află aria totală a unei cutii.

(3p) **b)** Arată că în cutie încap mai mult de 200 ml suc.

✦ TESTUL 74 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Numărul $\overline{ab}$ care verifică $\overline{ab}=72+\overline{ba}$ este:

a) 19; **b)** 91; **c)** 36; **d)** 63.

(5p) **2.** Dacă $\frac{a}{3}=0{,}5$, atunci $4\cdot a$ este egal cu:

a) 6; **b)** 2; **c)** 0,6; **d)** 1,8.

(5p) **3.** Suma numerelor raționale din mulțimea $\left\{3^{-1};\ \pi;\ \sqrt{2,(7)};\ 5^0;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ este:

a) $\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}$; **b)** 1; **c)** 3; **d)** 2.

(5p) **4.** Numerele raționale $\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}$ și x au media aritmetică egală cu $\frac{1}{2}$. Valoarea lui x este:

a) 0; **b)** $-\frac{1}{2}$; **c)** $\frac{1}{2}$; **d)** 1.

(5p) **5.** Partea întreagă a numărului $x = \sqrt{18} - \frac{6}{\sqrt{2}} - \left|1 - \sqrt{2}\right|$ este egală cu:

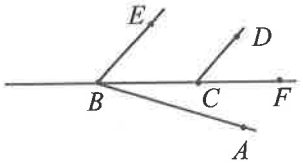
a) 0; **b)** -2; **c)** -1; **d)** $\sqrt{2} - 1$.

(5p) **6.** Andra a scris în caietul de teme că $(-2, 5) \cap [5, 7) = \varnothing$. Egalitatea scrisă de Andra este:

a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

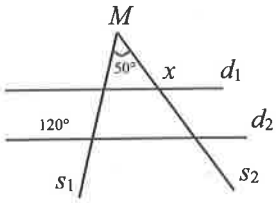
(5p) **1.** Analizând figura alăturată, constatăm că unghiul ABC este adiacent cu unghiul:



a) $\sphericalangle CBE$; **b)** $\sphericalangle ABE$;

c) $\sphericalangle DCF$; **d)** $\sphericalangle FBA$.

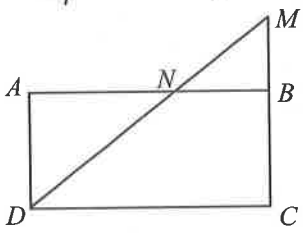
(5p) **2.** În figura alăturată, dreptele d_1 și d_2 sunt paralele, iar s_1 și s_2 sunt două secante concurente în M. Măsurile a trei dintre unghiurile care se formează sunt marcate în figură. Valoarea lui x este egală cu:



a) 120°; **b)** 70°;

c) 110°; **d)** 90°.

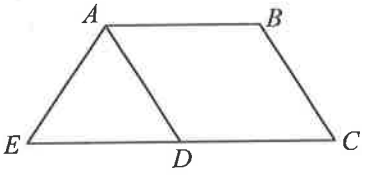
(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat un dreptunghi $ABCD$. Bisectoarea unghiului ADC intersectează dreptele AB și BC în punctele N, respectiv M. Dacă $AD = 4$ cm și $MB = 2$ cm, atunci aria dreptunghiului $ABCD$ este egală cu:



a) 8 cm^2; **b)** 24 cm^2;

c) 16 cm^2; **d)** 20 cm^2.

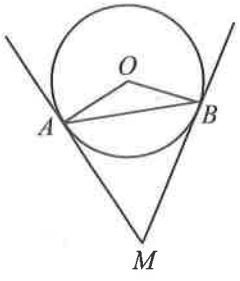
(5p) **4.** În figura alăturată sunt reprezentate rombul $ABCD$ cu $AB = BD = 20$ cm și triunghiul echilateral ADE, exterior rombului. Distanța de la punctul E la dreapta BC este egală cu:



a) $20\sqrt{3}$ cm; **b)** $10\sqrt{3}$ cm;

c) 20 cm; **d)** $15\sqrt{3}$ cm.

(5p) **5.** Prin punctele A și B ale triunghiului echilateral MAB se construiește cercul tangent laturilor MA și MB, ca în figura alăturată. Măsura unghiului AOB este egală cu:



a) 100°; **b)** 120°;

c) 90°; **d)** 60°.

(5p) **6.** O cutie are forma unui cub cu latura de 5 cm. Numărul cutiilor ce pot fi confecționate, având la dispoziție o coală dreptunghiulară cu dimensiunile de 60 cm și 150 cm, este:

a) 100; **b)** 50; **c)** 40; **d)** 60.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Într-o sală de clasă, dacă stă câte un copil în fiecare bancă, rămân 12 copii în picioare. Dacă stau câte doi copii în fiecare bancă, atunci în ultima bancă rămâne un singur copil.

(2p) **a)** Este posibil să fie 14 bănci? Justifică răspunsul.

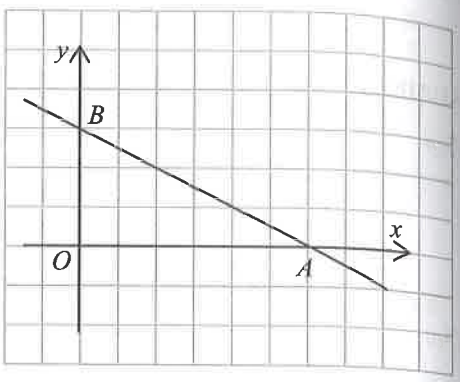
(3p) **b)** Determină numărul de copii.

2. Fie x un număr real cu proprietatea $x+\frac{1}{x}=3$.

(2p) **a)** Arată că $x^2+\frac{1}{x^2}=7$.

(3p) **b)** Găsește un număr real x cu proprietatea dată.

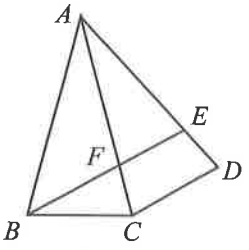
3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-\frac{x}{2}+3$.



(2p) **a)** Află numărul real m, dacă punctul $P(m, m)$ aparține graficului funcției f.

(3p) **b)** Știind că A și B sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox, respectiv Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy, determină tangenta unghiului format de graficul funcției cu axa ordonatelor.

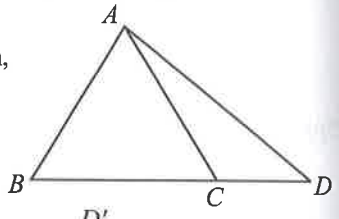
4. În figura alăturată sunt reprezentate două triunghiuri isoscele ABC și ACD cu interioarele disjuncte și $AB = AC = AD$. Unghiurile BAC și CAD au măsurile egale cu 36°, iar paralela prin B la CD intersectează dreptele AC și AD în punctele F, respectiv E.



(2p) **a)** Demonstrează că dreptele BD și AC sunt perpendiculare.

(3p) **b)** Arată că triunghiul ABF este isoscel.

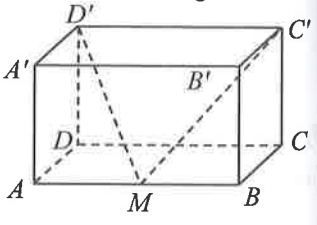
5. În figura alăturată este reprezentat triunghiul echilateral ABC, cu $AB = 12$ cm, iar punctul D aparține prelungirii laturii BC, astfel încât $CD = 6$ cm.



(2p) **a)** Arată că $AD = 6\sqrt{7}$ cm.

(3p) **b)** Demonstrează că aria triunghiului ACD este mai mică decât 32 cm^2.

6. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB = 12$ cm, $BC = 8$ cm și $CC' = 6$ cm. Punctul M este mijlocul segmentului AB.



(2p) **a)** Arată că triunghiul $MC'D'$ este isoscel.

(3p) **b)** Determină distanța de la punctul C la planul $(MC'D')$.

✦ TESTUL 75 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** O valoare a cifrei x, pentru care numerele 120 și $\overline{20x}$ sunt prime între ele, este:
a) 0; **b)** 7; **c)** 3; **d)** 4.

(5p) **2.** Într-o cutie sunt 8 bile albe și n bile roșii. Dacă probabilitatea de a extrage din cutie o bilă roșie este $\frac{3}{5}$, atunci numărul n este egal cu:
a) 10; **b)** 8; **c)** 12; **d)** 6.

(5p) **3.** Numerele întregi $-3, x, y, z, t, 2$ sunt scrise în ordine crescătoare. Valoarea sumei $x + y + z + t$ este:
a) -1; **b)** 0; **c)** 1; **d)** -2.

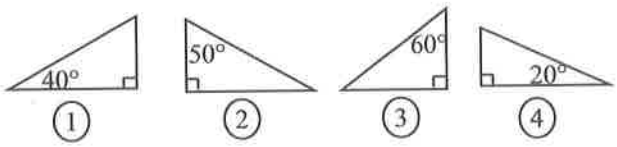
(5p) **4.** Fie $x = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} : \frac{1}{3}\right) \cdot 1\frac{2}{5}$. Valoarea absolută a numărului x este:
a) $-\frac{7}{6}$; **b)** $\frac{7}{6}$; **c)** -2; **d)** $\frac{7}{10}$.

(5p) **5.** Media geometrică a numerelor $x = \left|1 - \sqrt{5}\right|$ și $y = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{2} - 2$ este egală cu:
a) 2; **b)** $\sqrt{5}$; **c)** -1; **d)** $1 + \sqrt{5}$.

(5p) **6.** Tudor spune că cel mai mare număr întreg din intervalul $(-2, 3)$ este 3. Afirmația lui Tudor este:
a) adevărată; **b)** falsă.

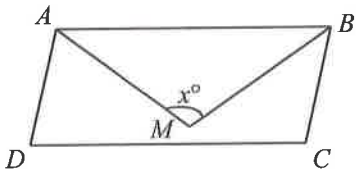
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Dintre triunghiurile dreptunghice din figura alăturată, o pereche de triunghiuri asemenea este perechea:



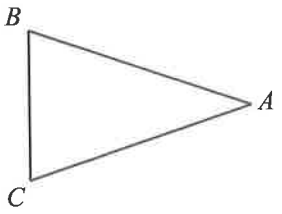
a) (1), (3); **b)** (2), (3);
c) (2), (1); **d)** (3), (4).

(5p) **2.** În figura alăturată, $ABCD$ este un paralelogram, iar M este punctul de intersecție a bisectoarelor unghiurilor DAB și ABC. Măsura unghiului AMB este $x°$. Valoarea lui x este:



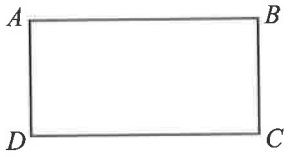
a) 90; **b)** 120;
c) 50; **d)** 180.

(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ascuțitunghic isoscel ABC, cu $AB = AC = 12$ m și aria egală cu $36\sqrt{3}$ m^2. Distanța dintre punctele B și C este egală cu:



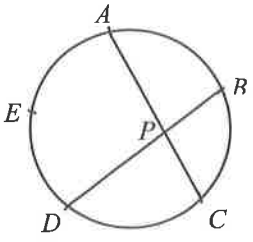
a) 24 m; **b)** $6\sqrt{3}$ m;
c) 18 m; **d)** 12 m.

(5p) **4.** O coală de hârtie are forma dreptunghiului $ABCD$ din figura alăturată, cu $AB = 30$ cm și $AD = 20$ cm. O astfel de coală are masa de 0,8 g. Suprafața ce poate fi acoperită în întregime, fără suprapuneri, cu foile dintr-un pachet care cântărește 500 g este:



a) 40 m^2; **b)** 37,5 m^2;
c) 38 m^2; **d)** 32 m^2.

(5p) **5.** Cinci persoane A, B, C, D și E stau în jurul unei mese circulare, ca în figura alăturată. Dacă arcele $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DE}$ și $\overset{\frown}{EA}$ au măsuri egale și P este punctul de intersecție a dreptelor AC și BD, atunci măsura unghiului APB este egală cu:



a) 108°; **b)** 36°;
c) 72°; **d)** 90°.

(5p) **6.** Într-un vas metalic, având formă de prismă patrulateră regulată cu latura bazei de 20 cm și înălțimea de 30 cm, se află 6 ℓ de apă. Dacă introducem în vas o piatră cubică cu latura de 10 cm, atunci nivelul apei crește cu:
a) 1,25 cm; **b)** 2,5 cm; **c)** 2 cm; **d)** 1 cm.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Pe o parte a unei alei sunt plantați tei din 10 m în 10 m; în ambele capete ale aleii se află câte un tei. Între oricare doi tei consecutivi sunt plantate câte 5 panseluțe. Numărul panseluțelor este cu 27 mai mare decât numărul teilor.

(2p) **a)** Este posibil să fie 29 de panseluțe? Justifică răspunsul.

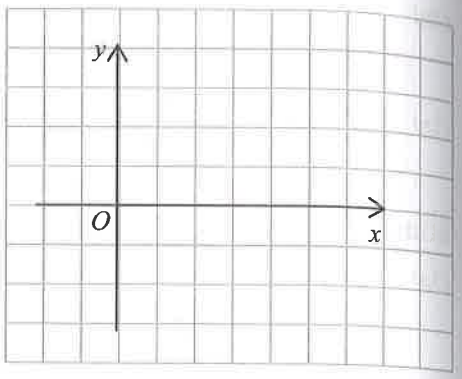
(3p) **b)** Determină lungimea aleii.

2. Se consideră expresia $E(x)=\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x(x+2)+1}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

(2p) **a)** Arată că $x(x+2)+1=(x+1)^2$, pentru orice număr real x.

(3p) **b)** Demonstrează că $E(n)$ este număr natural, pentru orice număr natural nenul n.

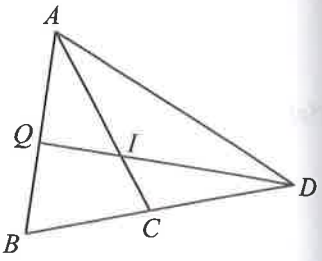
3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\sqrt{3}-3$.



(2p) **a)** Reprezintă graficul funcției f în sistemul de axe ortogonale xOy alăturat.

(3p) **b)** Află valorile numerelor raționale a și b, știind că punctul $P\left(a,\ b+\sqrt{12}\right)$ aparține graficului funcției f.

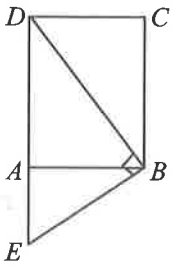
4. În figura alăturată este reprezentat un triunghi isoscel ABC cu baza BC și $\sphericalangle BAC=36°$. Pe dreapta BC alegem punctul D, astfel încât AC este bisectoarea unghiului BAD. Punctul Q este mijlocul AB, iar I este punctul de intersecție a dreptelor AC și QD.



(2p) **a)** Arată că triunghiul BAD este isoscel.

(3p) **b)** Demonstrează că I este centrul cercului înscris în triunghiul ABD.

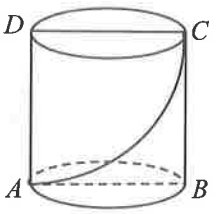
5. În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$. Perpendiculara în B pe BD intersectează prelungirea laturii AD în punctul E. Lungimea laturii AB este de 6 cm, iar lungimea segmentului BE este de $4\sqrt{3}$ cm.



(2p) **a)** Arată că $AE=2\sqrt{3}$ cm.

(3p) **b)** Demonstrează că perimetrul dreptunghiului $ABCD$ este mai mare de 30 cm.

6. Sorin are un recipient cilindric cu diametrul bazei de 7 cm și înălțimea de 12 cm, reprezentat în figura alăturată.



(2p) **a)** Determină până la ce înălțime se ridică apa atunci când turnăm 154 ml de apă în vas. (Se va utiliza valoarea aproximativă $\pi=\dfrac{22}{7}$.)

(3p) **b)** O insectă parcurge drumul minim dintre punctele A și C pe suprafața laterală a cilindrului. Arată că lungimea drumului furnicii, exprimată în centimetri, este un număr din intervalul (16, 17).

✦ TESTUL 76 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Cel mai mare număr de forma $\overline{x1y}$, divizibil cu 4, pentru care $x + y = 10$, este:
a) 918; **b)** 812; **c)** 218; **d)** 416.

(5p) **2.** Dacă $\frac{x+1}{5x+1} = 0,(27)$, atunci valoarea lui x este:
a) 7; **b)** 1; **c)** 2; **d)** 4.

(5p) **3.** Temperaturile înregistrate într-o săptămână din ianuarie, la ora 6^{00}, sunt prezentate în tabelul următor.

Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
−4°C	−6°C	−7°C	−5°C	−3°C	0°C	1°C

Numărul zilelor în care nu au fost înregistrate temperaturi negative este:
a) 1; **b)** 2; **c)** 5; **d)** 3.

(5p) **4.** Scrierea sub formă de interval a mulțimii $M = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < 2x + 1 < 3\}$ este:
a) $(-1, 1)$; **b)** $(-1, 2)$; **c)** $(0, 1)$; **d)** $(0, 2)$.

(5p) **5.** Patru elevi au avut de calculat numărul $xz + xt + yz + yt$, știind că $x + y = \sqrt{5} + 1$ și $t + z = \sqrt{5} - 1$. Rezultatele obținute sunt înregistrate în tabelul următor.

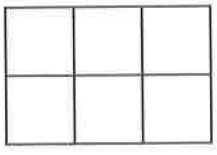
Maria	Cristi	Radu	Eugen
2	$2\sqrt{5}$	−4	4

Numele elevului care a obținut rezultatul corect este:
a) Cristi; **b)** Eugen; **c)** Radu; **d)** Maria.

(5p) **6.** Radu afirmă că mulțimea $\{-1, 0, 1\}$ este o submulțime a mulțimii $\mathbb{N}$. Afirmația lui Radu este:
a) adevărată; **b)** falsă.

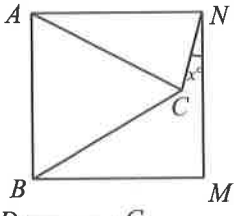
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată este reprezentat un dreptunghi 2×3, împărțit în pătrățele cu latura 1. Numărul pătratelor ce pot fi identificate pe figura dată este egal cu:



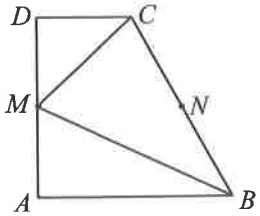
a) 8; **b)** 9;
c) 4; **d)** 5.

(5p) **2.** În figura alăturată, triunghiul echilateral ABC este situat în interiorul pătratului $ABMN$. Măsura unghiului MNC este $x°$. Valoarea lui x este:



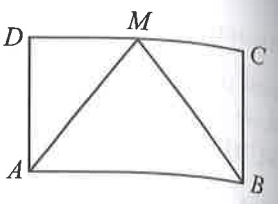
a) 10; **b)** 15;
c) 30; **d)** 75.

(5p) **3.** În trapezul $ABCD$ din figura alăturată, $AB \parallel CD$, punctele M și N sunt mijloacele laturilor neparalele AD, respectiv BC, $AB = 12$ cm, $CD = 8$ cm și măsura unghiului BMC este egală cu 90°. Lungimea segmentului BC este:



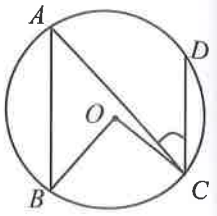
a) 20 cm; **b)** 4 cm;
c) 10 cm; **d)** 16 cm.

(5p) **4.** Dreptunghiul $ABCD$, din figura alăturată, are $AD = 6$ cm, iar bisectoarele unghiurilor A și B se intersectează în punctul M, situat pe latura CD. Aria dreptunghiului este egală cu:



a) 72 cm; **b)** 36 cm^2;
c) 30 cm^2; **d)** 72 cm^2.

(5p) **5.** În cercul de centru O din figura alăturată, AB și CD sunt două coarde paralele, iar măsura unghiului ACD este egală cu 60°. Măsura unghiului BOC este:



a) 180°; **b)** 60°;
c) 30°; **d)** 120°.

(5p) **6.** Dintr-un corp metalic, având formă de piramidă patrulateră regulată cu latura bazei de 4 cm și înălțimea de 6 cm, se obțin, prin topire, cubulețe cu latura de 5 mm. Numărul maxim de cubulețe ce pot fi obținute este:
a) 128; **b)** 256; **c)** 120; **d)** 300.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Aflat în concediu, domnul Ionescu și-a împărțit banii astfel: 40% din sumă pentru cazare, 75% din rest pentru mâncare, iar ceilalți 375 de lei pentru alte cheltuieli.

(2p) **a)** Suma pentru cazare este mai mare decât suma stabilită pentru mâncare? Justifică răspunsul.

(3p) **b)** Determină suma inițială pe care a avut-o domnul Ionescu.

2. Se consideră expresia $E(x) = \dfrac{x+2}{x-1} : \left(\dfrac{1}{x^2-x} - \dfrac{1}{x^2+x} + \dfrac{2}{x^2-1} \right)$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

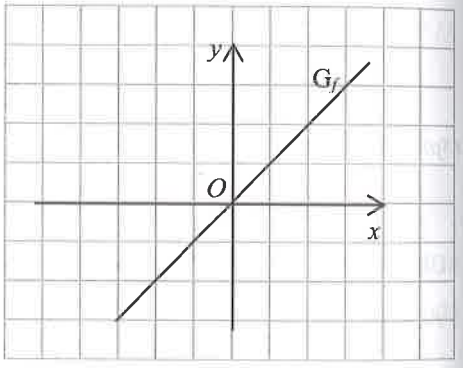
(2p) **a)** Arată că $E(x) = \dfrac{x^2+2x}{2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

(3p) **b)** Determină numerele reale a, pentru care $E(a) = a$.

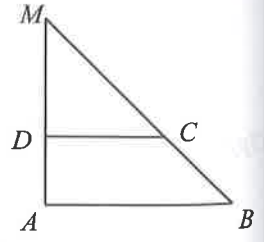
3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$.

(2p) **a)** Calculează $f(-\sqrt{2}) + f(1+\sqrt{2})$.

(3p) **b)** Demonstrează că orice punct situat pe graficul funcției se află la egală distanță față de axele Ox și Oy ale sistemului de coordonate.



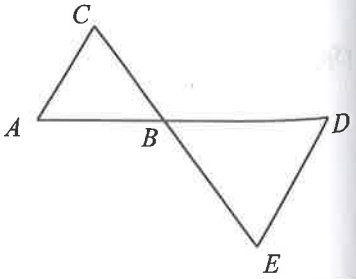
4. În figura alăturată este reprezentat un trapez dreptunghic $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $\measuredangle A = 90°$. Se știe că $AB = 12$ cm, $AD = 3$ cm, iar $\mathcal{A}_{ABCD} = 30$ cm^2. Laturile neparalele AD și BC se intersectează în punctul M.



(2p) **a)** Arată că $DC = 8$ cm.

(3p) **b)** Determină lungimea segmentului MC.

5. În figura alătură sunt reprezentate două triunghiuri echilaterale ABC și BDE. A, B, D sunt puncte coliniare, C și E sunt situate de o parte și de alta a dreptei AD, $AB = 5$ cm și $BD = 10$ cm.



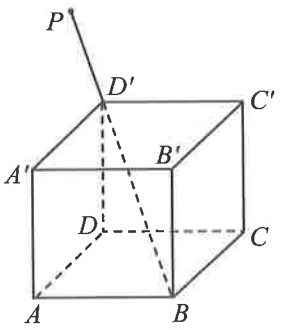
(2p) **a)** Arată că dreptele AC și DE sunt paralele.

(3p) **b)** Determină lungimea segmentului AE.

6. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu muchia $AB = 18$ cm. Prelungim diagonala BD' cu segmentul $D'P$, astfel încât $BD' = 2D'P$, ca în figura alăturată.

(2p) **a)** Arată că lungimea segmentului BP este $27\sqrt{3}$ cm.

(3p) **b)** Află distanța de la punctul P la planul (ABC).



✦ TESTUL 77 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Valoarea numărului natural n pentru care 3^{2n-1} este divizor al numărului 171 este:
a) 1; **b)** 0; **c)** 2; **d)** 3.

(5p) **2.** Dacă numerele $2x + 1$ și $x - 2$ sunt invers proporționale cu numerele 3 și 5, atunci valoarea lui x este:
a) -7; **b)** -13; **c)** 2; **d)** -10.

(5p) **3.** Fie $n = \square 1 \square 2 \square 3 \square 4$. Completând căsuțele cu unul din semnele „+" sau „–", dar fără a avea același semn în toate căsuțele, cea mai mică valoare posibilă a numărului n este:
a) -8; **b)** -10; **c)** -6; **d)** -4.

(5p) **4.** Patru elevi au ordonat descrescător numerele $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{11}{12}$, $z = \frac{7}{8}$ și $t = \frac{5}{6}$. Rezultatele obținute sunt înregistrate în tabelul următor.

Ana	Cătălin	Irina	Sebastian
$y > z > x > t$	$y > x > t > z$	$y > x > z > t$	$y > z > t > x$

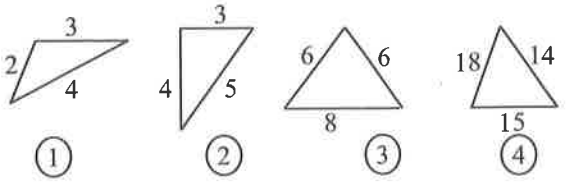
Numele elevului care a scris ordinea corectă este:
a) Cătălin; **b)** Sebastian; **c)** Ana; **d)** Irina.

(5p) **5.** Rezultatul calculului $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$ este numărul:
a) $2\sqrt{3}$; **b)** $\frac{2}{3}$; **c)** $\frac{1}{2}$; **d)** $\frac{1}{\sqrt{12}}$.

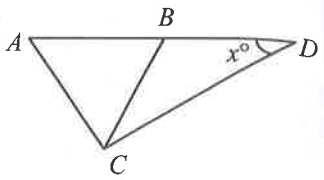
(5p) **6.** Victor merge la înot o dată la două zile, iar Matei o dată la trei zile. Luni, când au ieșit de la piscină, Matei i-a spus că se vor întâlni din nou marțea viitoare. Afirmația lui Matei este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În desenul alăturat sunt reprezentate patru triunghiuri. Singurul triunghi isoscel este cel din figura:
a) (2); **b)** (4);
c) (3); **d)** (1).

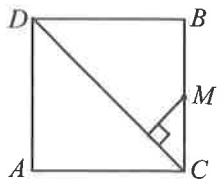


(5p) **2.** În figura alăturată, punctul D este simetricul punctului A față de punctul B, iar triunghiul ABC este echilateral. Măsura unghiului ADC este $x°$. Valoarea lui x este:



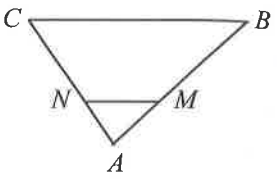
a) 15; **b)** 60;
c) 30; **d)** 40.

(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat un pătrat $ABCD$, având perimetrul egal cu 40 m. Dacă punctul M este mijlocul laturii BC, atunci distanța de la punctul M la dreapta BD este egală cu:



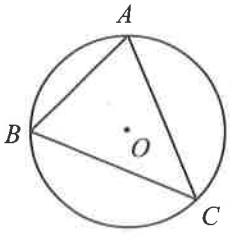
a) 5 m; **b)** $\frac{5}{\sqrt{2}}$ m;
c) $5\sqrt{2}$ m; **d)** 1 m.

(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat un triunghi ABC, în care $AB = 180$ m și dreapta MN este paralelă cu BC, $M \in AB$, $N \in AC$. Dacă aria triunghiului AMN reprezintă 25% din aria triunghiului ABC, atunci distanța dintre punctele A și M este egală cu:



a) 45 m; **b)** 60 m;
c) 90 m; **d)** 30 m.

(5p) **5.** În figura alăturată, triunghiul ABC este înscris în cercul de centru O. Măsurile unghiurilor B și C sunt egale cu 80°, respectiv 30°, iar înălțimea din B intersectează cercul în punctul M. Măsura unghiului AOM este egală cu:



a) 80°; **b)** 40°;
c) 60°; **d)** 70°.

(5p) **6.** Un zar de formă cubică are volumul egal cu 8 cm^3. Aria totală a paralelipipedului obținut prin lipirea a cinci zaruri este egală cu:

a) 88 cm^2; **b)** 120 cm^2; **c)** 80 cm^2; **d)** 100 cm^2.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. În clasa a VIII-a A învață 27 de elevi. 25% din numărul fetelor și 20% din numărul băieților participă la etapa locală a Olimpiadei de matematică.

(2p) **a)** Este posibil ca în clasă să învețe 10 fete? Justifică răspunsul.

(3p) **b)** Câți băieți și câte fete sunt în clasa a VIII-a A?

2. Se consideră expresia $E(x) = (x + 3)^2 - (2x + 1)(x - 7) - (x + 4)(4 - x)$, unde $x \in \mathbb{R}$.

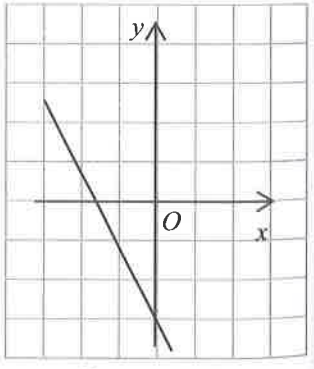
(2p) **a)** Arată că $E(x) = 19x$, pentru orice număr real x.

(3p) **b)** Determină numerele naturale n pentru care $E(n) \geq n^3$.

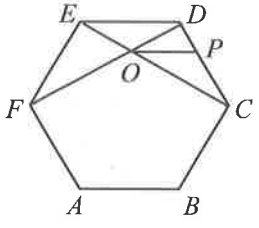
3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2x - 3$.

(2p) **a)** Demonstrează că numărul $f(-2) + f(-3) + ... + f(-10)$ este pătrat perfect.

(3p) **b)** Determină punctele având coordonate egale care sunt situate pe graficul funcției f.



4. În figura alăturată este reprezentat un hexagon regulat $ABCDEF$, având perimetrul egal cu 36 cm. Fie O punctul de intersecție a dreptelor EC și FD, iar dreapta OP este paralelă cu ED, $P \in DC$.



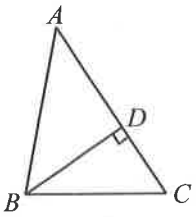
(2p) **a)** Arată că $EC = 6\sqrt{3}$ cm.

(3p) **b)** Determină lungimea segmentului OP.

5. În figura alăturată este reprezentat un triunghi ABC, având $BC = 10$ cm, $AC = 14$ cm și măsura unghiului BAC de $45°$. Înălțimea BD a triunghiului are lungimea de x cm.

(2p) **a)** Arată că $x^2 - 14x + 48 = 0$.

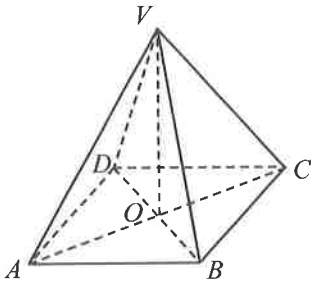
(3p) **b)** Perimetrul triunghiului ABC are cea mai mică valoare posibilă. Determină lungimea laturii AB.



6. În figura alăturată este reprezentat un cort din pânză, având forma piramidei patrulatere regulate $VABCD$, cu muchia bazei $AB = 4$ m și înălțimea $VO = 1{,}5$ m.

(2p) **a)** Fețele laterale ale cortului sunt fabricate din pânză. Care este suprafața de pânză necesară?

(3p) **b)** Află cosinusul unghiului format de planul unei fețe laterale cu planul bazei.



✦ TESTUL 78 ✦

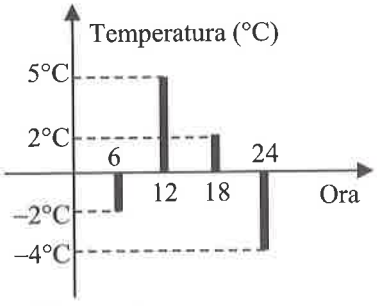
SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Cel mai mic număr natural nenul n pentru care $3^n + 3^{n+1}$ este pătrat perfect este:
a) 4; **b)** 0; **c)** 2; **d)** 1.

(5p) **2.** Tabelul alăturat cuprinde informații referitoare la numărul curselor efectuate și suma finală încasată de patru taximetriști. Persoanele care au același câștig mediu la o cursă sunt:
a) Dan și Robert; **b)** Mihai și Dan;
c) Alex și Mihai; **d)** Alex și Dan.

	Număr curse	Suma finală
Dan	6	120 de lei
Robert	4	90 de lei
Mihai	2	50 de lei
Alex	5	100 de lei

(5p) **3.** La o stație meteo s-au realizat patru măsurători în decursul a 24 h, obținându-se datele din tabelul alăturat. Diferența dintre cea mai mică și cea mai mare dintre valorile înregistrate în tabel este:
a) $-3°C$; **b)** $-9°C$;
c) $3°C$; **d)** $7°C$.



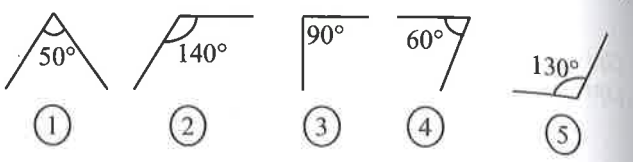
(5p) **4.** Dacă $x = 1{,}0(6)$, atunci numărul dat se scrie sub formă de fracție ireductibilă, astfel:
a) $\frac{48}{45}$; **b)** $1\frac{6}{10}$; **c)** $\frac{16}{15}$; **d)** $\frac{32}{33}$.

(5p) **5.** Numerele raționale a și b verifică relația $a + b\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$. Calculând $a^2 + b^2$, obținem rezultatul:
a) 2; **b)** 0; **c)** 3; **d)** 1.

(5p) **6.** Mașina noastră consumă 6 litri de benzină la 100 de kilometri. După ce a făcut plinul (30 ℓ), tata afirmă că este destul combustibil pentru a parcurge cei 450 km până la mare. Afirmația tatei este:
a) adevărată; **b)** falsă.

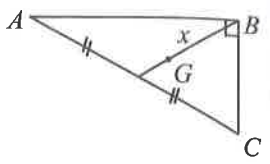
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată sunt reprezentate cinci unghiuri. Suplementul unghiului de la punctul (1) este unghiul de la punctul:



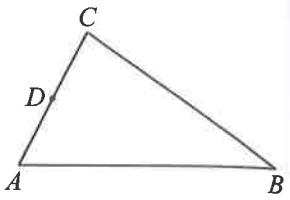
a) (4); **b)** (2);
c) (5); **d)** (3).

(5p) **2.** În figura alăturată, punctul G este centrul de greutate al triunghiului dreptunghic ABC, cu $\measuredangle B = 90°$ și $AC = 18$ cm. Lungimea segmentului BG este x cm. Valoarea lui x este egală cu:



a) 6; **b)** 9;
c) 12; **d)** 3.

(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC, având ipotenuza BA. Dacă $AB = 20$ m, punctul D este mijlocul laturii AC și aria triunghiului ABD este egală cu 60 m^2, atunci distanța de la punctul C la dreapta AB este egală cu:

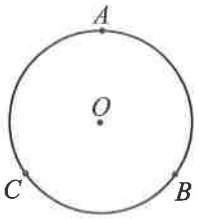


a) 12 m; **b)** 24 m;
c) 6 m; **d)** 10 m.

(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat un teren dreptunghiular cu suprafața de 1 ha. Dacă mărim lungimea cu 10% din ea și micșorăm lățimea cu 10% din ea, obținem un teren cu suprafața egală cu:

a) 10000 m^2; **b)** 10100 m^2;
c) 9900 m^2; **d)** 11000 m^2.

(5p) **5.** În figura alăturată, punctele A, B, C determină pe cercul de centru O trei arce congruente. Măsura unghiului ABO este egală cu:



a) 90°; **b)** 60°;
c) 120°; **d)** 30°.

(5p) **6.** Cu un vas cubic cu latura de 20 cm vrem să cărăm apă pentru a umple un acvariu, având formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 40 cm, 30 cm și 60 cm. Numărul minim de drumuri pe care le vom face pentru a umple acvariul este:

a) 9; **b)** 6; **c)** 4; **d)** 10.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Un număr de 25 de ciocolate și 39 de napolitane trebuie distribuite unor copii în pachete cu același conținut. După ce s-au făcut pachetele s-a observat că au mai rămas trei napolitane și o ciocolată.

(2p) **a)** Este posibil să se facă 4 pachete? Justifică răspunsul.

(3p) **b)** Determină numărul maxim de pachete care se pot face.

2. Se consideră expresia $E(x) = 2(x + 3)^2 - (x - 1)^2 - 5(2x + 3)$, unde $x \in \mathbb{R}$.

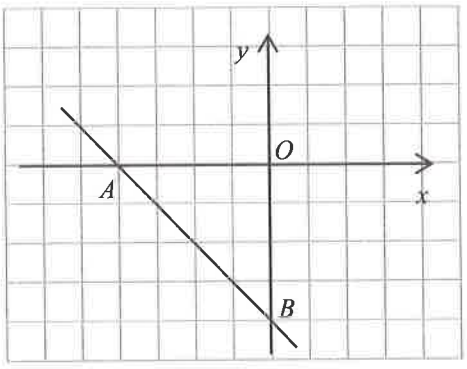
(2p) **a)** Arată că $E(x) = x^2 + 4x + 2$, pentru orice număr real x.

(3p) **b)** Determină valoarea lui x pentru care $E(x)$ are cea mai mică valoare posibilă.

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x-4$.

(2p) **a)** Determină valorile numărului real m, pentru care punctul $M(m^2, 5m)$ aparține graficului funcției f.

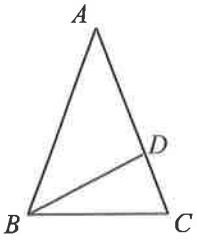
(3p) **b)** Știind că A și B sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox, respectiv Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy, iar P este mijlocul segmentului AB, află lungimea segmentului OP.



4. În figura alăturată este reprezentat un triunghi isoscel ABC cu baza BC și două dintre lungimile laturilor egale cu 10 cm, respectiv 25 cm. Punctul D aparține laturii AC, astfel încât $DC = 4$ cm.

(2p) **a)** Calculează perimetrul triunghiului ABC.

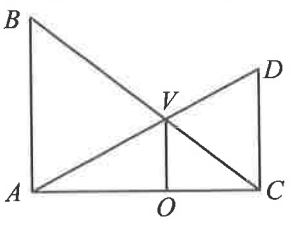
(3p) **b)** Determină lungimea segmentului BD.



5. În figura alăturată este reprezentat schematic un pin VO crescut între două clădiri AB și CD (AB, CD și VO sunt perpendiculare pe linia solului, AC). Punctul V aparține atât dreptei AD, cât și dreptei BC. Înălțimile celor două clădiri sunt $AB = 30$ m și $CD = 20$ m.

(2p) **a)** Arată că $\frac{VO}{AB}+\frac{VO}{CD}=1$.

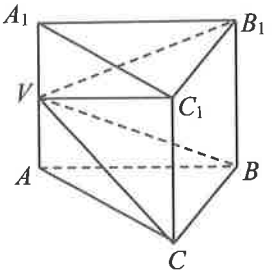
(3p) **b)** Află înălțimea VO a pinului.



6. Dintr-o prismă triunghiulară regulată $ABCA_1B_1C_1$ din lemn, cu toate muchiile de lungime 6 cm, se obține prin prelucrare piramida patrulateră regulată $VBCC_1B_1$ din figura alăturată, unde V este mijlocul muchiei AA_1.

(2p) **a)** Determină volumul de lemn pierdut prin prelucrare.

(3p) **b)** Află măsura unghiului format de două fețe laterale opuse ale piramidei.



✦ TESTUL 79 ✦

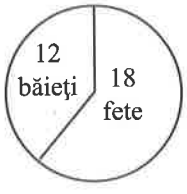
SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Dacă $189 < \overline{xyz} < 200$, atunci valoarea sumei $x + y$ este:

a) 3; **b)** 5; **c)** 10; **d)** 7.

(5p) **2.** Distribuția după gen a elevilor unei clase este cea din diagrama alăturată. Procentul reprezentat de băieți din numărul elevilor clasei este:

a) 12%; **b)** 60%;
c) 40%; **d)** 20%.



(5p) **3.** Probabilitatea ca, la aruncarea unui zar, să obținem pe fața superioară un număr prim este:

a) $\frac{2}{5}$; **b)** $\frac{1}{2}$; **c)** $\frac{1}{3}$; **d)** $\frac{4}{6}$.

(5p) **4.** Valoarea absolută a numărului $x=\left(2\frac{1}{5}-0,7\right):(-0,(3))$ este:

a) $-\frac{1}{2}$; **b)** -2; **c)** $-\frac{9}{2}$; **d)** $\frac{9}{2}$.

(5p) **5.** Numărul întreg n pentru care $n-1<2\sqrt{5}<n$ este:

a) 4; **b)** 3; **c)** 5; **d)** 6.

(5p) **6.** Mihaela face o călătorie cu mocăniţa pe Valea Vaserului. O cursă dus-întors durează şase ore. Plecările sunt din două în două ore, cu începere la ora 9:00, trei curse pe zi. Mihaela ia a doua cursă. Ea afirmă că se va întoarce la ora 17:00. Afirmaţia Mihaelei este:

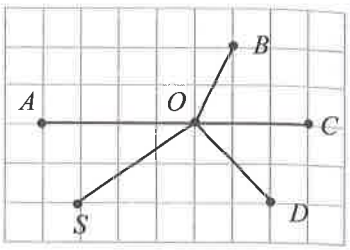
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele A, B, C, D, O şi S. Unghiul AOB este adiacent şi suplementar cu unghiul:

a) $\sphericalangle AOS$; **b)** $\sphericalangle COD$;

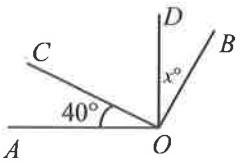
c) $\sphericalangle COB$; **d)** $\sphericalangle AOC$.



(5p) **2.** În figura alăturată, unghiul AOB este obtuz, iar perechile de semidrepte OC şi OB, respectiv OA şi OD, sunt perpendiculare. Măsura unghiului BOD este $x°$. Valoarea lui x este:

a) 90; **b)** 50;

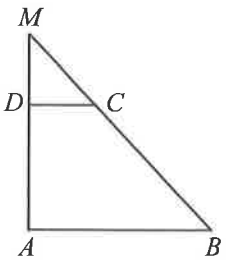
c) 40; **d)** 140.



(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat trapezul dreptunghic $ABCD$, având $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 120$ m, $DC = 80$ m şi $AD = 30$ m. Dacă punctul M reprezintă intersecţia dreptelor AD şi BC, atunci distanţa de la M la DC este:

a) 50 m; **b)** 60 m;

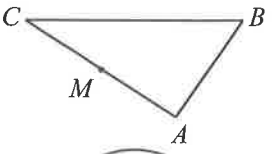
c) 120 m; **d)** 80 m.



(5p) **4.** Figura alăturată reprezintă schiţa unui teren triunghiular ABC cu aria de 6 ha şi lungimea laturii BC de 400 m. Dacă M este mijlocul laturii AC, atunci distanţa de la punctul M la dreapta BC egală cu:

a) 300 m; **b)** 150 m;

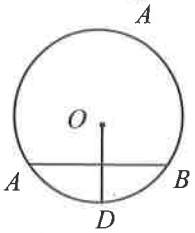
c) 75 m; **d)** 600 m.



(5p) **5.** În figura alăturată, simetricul punctului O faţă de coarda AB a cercului de centru O este punctul D, aparţinând cercului. Măsura arcului BD este egală cu:

a) 160°; **b)** 80°;

c) 20°; **d)** 60°.



(5p) **6.** Un obiect ornamental are forma unei piramide hexagonale regulate cu înălţimea de 9 m şi latura bazei de 12 m. Pe toate muchiile piramidei se fixează bandă autoadezivă. Lungimea minimă a benzii autoadezive necesare este egală cu:

a) 72 m; **b)** 90 m; **c)** 162 m; **d)** 126 m.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Ana își propune să rezolve un set de probleme la matematică într-un anumit număr de zile. Dacă ar rezolva câte patru probleme pe zi, i-ar mai rămâne șase probleme. Dacă ar rezolva câte cinci probleme pe zi, ar termina cu o zi mai devreme decât și-a propus.

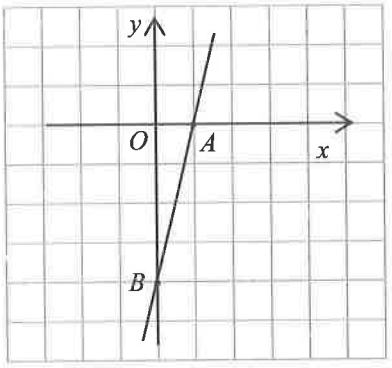
(2p) **a)** Este posibil ca numărul problemelor de rezolvat să fie impar? Justifică răspunsul.

(3p) **b)** Determină numărul de probleme pe care le are de rezolvat Ana.

2. Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}-1\right)\cdot\frac{x^3+x^2}{x^3-x^2+x}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$.

(2p) **a)** Arată că $E(x)=\frac{x+1}{x-1}$, oricare ar fi numărul $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$.

(3p) **b)** Rezolvă, în mulțimea numerelor reale, inecuația $E(x)\geq 1$.

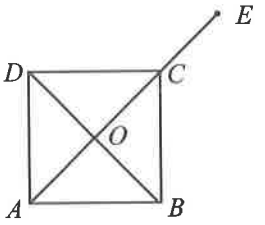


3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-(2-x)^2$.

(2p) **a)** Arată că $f(x)=4x-4$, pentru orice număr real x.

(3p) **b)** Știind că A și B sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox, respectiv Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy, află aria triunghiului OAB.

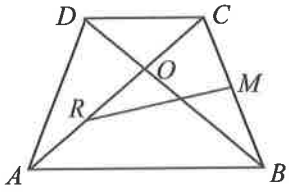
4. În figura alăturată este reprezentat un pătrat $ABCD$ cu $AB=12$ cm, iar O este punctul de intersecție a diagonalelor sale. Notăm cu E simetricul punctului O față de punctul C.



(2p) **a)** Arată că $AE=18\sqrt{2}$ cm.

(3p) **b)** Determină distanța de la punctul E la dreapta AD.

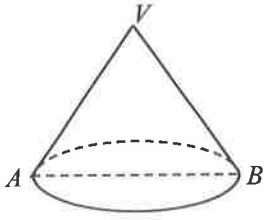
5. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB\parallel CD$, $AB=12$ cm, $CD=6$ cm și $BD=18$ cm. Diagonalele trapezului se intersectează în punctul O, R este mijlocul segmentului AO, iar M este mijlocul segmentului BC.



(2p) **a)** Arată că $OB=12$ cm.

(3p) **b)** Determină lungimea segmentului RM.

6. Un sector de disc, având aria egală cu 75π cm^2 și măsura unghiului la centru $\alpha=120°$, se înfășoară, formând un con, ca în figura alăturată.



(2p) **a)** Arată că înălțimea conului, exprimată în centimetri, este un număr din intervalul $(14, 15)$.

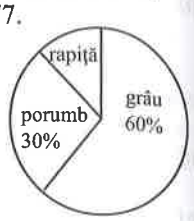
(3p) **b)** Determină sinusul unghiului AVB.

✦ TESTUL 80 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Împărțind pe 87 la n, unde n este un număr natural nenul, $n \leq 50$, obținem restul 10. Valoarea lui n este:
a) 7; **b)** 11; **c)** 1; **d)** 77.

(5p) **2.** Un fermier a cultivat pe terenul său trei tipuri de culturi, ponderea acestora fiind prezentată în diagrama alăturată. Dacă rapița a fost plantată pe 5 ha, atunci suprafața cultivată de fermier este de:
a) 90 ha; **b)** 30 ha;
c) 50 ha; **d)** 100 ha.



(5p) **3.** Fie n un număr întreg negativ. Dacă suma numerelor întregi din intervalul $(n, 0)$ este egală cu -3, atunci valoarea lui n este:
a) -2; **b)** -1; **c)** -4; **d)** -3.

(5p) **4.** Fie n un număr natural, astfel încât fracția $\frac{6}{n-1}$ este număr întreg. Produsul tuturor valorilor lui n care îndeplinesc această condiție este egal cu:
a) 36; **b)** 168; **c)** 0; **d)** 24.

(5p) **5.** Patru elevi au avut de determinat aproximarea prin adaos la cifra sutimilor a numărului $\pi = 3{,}1415\ldots$. Rezultatele obținute sunt înregistrate în tabelul următor.

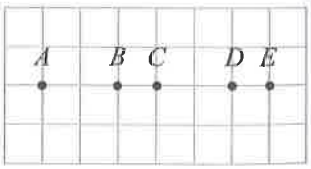
Paul	**Elvira**	**Ștefan**	**Denisa**
3,142	3,2	3,14	3,15

Elevul care a obținut rezultatul corect este:
a) Paul; **b)** Denisa; **c)** Ștefan; **d)** Elvira.

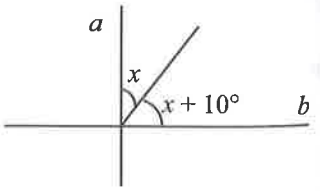
(5p) **6.** Remus afirmă că în intervalul $\left(\sqrt{5}, \sqrt{8}\right)$ nu există numere întregi. Afirmația lui Remus este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

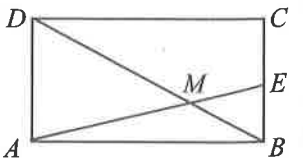
(5p) **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele A, B, C, D și E. Punctul C este mijlocul segmentului:
a) BE; **b)** BD;
c) AE; **d)** DA.



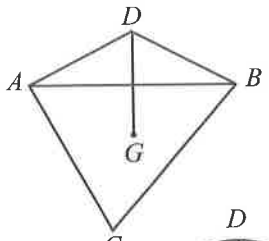
(5p) **2.** În figura alăturată, dreptele a și b sunt perpendiculare. Valoarea lui x este:
a) 90°; **b)** 130°;
c) 40°; **d)** 140°.



(5p) **3.** Figura alăturată reprezintă o rețea de drumuri care unesc localitățile A, B, C, D și E. Punctele A, B, C, D sunt vârfurile unui dreptunghi, E este la mijlocul distanței dintre B și C, iar intersecția drumurilor AE și BD este reprezentată de punctul M. Dacă distanța de la A la M este parcursă la pas în 2 ore, atunci timpul necesar pentru a ajunge la pas din A în E este:
a) 1 h; **b)** 3 h;
c) 4 h; **d)** 30 min.



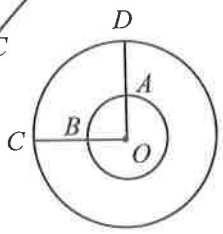
(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat un triunghi ABC, având aria egală cu 300 m^2. Dacă punctul D este simetricul centrului de greutate G față de latura AB, atunci aria patrulaterului $DACB$ este:



a) 400 m^2; **b)** 200 m^2;

c) 350 m^2; **d)** 330 m^2.

(5p) **5.** Cercurile din figura alăturată au același centru O. Dacă $OA = 1$ cm, $OC = 3$ cm și lungimea arcului AB este egală cu $\frac{\pi}{2}$ cm, atunci lungimea arcului CD va fi egală cu:



a) 9π cm; **b)** π cm;

c) 90°; **d)** $\frac{3\pi}{2}$ cm.

(5p) **6.** Numărul de bile metalice cu raza de 1 cm ce trebuie topite pentru a putea obține o bilă cu raza de 1 dm este:

a) 100; **b)** 10; **c)** 1000; **d)** 250.

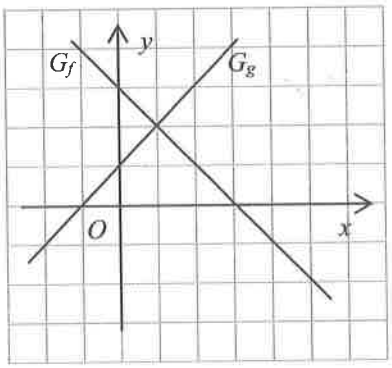
SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Alexandra are câteva nuci. Ea a constatat că dacă le numără câte trei sau câte cinci, îi rămâne câte o nucă, iar dacă le numără câte șapte, obține un număr întreg de grupe.

(2p) **a)** Este posibil ca Alexandra să aibă 31 de nuci? Justifică răspunsul.

(3p) **b)** Determină numărul nucilor Alexandrei, știind că acest număr este cel mai mic posibil.

2. Se consideră expresia $E(x) = x(x-2)^2 - (x-5)\cdot x^2 - 5x + 1$, unde $x \in \mathbb{R}$.



(2p) **a)** Arată că $E(n)$ este număr întreg impar, oricare ar fi numărul întreg n.

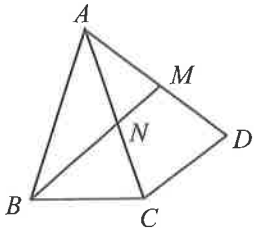
(3p) **b)** Demonstrează că $E(x)\cdot E(-x) \geq 1$, pentru orice număr real x.

3. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x + 3, g(x) = x + 1$.

(2p) **a)** Află coordonatele punctului de intersecție dintre graficele celor două funcții.

(3p) **b)** Determină aria figurii delimitate de cele două grafice și axa absciselor a sistemului de axe ortogonale xOy.

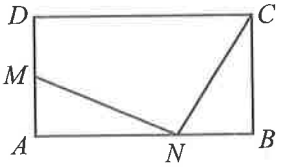
4. În figura alăturată sunt reprezentate două triunghiuri isoscele cu interioarele disjuncte și $AB = AC = AD = 12$ cm. Măsurile unghiurilor BAC și CAD sunt egale cu 30°, punctul M este mijlocul AD, iar punctul N este intersecția dreptelor BM și AC.



(2p) **a)** Arată că $BM \perp AD$.

(3p) **b)** Demonstrează că lungimea segmentului NC este mai mare de 5 cm.

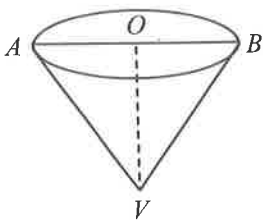
5. O grădină are forma dreptunghiului $ABCD$ din figura alăturată. Punctul M este mijlocul laturii AD, iar punctul N aparține laturii AB, astfel încât $AN = 2NB$.



(2p) **a)** Arată că triunghiurile BCN și AMN au ariile egale.

(3p) **b)** Dacă $\mathcal{A}_{AMN} = 60$ m^2, află suprafața grădinii.

6. La un atelier, dintr-o bucată de tablă, având forma unui sector de disc cu unghiul la centru $\alpha = 216°$, se obține o pâlnie conică cu înălțimea $VO = 24$ cm, ca în figura alăturată.



(2p) **a)** Arată că suprafața bucății de tablă este mai mare de 1690 cm^2.

(3p) **b)** Determină distanța de la punctul A la dreapta VB.

SOLUȚII

TEME RECAPITULATIVE

TEMA 1. Numere naturale. Numere întregi

1. a) 50; b) 21; c) 2; d) 27. **2.** 45. **3.** Valoarea minimă este 0, iar valoarea maximă este 30. **4.** $n \in \{60, 61, 64, 69\}$. **5.** 1077, 1087. **6.** $a = 15$, $b = 4$. **7.** $a = 20$, $b = 60$, $c = 422$. **8.** 283. **9.** a) 16; b) 0; c) 7; d) 28; e) 32; f) 54; g) 7; h) 12. **10.** b) $a = 2^{30} = 8^{10} < 9^{10} = 3^{20} = b$. **11.** a) $a = (2 \cdot 3^{21})^2$; b) Cum ultima cifră a numărului b este 7, rezultă că b nu este pătrat perfect. **12.** a) Numărul a este suma a 12 numere impare, deci este un număr par; b) $a = (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) + (3^8 + 3^9 + 3^{10} + 3^{11}) = 40(1 + 3^4 + 3^8) \vdots 10$. **13.** $a = 12 \cdot 14^n \vdots 12$. **14.** $\overline{abcd} = 100\,\overline{ab} + \overline{cd} = 300\,\overline{cd} + \overline{cd} = 7 \cdot 43 \cdot \overline{cd} \vdots 7$. **15.** $p = 2$, $q = 3$, $r = 7$. **16.** a) $56 = 2^3 \cdot 7$, $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $144 = 2^4 \cdot 3^2$, $2700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$; b) 10 divizori naturali. **17.** a) $n \in \{70, 72, 74, 76, 78\}$; b) $n \in \{630, 612, 684, 666, 648\}$; c) $n \in \{252, 552, 852, 156, 456, 756\}$; d) $n \in \{170, 125\}$. **18.** (48, 60) = 12, [48, 60] = 240; b) (12, 15, 18) = 3, [12, 15, 18] = 180. **19.** Fie x numărul maxim de pachete. Atunci, cum 168, 96 și 72 trebuie să se dividă cu x, rezultă că x este cel mai mare divizor comun al numerelor 168, 96, 72, adică $x = 24$. **20.** Fie x numărul florilor din florărie. Din relațiile $x = 18a + 3 = 24b + 3$ ($a, b \in \mathbb{N}$), deducem că $x - 3 = 72k$ sau $x = 72k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$). Cum $450 < 72k + 3 < 570$, rezultă că $x = 72 \cdot 7 + 3 = 507$. **21.** Fie x numărul de sportivi. Avem $x = 6a + 3 = 5b + 1 = 9c + 6$, deci $x + 3 = 6(a + 1) = 4(b + 1) = 9(c + 1)$ ($a, b, c \in \mathbb{N}$). De aici rezultă că $x + 3 = 36k$ ($k \in \mathbb{N}$) și, cum $x + 3 < 53$, deducem că $x = 33$. Numărul maxim de grupe este 11, iar numărul de sportivi dintr-o grupă este 3. **22.** Fie a numărul CD-urilor de 54 de lei și b numărul CD-urilor de 90 de lei cumpărate de Sanda. Avem $54a + 90b = 486$ sau $3a + 5b = 27$. Cum 3 divide pe $3a$ și pe 27, rezultă că 3 divide pe $5b$. De aici, având în vedere că $0 < b < 6$, rezultă că $b = 3$. Deci, $a = 4$ și $b = 3$. Sanda a cumpărat 7 CD-uri. **23.** a) $-7 < -3 < -2 < 0 < 1 < 4 < 9$; b) $7 > 3 > 1 > -1 > -2 > -4 > -5$. **24.** $-8 = (-8) + (-1) + (+1)$. **25.** a) –3; b) 1; c) 5; d) 1; e) –1; f) 21; g) 3; h) 11. **26.** –17°C. **27.** Divizorii întregi ai numărului 288 sunt –1, 1, –2, 2, –3, 3, ... Suma lor este 0. **28.** $(x + 1) \mid (2x + 5) \Leftrightarrow (x + 1) \mid ((2x + 5) - 2(x + 1)) \Leftrightarrow (x + 1) \mid 3 \Leftrightarrow x + 1 \in \{-3, -1, 1, 3\} \Leftrightarrow x \in \{-4, -2, 0, 2\}$. **29.** $|x| > 3 \Leftrightarrow x \in \{..., -6, -5, -4, 4, 5, 6, ...\}$; $|x + 1| \leq 6 \Leftrightarrow x + 1 \in \{-6, -5, -4, ..., 4, 5, 6\} \Leftrightarrow x \in \{-7, -6, -5, -4, -3, ..., 3, 4, 5\}$. Deci, $x \in \{-7, -6, -5, -4, 4, 5\}$. **30.** $(x + 1)(y + 1) = 5 \Leftrightarrow (x, y) \in \{(-6, -2), (-2, -6), (0, 4), (4, 0)\}$.

TEMA 2. Numere raționale

1. a) 1; b) 1; c) –2; d) 1; e) $-\frac{1}{12}$; f) 2; g) 14; h) $\frac{5}{6}$. **2.** a) $n \in \{0, 1, 2\}$; b) $n = 3$; c) $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. **3.** Opusul lui a este $-a = 1{,}25$. Inversul lui a este $\frac{1}{a} = -\frac{4}{5}$. Modulul lui a este $|a| = 1{,}25$. **4.** $\frac{6}{15} = 0{,}4$; $\frac{11}{5} = 5{,}5$; $\frac{1}{625} = 0{,}0016$. **5.** a) $-\frac{5}{4} < -\frac{1}{2} < -0{,}(4) < 1{,}1(3) < \frac{4}{3} < 1{,}7$; b) $0{,}(3) > 0{,}33 > 0{,}(32) > 0{,}3(2) > 0{,}3 > 0{,}2(3)$. **6.** $\left[\frac{23}{4}\right] = 5$, $\left\{\frac{23}{4}\right\} = 0{,}75$, $\left[-\frac{9}{5}\right] = -2$, $\left\{-\frac{9}{5}\right\} = 0{,}2$. **7.** $A \cap \mathbb{N} = \{2; 5\}$, $A \cap \mathbb{Z} = \{-7; 2; 5\}$, $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) = \left\{-\frac{23}{3}; -3{,}4; 0{,}5; 1{,}(2)\right\}$. **8.** $a = 5$; $b = 1$. **9.** $(a - 2)^{10} = (1 - 2)^{10} = 1$. **10.** $a = 10 \in \mathbb{N}$. **11.** $a = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) = \frac{9}{10} = 0{,}9$. **12.** $\left(\frac{2a}{3}\right)^{100} = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)^{100} = 1$. **13.** $\frac{12}{7}$. **14.** Dacă n este impar, atunci $a = -\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6} = -\frac{3}{4}$, iar dacă n este par, atunci $a = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{3}{4}$. Prin urmare, $|a| = \frac{3}{4}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. **15.** $9x = 9 \cdot \frac{10}{9} = 10 \in \mathbb{N}$. **16.** Avem $\frac{48}{5} \cdot \frac{a}{b} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow b \mid 48$

și $5 \mid a$ și $\frac{36}{7}\cdot\frac{a}{b} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow b \mid 36$ și $7 \mid a$. cum $\frac{a}{b}$ este cea mai mică fracție cu proprietățile date, rezultă că a este minim și b este maxim, deci $a = [5, 7] = 35$ și $b = (48, 36) = 12$. Fracția căutată este $\frac{35}{12}$. **17.** $\frac{3}{4}$. **18.** Fie x numărul fetelor (băieților) din școală. Atunci numărul fetelor plecate în excursie este $\frac{3x}{4}$, iar cel al elevilor plecați în excursie este $\frac{3x}{4}+\frac{2x}{3}=\frac{17x}{12}$. Raportul cerut este $\frac{3x}{4}:\frac{17x}{12}=\frac{9}{17}$. **19.** a) $\frac{17}{90}$; b) $\frac{5}{36}$. **20.** m = 24 ani. **21.** $m=\frac{6\cdot6+1\cdot7+5\cdot8+5\cdot9+11\cdot10}{6+1+5+5+11}=8{,}50$. **22.** $p=\frac{20\cdot20+5\cdot24+15\cdot16}{20+5+15}=19$ lei. **23.** $m_s = 7{,}60$; $m=\frac{3\cdot7{,}6+8}{3+1}=7{,}70$. Elevul are media semestrială 8. **24.** 544 m. **25.** 12 lei și 50 de bani. **26.** Aurel are 50 de lei și 50 de bani, iar Bogdan are 40 de lei. **27.** Fie x numărul de fete înscrise la club. Din relația $2x+4\cdot\frac{10x}{13}=990$ obținem $x = 195$. Numărul cailor este egal cu 150, deci 45 de fete trebuie să stea pe margine la începerea unei lecții de echitație. **28.** 96 km. **29.** 405 pagini. **30.** Împărțim fiecare pâine în trei felii egale și notăm una dintre aceste felii cu f. Astfel, Andrei are $6f$, Barbu are $9f$ și fiecare dintre cei trei colegi mănâncă $15f : 3 = 5f$. Deci, Călin a mâncat de la Andrei o felie și de la Barbu patru felii, ceea ce înseamnă că Andrei trebuie să primească $\frac{1}{5}\cdot 10 = 2$ lei, iar Barbu trebuie să primească $\frac{4}{5}\cdot 10 = 8$ lei.

TEMA 3. Rapoarte. Proporții. Procente

1. 21 de băieți. **2.** 24 cm^2. **3.** $\frac{9}{25}$. **4.** 1 : 12 500 000. **5.** $\frac{2x+3y}{3x+5y}=\frac{13}{21}\Leftrightarrow 4x+63y=39x+65y\Leftrightarrow 3x=2y\Leftrightarrow\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$. **6.** a) 16, 20, 32; b) 42, 21, 14. **7.** 60 de lei, 80 de lei, 100 de lei, 120 de lei. **8.** 225 m^2, 625 m^2. **9.** a) $y = 75\%z$; b) $x = 18$, $y = 27$, $z = 36$. **10.** $(x, y, z) \in \{(-8; -12; -15), (8; 12; 15)\}$. **11.** Fie x, y, z cele trei numere căutate. Din enunțul problemei rezultă că $\frac{x}{\frac{16}{3}}=\frac{y}{\frac{15}{4}}=\frac{z}{\frac{11}{7}}$ sau $\frac{x}{448}=\frac{y}{315}=\frac{z}{132}$. Cum $(448, 315, 132) = 1$, deducem, din relația precedentă, că $x = 448$, $y = 315$ și $z = 132$. **12.** 15 cărți, 10 cărți, 5 cărți. **13.** 24, 16, 12. **14.** 800 km. **15.** a) $\frac{2x+2z}{5y+z}=\left(\frac{4}{5}\right)^2$; c) $x = 9$, $y = 12$, $z = 15$. **16.** a) $n = 42$; b) 0. **17.** a) 50%; b) $a = 80$, $b = 60$, $c = 100$. **18.** a) 27 de lei; b) 30 de lei. **19.** 30 elevi. **20.** 80 m^2. **21.** a) 1920 de lei; b) 2400 de lei. **22.** a) 600 de lei; b) 32%. **23.** $f = 12$, $b = 16$. **24.** Fie f numărul fetelor din clasă. Atunci numărul băieților este $\frac{f}{4}$. Din relația $\frac{f:4}{f+f:4}=\frac{p}{100}$, rezultă că $p = 20$. Procentul căutat este 20%. **25.** 180, 90. **26.** 24 de mere. **27.** 54%. **28.** Fie S (lei) suma investită. Din relația $\frac{3S}{8}\cdot\frac{15}{100}\cdot\frac{1}{12}+\frac{5S}{8}\cdot\frac{32}{100}\cdot\frac{1}{12}=410$, rezultă $S = 19200$ (lei). **29.** Fie x prețul de achiziție a întregii cantități de cireșe. Atunci profitul magazinului este $\frac{30}{100}\cdot\frac{x}{2}-\frac{20}{100}\cdot\frac{x}{2}=\frac{5}{100}x=5\%x$. Profitul obținut este de 5%. **30.** Presupunem că toate biletele aveau la început același preț, p lei. Notăm cu s numărul spectatorilor, atunci când un bilet costa p lei. Din relația $(140\%p)(x\%s) = 126\%ps$, obținem $x = 90$. Deci, numărul spectatorilor a scăzut cu 10%.

TEMA 4. Numere reale

1. a) 8; b) 35; c) 13; d) 2; e) 2; f) 17; g) 6; h) 60. **2.** a) 5; b) –5. **3.** a) 0; b) 0; c) –4; d) $-2-3\sqrt{6}$. **4.** a) $\frac{\sqrt{10}}{5}$; b) 5; c) 0,5; d) 4. **5.** a) 4; b) 3; c) $24\sqrt{2}$; d) $6-2\sqrt{6}$. **6.** a) 0,8; b) 1; c) 0,5; d) $\sqrt{2}$. **7.** $x = 10$. **8.** $x = -1$. **9.** a) $x \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$; b) $x \in$

$\in \{-\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\}$. **10.** a) $x \in \{-4\sqrt{3}, 4\sqrt{3}\}$; b) $x = 9$. **11.** a) $b > a > c$; b) $b < c < a$. **12.** a) $\sqrt{18}$; b) $-\sqrt{36}$. **13.** P_1 este falsă $\left((-\sqrt{2})+\sqrt{2}=0\in\mathbb{Q}\right)$, iar P_2 este adevărată. **14.** a) 2,5; b) $\sqrt{2}$; c) $2=3+(-1)=4\cdot\frac{1}{2}$; d) $2=(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})=$ $=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$. **15.** a) $\sqrt{1}+\sqrt{4}+\sqrt{9}+...+\sqrt{100}=55$; b) Sunt 26 de numere: $\sqrt{1}, \sqrt{2}, ..., \sqrt{26}$. **16.** $A = [0, 3]$; b) $B = (-\infty, -2)$; c) $C = [-1, 3)$; d) $D = (-2, 4)$. **17.** a) $A = (-5, 2)$, $B = [1, 8]$; b) $A \cup B = (-5, 8]$, $A \cap B = [1, 2)$, $A \setminus B = (-5, 1)$. **18.** a) $A \cup B = \mathbb{R}$; b) $A \cup B = [0, +\infty)$; c) $A \cup B = (-\infty, 3]$; d) $A \cup B = (-4, 4]$. **19.** a) $A \cap B = \{0, 1, 2\}$; b) $A \cap B = \{-4, -3, -2, -1\}$; c) $A \cap B = [-1, 5]$; d) $A \cap B = [0, 6)$. **20.** a) 0; b) $2\sqrt{3}$. **21.** a) $a \cdot b = 1$; $a^2 + b^2 = 6$; b) $m_a = \sqrt{2}$; $m_g = 1$. **22.** a) $a = 12$, $b = 3$, b) $m_a(a, b) - m_g(a, b) = 7{,}5 - 6 = 1{,}5$. **23.** a) $a = 1 \in \mathbb{Q}$, $b = -0{,}5 \in \mathbb{Q}$; b) $m_p = \sqrt{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt{10}}{4} > \frac{1}{4} = \frac{a+b}{2} = m_a$.

24. a) $m_g = \sqrt{ab} = 1$; b) $a = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{4}+\sqrt{3})} < 1 < \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{4}+\sqrt{3})}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = b$. **25.** a) $\left(2\sqrt{2}-3\right)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 -$ $- 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3 + 3^2 = 17 - 12\sqrt{2}$; b) $x \in \{2\sqrt{2}-3, 3-2\sqrt{2}\}$. **26.** a) $(a+b)^2 = 4+2\sqrt{2}$; b) $\frac{b}{a} - \sqrt{2} = 1 \in \mathbb{Q}$. **27.** $a = 10 +$ $+ 2\sqrt{2} \in (12, 13)$. **28.** a) $x \in [-1, 1] \Rightarrow x - 1 \le 0$ și $x + 1 \ge 0 \Rightarrow E(x) = 1 - x + x + 1 = 2$; b) Deoarece $|a| + |b| \ge |a + b|$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$, rezultă că $E(x) = |1 - x| + |x + 1| \ge |(1 - x) + (x + 1)| = 2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. **29.** a) $x \in [-2, 1] \Rightarrow$ $\Rightarrow 2x \in [-4, 2] \Rightarrow -2x \in [-2, 4] \Rightarrow 3 - 2x \in [1, 7]$. Valoarea cea mai mică este 1, iar valoarea cea mai mare este 7; b) $x \in [-1, 1], y \in [-1, 3] \Rightarrow 2x \in [-4, 2], 3y \in [-3, 9] \Rightarrow 2x + 3y \in [-7, 11]$. **30.** a) Dacă $y \neq 0$, $\frac{x}{y} = -\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, fals. Deci, $y = 0$ și atunci, cum $x + y\sqrt{2} = 0$, avem și $x = 0$; b) Relația din enunț este echivalentă cu $(x + y - 2) + (2x + y -$ $- 4)\sqrt{2} = 0$, de unde, conform rezultatului de la subpunctul a), rezultă că $x + y - 2 = 0$ și $2x + y - 4 = 0$, deci $x = 2$, $y = 0$.

TEMA 5. Calcul algebric

1. a) $a^2 - a - 1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1 = 0$; b) -1. **2.** a) Pentru x dat, $a = \frac{x-5}{2}$ și $b = \frac{x-7}{3}$. De exemplu, pentru $x = 7$ se obțin $a = 1$ și $b = 0$; b) $E = x^2 - 2ax - 3bx + 6ab = x(x - 2a) - 3b(x - 2a) = (x - 2a)(x - 3b) = 5 \cdot 7 = 35$. **3.** a) $(a, c) \in \{(6, 2),$ $(15, 1), (24, 0)\}$; b) $n = (b - 6c)^2$. **4.** a) $a^2 - 2a - 1 = 3 - 2\sqrt{2} - 2(1 - \sqrt{2}) - 1 = 0$; b) Folosind a) obținem $a^2 = 2a + 1$, $a^3 = 2a^2 + a = 5a + 2$ și $a^4 = 5a^2 + 2a = 12a + 5$. Astfel, $E(a) = 12a + 5 - 5(5a + 2) + 2(2a + 1) + 9a + 4 = 1 \in \mathbb{Z}$. **5.** a) $E(x) = x^2 + 6x + 9$, deci $E(-5) = 4$; b) $E(n) = (n + 3)^2$. **6.** a) $b = -5$; b) $175 = (5a - 3b)(5a + 3b) = (-5)(5a + 3b)$, deci $5a + 3b = -35$ și $15a + 9b + 100 = 3(5a + 3b) + 100 = 3 \cdot (-35) + 100 = -5$. **7.** a) $n = x^2 - 5x + 7x - 35 = x(x - 5) +$ $+ 7(x - 5) = (x - 5)(x - 7)$; b) Pentru ca $n = (x - 5)(x + 7)$ să fie număr prim este necesar ca unul dintre factori să fie 1 sau -1. Prin verificare, n este prim pentru $x = -8$ sau $x = 6$. **8.** a) $\overline{a6}\cdot\overline{a8}+1 = (\overline{a7}-1)(\overline{a7}+1) + 1 = \overline{a7}^2$; b) $E =$ $= \overline{a7} - \overline{a4} = 3$. **9.** a) Dacă $a + b = 3$, atunci $b = 3 - a$ și $E(a, b) = -a^2 - 5(3 - a)^2 - 6a(3 - a) + 6(3 - a) - 6a + 9 = -18$; b) $S = -18 + (-18) + ... + (-18) = 11 \cdot (-18) = -198$. **10.** a) $(2x - 1)(3y + 2) - 17 = 6xy + 4x - 3y - 2 - 17 = 6xy + 4x -$ $- 3y - 19$; b) Alegem a, b astfel încât produsul numerelor $2a - 1$ și $3b + 2$ să fie un număr natural cel puțin egal cu 17. Exemplu: $2a - 1 = 9\sqrt{2}$, $3b + 2 = \sqrt{2}$ și $E(a, b) = 9\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 17 = 1$. Astfel, spre exemplu, $a = \frac{9\sqrt{2}+1}{2}$ și $b =$ $= \frac{\sqrt{2}-2}{3}$. **11.** a) $4E(x) = 4x^2 - 4x - 8 = (4x^2 - 4x + 1) - 9 = (2x - 1)^2 - 9$; b) Cum $4E(x) \ge -9$ și $E\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4}$, rezultă că $\min E(x) = -\frac{9}{4}$. **12.** a) -35; b) $a(n) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. Cum $n(n - 1)$ se divide la 2 și $n(n - 1)(n - 2)$ se divide la 3, rezultă concluzia. **13.** a) Dacă $a + b\sqrt{2} = r \in \mathbb{Q}$ și $b \neq 0 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{r-a}{b} \in \mathbb{Q}$, contradicție. Prin urmare, $b = 0$;

b) $\frac{n}{10}(\sqrt{2}+1)^2+(-1)^n(\sqrt{2}-1) = \frac{3n}{10}-(-1)^n+\left[\frac{n}{5}+(-1)^n\right]\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ pentru $\frac{n}{5}+(-1)^n = 0$, deci $n = 5$. **14.** a) $E(x) = (x+2)^2 + 1 \geq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$; b) Cum $E(x) \geq 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, egalitatea $E(a) + E(b) + E(c) = 3$ are loc numai dacă $E(a) = E(b) = E(c) = 1$, deci $a = b = c = -2$. **15.** a) $(x-\sqrt{2})^2 = x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 = x^2 - x\sqrt{8} + 2$; b) Scriem ecuația sub forma $(x-\sqrt{2})^2+(3y+1)^2 = 0$. Obținem $x = \sqrt{2}$, $y = -\frac{1}{3}$. **16.** a) Nu; b) Condiția dată este echivalentă cu $10a^2 + 2ab = 132$, deci $b = \frac{132-10a^2}{2a}$ și cum $a \in \{1, 2, 3, ..., 9\}$, rezultă că $a = 3$, $b = 7$. **17.** a) $E(x) = \sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{(x-3)^2} = |x-1| - |x-3|$, deci $E(-2) = 3 - 5 = -2$; b) Pentru $x \geq 3$, $E(x) = (x-1) - (x-3) = 2$. **18.** a) $(x^2+2x+3)^2 - 5(x^2+2x) - 9 \overset{x^2+2x=y}{=} (y+3)^2 - 5y - 9 = y^2 + y = y(y+1) = (x^2+2x)(x^2+2x+1) = x(x+1)^2(x+2)$, $x^3+3x^2+2x = x^3+x^2+2x^2+2x = x^2(x+1)+2x(x+1) = x(x+1)(x+2) \Rightarrow E(x) = x+1$; b) Pentru $a = 2021$, $n = E(a)^2 - E(a-1) \cdot E(a+1) = (a+1)^2 - a(a+2) = 1$. **19.** a) $E(x) = \frac{-x}{1+x} \cdot \frac{1+x}{x(2x+1)} \cdot \frac{(2x+1)^2}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{1}{1-2x}$; b) $S = (1-2\cdot 1) + (1-2\cdot 2) + ... + (1-2\cdot 10) = 10 - 2\cdot(1+2+...+10) = -100$. **20.** a) $2x^2 + x - 6 = 2x^2 + 4x - 3x - 6 = 2x(x+2) - 3(x+2) = (x+2)(2x-3)$; b) $E(x) = \left(\frac{x-6}{x^2-25}+\frac{x}{x-5}-\frac{2}{x+5}\right) \cdot \frac{x^2-25}{2x^2+x-6} = \frac{(x+2)^2}{(x+2)(2x-3)} = \frac{x+2}{2x-3}$. **21.** a) $(x-3)^3 - x + 3 = (x-3)[(x-3)^2 - 1] = (x-4)(x-3)(x-2)$; b) $E(n) = n - 3 \in \mathbb{N}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. **22.** a) $E(x) = \frac{3x}{x^2-9} \cdot \frac{(x+3)(x-1)}{3(x-1)} = \frac{x}{x-3}$; b) $n \in \{0, 4, 6\}$. **23.** a) $E(x) = \frac{1}{2(x-2)}+\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x^2-4} = \frac{3x-6}{2(x^2-4)} = \frac{3}{2(x+2)}$; b) $a = 4$. **24.** a) $E(x) = \frac{3x+9}{(x+1)(x+4)} \cdot \frac{x+1}{(x+3)^2} = \frac{3}{(x+3)(x+4)}$; b) $a = \frac{3}{3\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 5}+...+\frac{3}{8\cdot 9}+\frac{1}{3} = 3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right) + \frac{1}{3} = 3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{3} = 1$. **25.** a) $E(x) = \frac{x^2+3x}{x^2-1} \cdot \frac{(x+1)^2}{2(x^2+3x)} = \frac{x+1}{2(x-1)}$; b) $E(x) \cdot E(-x) = \frac{1}{4}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 0, 1\}$. **26.** a) $E(x) = \frac{1}{x(x+1)} \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{2(x+1)}$; b) $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. **27.** a) $E(x) = \left(1-\frac{x+1}{x+3}\right)^2 \cdot \frac{(x+1)(x+3)}{4} = \frac{x+1}{x+3}$; b) $a = \frac{1}{105} < 0{,}01$. **28.** a) $E(x) = \frac{x(x-6)}{x^2-4} \cdot \frac{x(x^2-4)}{x-6} = x^2$; b) Condiția este echivalentă cu $(a+b+1)^2 + a^2 - 2b = 0$ sau $(a+b)^2 + (a+1)^2 = 0$. Deducem $a + b = 0$ și $a + 1 = 0$, de unde obținem $a = -1$, $b = 1$. **29.** a) $E(x) = \left[\frac{x-1}{x^2+1}+\frac{2x}{(x-1)(x^2+1)}\right] \cdot (x+1) = \frac{x+1}{x-1}$; b) Căutăm $a \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $E(a) = n$, $n \in \mathbb{N}$, deci $a = \frac{n+1}{n-1}$. Numărul natural n trebuie ales astfel încât a să aparțină mulțimii $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Exemplu: $n = 4$, $a = \frac{5}{3}$. **30.** a) $F(x) = \frac{x+8}{9}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$; b) $a = F(10^n) = \frac{10^n+8}{9}$ și cum $10^n + 8 = 10...08$ se divide cu 9, numărul a este natural.

TEMA 6. Funcții

1. a) $f(3) = -3$; $f(-3) = -6$; $f(0) = 2$; $f(2) = -2$; b) A, B, C nu sunt situate pe graficul funcției f; D este situat pe graficul funcției f. **2.** a) f, g au același domeniu de definiție: $\{-1, 0, 1\}$, același codomeniu: $[0, +\infty)$, iar $f(-1) = g(-1)$, $f(0) = g(0)$ și $f(1) = g(1)$. În concluzie, f și g sunt egale; b) f, h au același domeniu de definiție, același codomeniu, dar $f(-1) \neq h(-1)$, prin urmare funcțiile f și h nu sunt egale. **3.** a) $\text{Im}\, f = \left\{f(-\sqrt{3}), f(-\sqrt{2}), f(-2), f(-1), f(-\sqrt{3}-\sqrt{2})\right\} =$

$= \{-3+\sqrt{6}, 0, -2\sqrt{3}+\sqrt{6}, -\sqrt{3}+\sqrt{6}, -3\}$; b) -3; $-\sqrt{3}+\sqrt{6}$. **4.** a) Deoarece $f\left(-\frac{4}{5}\right) = 0$, rezultă că $P = 0$; b) $\frac{6}{f(n)}$ este număr întreg dacă $5n + 4$ este divizor al numărului 6, deci $n \in \mathbb{Z}$ și $5n + 4 \in \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$. Obținem $n \in \{-2, -1\}$. **5.** a) $a = 2\sqrt{2} - 1$, $b = 2\sqrt{2} + 1$ și $m_g = \sqrt{7}$; b) $A = 2(1 + 2 + ... + 20) - 20 = 400 = 20^2$. **6.** a) Pentru $x = 1$, condiția problemei devine $f(2) = 6 - f(2)$ și de aici $f(2) = 3$; b) Înlocuind pe x cu $x - 1$, condiția devine $f(x - 1 + 1) = 2(x - 1) + 4 - 3$, deci $f(x) = 2x - 1$. **7.** a) $f(2a - 1) = a - 2 \Rightarrow -2(2a - 1) + 1 = a - 2 \Rightarrow a = 1$; b) $S = -2(1 + 2 + 3 + ... + 2021) + 2022 = -2020 \cdot 2022$. **8.** a) $f(1) = 2$ și $f(7) = 17$, deci $A, B \in G_f$; b) Punctele de coordonate întregi situate pe segmentul închis AB sunt punctele $M(x, y)$, $y = \frac{5}{2}x - 0{,}5$, cu $x, y \in \mathbb{Z}$ și $x \in [1, 7]$, adică $M_1(1, 2)$, $M_2(3, 7)$, $M_3(5, 12)$, $M_4(7, 17)$. **9.** a) $m_g = 1$; b) Fie $M(x, y)$ punctul căutat. Rezultă că $f(x) = y$ și $|y| = 5 \Rightarrow y = -2x + 3$ și $|y| = 5 \Rightarrow |-2x + 3| = 5$, deci $-2x + 3 \in \{-5, 5\}$. Deducem $x = 4$ sau $x = -1$ și găsim punctele $M_1(4, -5)$ și $M_2(-1, 5)$. **10.** a) Fie $M(x, y)$ cu proprietatea cerută. Rezultă că $|x| = 3$ și $y = 2x - 1$, deci $x = 3$, $y = 5$ și $A(3, 5)$ sau $x = -3$, $y = -7$ și $B(-3, -7)$; b) $AB = 6\sqrt{5}$. **11.** a) Graficul funcției f este dreapta AB, unde $A(0, -5)$ și $B\left(\frac{5}{2}, 0\right)$; b) Simetricul punctului M față de O este punctul $N(2, -1)$ și, cum $f(2) = -1$, rezultă că $N \in G_f$. **12.** a) $A(-1, 7)$; $B(3, -5)$; b) $AB = 4\sqrt{10}$. **13.** $a = 2 - \sqrt{3}$, $b = 2 + \sqrt{3}$ și $m_g = 1$; b) $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. **14.** a) $f(-1) = -6 \Rightarrow a = 1$; b) Fie $A(x, y)$ punctul cu proprietatea cerută. Atunci $y = 5x - 1$ și $x = \frac{1}{4}y$. Obținem $A(1, 4)$. **15.** a) $E(x) = 9$, $\forall x \in \mathbb{R}$; b) Fie $M(a, b) \in G_f$ cu $|a| = |b|$, atunci $3a - 2 = b$ și $|a| = |b|$, deci $|3a - 2| = |a|$. Pentru $3a - 2 = a$ obținem $a = 1$ și $M(1, 1)$, iar pentru $3a - 2 = -a$ obținem $a = \frac{1}{2}$ și $M\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. **16.** a) $f_a(2) = 1$, $\forall a \in \mathbb{R}$, deci $A \in G_f$, $\forall a \in \mathbb{R}$; b) $f_a(-1) = 10 \Rightarrow -2a + 1 - 4a + 3 = 10$, deci $a = -1$. **17.** a) Două puncte pe grafic sunt $A(0, 4)$ și $B(-2, 0)$. Graficul este dreapta AB; b) Fie $PP' \perp AB$, $P' \perp AB$. Cum $\mathcal{A}_{ABP} = \frac{AB \cdot PP'}{2} = \frac{BP \cdot AO}{2}$, rezultă $PP' = 2\sqrt{5}$. **18.** a) $a = -1 \in \mathbb{Z}$; b) $\mathcal{P}_{AOB} = 3 + \sqrt{5}$. **19.** a) $a = 4 \in \mathbb{N}$; b) $\cos(\sphericalangle OAB) = \frac{1}{\sqrt{5}}$. **20.** a) $f(1) = 2$ și $f(2) = 5$, deci $A, B \in G_f$; b) $A'(1, 0)$, $B'(2, 0)$ și cum $AA'B'B$ este trapez dreptunghic rezultă $\mathcal{A}_{AA'B'B} = \frac{(AA' + BB') \cdot A'B'}{2} = \frac{7}{2}$. **21.** a) $f(4) \neq 0$ și $f(0) \neq 2$ asigură faptul că $A, B \notin G_f$; b) Fie $M(a, b) \in G_f$, deci $2a - 3 = b$. Atunci $MA = \sqrt{(a-4)^2 + (2a-3)^2} = \sqrt{5a^2 - 20a + 25}$ și $MB = \sqrt{a^2 + (2a-5)^2} = \sqrt{5a^2 - 20a + 25}$, deci $MA = MB$. **22.** a) $a = \sqrt{2}$, $b = 2 - \sqrt{2}$ și $m_a = 1$; b) $f(a\sqrt{2}) = b \Rightarrow \sqrt{2}(a+1) - 2a = b$, $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a + 1 = 0$ și $-2a = b$ și $A(-\sqrt{2}, 2)$. **23.** a) $f(1) = 3$ și $f(3) = 7$. Rezultă că $a + b = 3$ și $3a + b = 7$, de unde $a = 2$, $b = 1$ și $f(x) = 2x + 1$; b) Cum $f(-4) = -7$, rezultă că $C \in G_f$. Deoarece $A, B, C \in G_f$, acestea sunt coliniare. **24.** a) Fie $A(a, b)$, atunci $f(a) = b$ și $g(a) = b$, deci $2a - 4 = b$ și $-2a + 8 = b$, de aici $a = 3$, $b = 2$ și $A(3, 2)$; b) Avem $B(2, 0)$ și $C(4, 0)$. Deducem $AB = AC = \sqrt{5}$, deci ΔABC este isoscel. **25.** a) $A(x, y) \in G_f \cap G_g \Rightarrow y = 3x - 5$ și $y = 2x - 3 \Rightarrow x = 2$ și $y = 1 \Rightarrow A(2, 1)$; b) Avem $B(0, -5)$, $C(0, -3)$ și $AB = 2\sqrt{10}$, $BC = 2$. Fie $CC' \perp AB$, $C' \in AB$, atunci $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \cdot CC'}{2} = \frac{BC \cdot AA'}{2}$, $AA' \perp Oy$, $A' \in Oy$. Rezultă $CC' = \frac{2}{\sqrt{10}}$. Astfel, $d(C, G_f) = \frac{\sqrt{10}}{5}$. **26.** a) Fie $A(a, b) \in G_f \cap G_g$, atunci $f(a) = b$ și $g(a) = b$, deci $\frac{3}{2}a + 1 = b$ și $2a + \frac{1}{2} = b$. Rezultă $A\left(1, \frac{5}{2}\right)$; b). Cum $C\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ și $B\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$, deducem $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{BC \cdot d(A, Ox)}{2} = \frac{25}{48}$. **27.** a) $A(0, 2)$ și $B\left(-\frac{2}{a}, 0\right)$; b) Distanța căutată este egală cu $\frac{2}{\sqrt{a^2 + 1}}$ și este egală cu $\sqrt{2}$ pentru $a = -1$ și $a = 1$. **28.** a) $-2x + 4 = -3x + 3 \Rightarrow x = -1$; b) $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{OAB} - \mathcal{A}_{COD} = \frac{5}{2}$. **29.** a) Fie $M(a, b)$ punctul de intersecție dintre G_f și G_g; atunci $f(a) = b$ și $g(a) = b$, deci $2a - 4 = b$

și $2a + 2 = b$, imposibil. Prin urmare, G_f și G_g nu au puncte comune. Rezultă $G_f \parallel G_g$; b) $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{AOB} + \mathcal{A}_{BOC} + \mathcal{A}_{COD} + \mathcal{A}_{DOA} = 9$. **30.** a) Fie $M(a, b)$ un punct comun graficelor celor două funcții; atunci $f(a) = b$ și $g(a) = b$, deci $\frac{3}{4}a - 3 = b$ și $\frac{3}{4}a + 1 = b$. Rezultă $-3 = 1$, fals. Prin urmare, $G_f \parallel G_g$; b) $d(G_f, G_g) = d(C, G_f) = d(C, AB)$, deci distanța căutată este CC', $C' \in AB$; $CC' \perp AB \Rightarrow CC'$ este înălțime în ΔABC. Cum $A(4, 0)$, $B(0, -3)$, $AB = 5$ și $C(0, 1)$, din $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \cdot CC'}{2} = \frac{BC \cdot AO}{2}$, rezultă $CC' = \frac{16}{5}$.

TEMA 7. Ecuații. Sisteme de ecuații. Inecuații

1. a) Falsă, deoarece propoziția $6 - 3 = 1$ este falsă; b) Falsă, deoarece propoziția $-2 \in \mathbb{N}$ este falsă **2.** a) $x = 6$; b) $x = -1$; c) $x = -1{,}6$; d) $x = 12{,}55$; e) $x = -2$; f) $x = 2$; g) $x = 3{,}3$; h) $x = 0{,}4$. **3.** a) 5; b) -1; c) $\frac{11}{6}$; d) $\varnothing$; e) $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; f) $\varnothing$. **4.** a) $x = 1$, $y = 2$; b) $a = 2$, $b = -3$. **5.** a) $x = \frac{3}{2}$; b) -3 sau 3. **6.** a) $x \in \{0, 1, 2, 3\}$; b) $x \in \{7, 8, 9, ...\}$; c) $x \in \{3, 4, 5, ...\}$; d) $x \in (-\infty, -4)$; e) $x \in (1, \infty)$; f) $x = 0$. **7.** a) $x = 1$ este soluție dacă $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \leq \frac{a-1}{6}$, rezultă $a \geq 6$, deci $a \in [6, \infty)$; b) Pentru $a = 6$ inecuația devine $\frac{2x-1}{3} + \frac{x}{2} \leq \frac{5}{6}$, de aici $x \leq 1$ și cum $x \in \mathbb{N}$ rezultă $x \in \{0, 1\}$. **8.** a) $\frac{4x}{3x+1} \in \mathbb{Z}$ dacă $3x + 1 \mid 4x$ și cum $3x + 1 \mid 3x + 1$, rezultă $3x + 1 \mid 4(3x + 1) - 3 \cdot 4x$, deci $3x + 1 \mid 4 \Rightarrow 3x + 1 \in \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$ și $x \in \mathbb{Z}$. Deducem $x \in \{-1, 0, 1\}$; b) $\frac{4x}{3x+1} = n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{n}{4-3n}$, $n \in \mathbb{Z}$. **9.** a) Fie a, b, c, d notele primite de elev. Atunci $a + b + c = 21$; media $= \frac{a+b+c+d}{4} = \frac{26}{4} = 6{,}50$; b) $7{,}50 = \frac{a+b+c+d}{4} = \frac{21+d}{4} \Rightarrow d = 9$. **10.** a) 1925 de lei; b) Fie $p\%$ procentul căutat. Atunci, $1925 - p\% \cdot 1925 = 1540 \Rightarrow p = 20$. **11.** a) Fie x suma inițială. În prima zi cheltuiește $\frac{3x}{10}$ lei și îi rămân $\frac{7x}{10}$ lei. A doua zi cheltuiește $\frac{x}{5}$ lei și îi rămân $\frac{x}{2}$ lei. A treia zi cheltuiește $\frac{x}{3}$ lei și îi rămân $\frac{x}{6}$ lei. Cum $\frac{x}{5} < \frac{3x}{10} < \frac{x}{3}$, cel mai mult a cheltuit a treia zi; b) Din $\frac{x}{6} = 100$ rezultă $x = 600$ de lei. **12.** a) Dacă ar fi 36 de cărți pe cele două rafturi, pe primul ar fi 27 de cărți, iar pe al doilea, 9 cărți. Mutând cărțile, pe primul raft rămân 7 cărți, iar pe al doilea vor fi 29 de cărți. Cum $29 \neq 7 \cdot 3$, nu pot fi 36 de cărți pe cele două rafturi; b) Fie n numărul de cărți de pe al doilea raft; atunci, pe primul raft sunt $3n$ cărți. Mutând cărțile, pe primul raft sunt $3n - 20$ cărți, iar pe al doilea sunt $n + 20$ cărți. Cum $n + 20 = 3(3n - 20)$, rezultă $n = 10$. Prin urmare, pe primul raft sunt 30 de cărți. **13.** a) În prima zi autoturismul a parcurs $\frac{1}{5} \cdot 500$ km = 100 km, iar a doua zi a parcurs $\frac{2}{5} \cdot 400$ km = 160 km. Pentru a treia zi au rămas 240 km; b) Fie x lungimea traseului. În prima zi a parcurs $\frac{x}{5}$ km și au rămas $\frac{4x}{5}$ km. A doua zi a parcurs $\frac{8x}{25}$ km și au rămas $\frac{12x}{25}$ km. Din $\frac{12x}{25} = 120$ rezultă $x = 250$. Prin urmare, traseul are 250 km. **14.** a) După n zile, în primul depozit rămâne o cantitate egală cu $320 - 15n$, iar în al doilea $180 - 10n$. Din $320 - 15n = 2(180 - 10n) \Rightarrow$ $\Rightarrow n = 8$; b) $320 - 15n = 180 - 10n \Rightarrow n = 28$, imposibil, deoarece, după 18 zile al doilea depozit devine gol. **15.** a) $\frac{1}{48}$; b) $x = 16$, $y = 9$. **16.** a) În prima zi s-au arat 60 ha, a doua zi 50 ha, iar a treia zi 90 ha. Cel mai mult s-a arat în ultima zi. b) Fie x numărul de hectare ale terenului. În prima zi se ară $\frac{3x}{10}$ ha, a doua zi $\frac{x}{4}$ ha, iar a treia zi 90 ha. Deci,

$\frac{3x}{10}+\frac{x}{4}+90=x$, de unde $x = 200$. Prin urmare, terenul are 200 ha. **17.** a) Fie n numărul de zile în care și-a propus Ionel să rezolve problemele și p numărul de probleme pe care le are de rezolvat. Atunci $p = 15n + 10$ și $p = 20(n - 3)$. Rezultă $n = 14$; b) $p = 220$. **18.** a) Dacă ar fi 10 copii, cadoul ar costa $(10 \cdot 20 + 30)$ lei = 230 de lei și, totodată, $9 \cdot 30 = 270$ de lei, fals. Deci, nu pot fi 10 copii; b) Fie x prețul cadoului și n numărul de copii; atunci $x = 20n + 30$ și $x = (n - 1) \cdot 30$. Deducem $n = 6$ și $x = 150$. Prețul cadoului este 150 de lei. **19.** a) Fie n numărul de copii și S suma obținută din sponsorizare. Atunci $S = 150n - 500$ și $S = 130n + 100$. Din $150n - 500 = 130n + 100 \Rightarrow n = 30$, $S = 4000$. Prin urmare, sunt 30 de copii; b) Sponsorizarea a fost de 4000 de lei. **20.** a) Fie x prețul unui caiet și y prețul unui pix. Atunci $5x + 4y = 62$ și $4x + 5y = 64$, deci $9(x + y) = 126$ și, astfel, $x + y = 14$. Un caiet și un pix costă 14 lei; b) $x = 6$, $y = 8$. Caietul costă 6 lei, iar pixul costă 8 lei. **21.** a) Dacă ar fi 12 fete, atunci ar fi $\frac{80}{100}\cdot 12=\frac{48}{5}$ băieți, imposibil; b) Fie f numărul fetelor și b numărul băieților. Atunci $b=\frac{80}{100}f$, deci $b=\frac{4}{5}f$. Dacă $p\%b = f$, rezultă $p\% = 125\%$. **22.** a) Fie x, y numărul timbrelor avute de Andrei, respectiv Vlad. Atunci $x + y = 100$ și $\frac{40}{100}x=12+\frac{30}{100}y$. Rezultă $x = 60$, $y = 40$; b) Andrei are de 1,5 ori mai multe timbre decât Vlad. **23.** a) Primul copil rămâne cu $a-\frac{1}{2}a=\frac{a}{2}$ lei; al doilea rămâne cu $b-\frac{2}{3}b=\frac{b}{3}$ lei, iar al treilea rămâne cu $c-\frac{3}{4}c=\frac{c}{4}$ lei. Astfel, $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}$; b) Cum $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}$ și $a + b + c = 180$, rezultă că $a = 40$ de lei, $b = 60$ de lei și $c = 80$ de lei. **24.** a) Prin verificare, n nu poate fi 12; b) Din teorema împărțirii cu rest obținem $319 = nc_1 + 7$, $945 = nc_2 + 9$ și $333 = nc_3 + 8$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{N}$. Rezultă că n este divizor al numerelor 312, 936 și 325. Cum cel mai mare divizor comun al numerelor 312, 936 și 325 este 13, rezultă $n = 13$. **25.** a) Din teorema împărțirii cu rest obținem $n = 18c_1 + 2$, $n = 30c_2 + 2$ și $n = 24c_3 + 2$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{N}^*$. Deci, $n - 2$ este multiplu comun al numerelor 18, 30 și 24. Cum cel mai mic multiplu comun al numerelor 18, 30 și 24 este 360, rezultă $n - 2 \in \{360, 360 \cdot 2, 360 \cdot 3, ...\}$. Găsim $n = 362$; b) $n \in \{1802, 2162\}$. **26.** a) Se verifică direct că în coș pot fi 301 nuci; b) Fie n numărul minim de nuci; atunci $n = 2a + 1$, $n = 3b + 1$, $n = 5c + 1$ și $n = 7d$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Din primele trei relații deducem $n = 30t + 1$, $t \in \mathbb{N}$, deci $n \in \{1, 31, 61, 91, 121, ...\}$ și $n = 7d$. Rezultă că numărul minim de nuci din coș este 91. **27.** a) Fie f numărul fetelor și b numărul băieților din clasă. Atunci $f+8=\frac{2}{3}b$ și $f=\frac{2}{3}(b-n)$. Rezultă $\frac{2b}{3}-8=\frac{2b}{3}-\frac{2n}{3}\Rightarrow n = 12$; b) $f=\frac{2}{3}(b-12)\geq 0\Rightarrow b\geq 12$.

28. a) 5% din 10 kg = 500 g; b) Fie m cantitatea de sare (în grame) ce trebuie adăugată. Atunci $20\% = \frac{m+500}{m+10000}\Rightarrow$ $\Rightarrow m = 1875$ g; c) În noul amestec sunt 3500 g de sare; $p\% = \frac{3500}{40000}\Rightarrow p = 8{,}75$. Concentrația noului amestec este 8,75%.

29. a) 6,66; b) Fie x noua notă primtă. Atunci $\frac{5+7+8+x}{4}\geq 7\Rightarrow x\geq 8$. Prin urmare, noua notă primită ar trebui să fie 8, 9 sau 10. **30.** a) Un elev care răspunde corect la 50 de întrebări primește $50 \cdot 5 - 50 \cdot 3 = 100$ puncte, deci nu va fi admis; b) Fie x numărul minim de răspunsuri corecte pentru a fi admis; din $5 \cdot x - 3(100 - x) \geq 200 \Rightarrow x \geq 62{,}5$. Deci, numărul minim de răspunsuri corecte trebuie să fie 63.

TEMA 8. Unghiuri. Triunghiuri. Patrulatere

1. $AB = 6$ cm. **2.** $AB = 34$ cm. **3.** $\sphericalangle BAN = 60°$. **4.** $\sphericalangle CAD = 40°$. **5.** $x = 40°$. **6.** $x = 20°$. **7.** $x = 15°$. **8.** $\sphericalangle ABD = 110°$. **9.** $\sphericalangle A - \sphericalangle C = (90° - 25°) - (90° - 40°) = 15°$. **10.** $\sphericalangle AIB = 180° - \frac{1}{2}(\sphericalangle A + \sphericalangle B) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle C) = 110°$. **11.** $\mathcal{P}_{ABC} =$ $= 15$ cm. **12.** 13,5 cm. **13.** $CD = 2{,}5$ cm. **14.** Dacă O este mijlocul lui BC, atunci $G \in AO$ și $AG = 2GO$. Obținem $AG =$ $= \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}BC = 6$ cm. **15.** $\sphericalangle C = 120°$. **16.** $S = 2{,}5$. **17.** $BD = 10$ cm. **18.** $\sphericalangle CBD = 65°$. **19.** $CB = 7$ cm. **20.** 15°. **21.** $AB = 14$ cm. **22.** $AB = 14$ cm, $CD = 6$ cm. **23.** a) $\Delta AMP \equiv \Delta CMB$ (L.U.L.), deci $AP = BC = 9$ cm; b) Din congruența

precedentă rezultă și $\sphericalangle PAM \equiv \sphericalangle C$. Analog se arată că $\Delta ANQ \equiv \Delta BNC$, de unde $AQ = BC$ și $\sphericalangle QAN \equiv \sphericalangle B$. Atunci $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle PAM + \sphericalangle BAC + \sphericalangle QAN = \sphericalangle C + \sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$, deci punctele P, A și Q sunt coliniare. În plus, $AP = AQ$ $(= BC)$, așadar A este mijlocul segmentului PQ. **24.** a) $\sphericalangle A = 180° - \sphericalangle B - \sphericalangle C = 60°$; unghiul BNC este exterior triunghiului ACN, deci $\sphericalangle BNC = \sphericalangle A + \sphericalangle ACN$, de unde $\sphericalangle ACN = 120° - 60° = 60°$; b) Triunghiul ACN are două unghiuri de 60°, deci este echilateral. Apoi, $\sphericalangle BAM = 180° - \sphericalangle B - \sphericalangle BMA = 30°$, așadar AM este bisectoarea unghiului A. Rezultă că AM este mediatoarea segmentului CN. **25.** a) Avem $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 2 \cdot \sphericalangle A$, deci $5 \cdot \sphericalangle A = 180°$, de unde $\sphericalangle A = 36°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 72°$. Cum BM este bisectoarea unghiului B, deducem că $\sphericalangle ABM = 36°$; b) Din $\sphericalangle A = \sphericalangle ABM = 36°$ rezultă că ABM este triunghi isoscel, cu $AM = BM$. Apoi din $\sphericalangle BMC = \sphericalangle C = 72°$ rezultă că BCM este triunghi isoscel, cu $BM = BC$. Astfel, $AM = BC$ $(= BM)$. **26.** a) $\sphericalangle CAD = 90° - \sphericalangle C = 75°$; b) Fie M mijlocul segmentului BC; atunci $AM = BM = CM$. Deducem că $\sphericalangle MAC = \sphericalangle C = 15°$, apoi $\sphericalangle DAM = \sphericalangle MAC + \sphericalangle C = 30°$. Atunci $AD = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{4}BC$. **27.** a) AD este bisectoare și mediană corespunzătoare bazei triunghiului isoscel ABC; atunci $BD = \frac{1}{2}BC = 3{,}5$ cm; b) Din reciproca teoremei liniei mijlocii rezultă că M și N sunt mijloacele laturilor AC, respectiv AB. Atunci $DM = DN = 5$ cm și, evident, $AM = AN = 5$ cm. Astfel, $AMDN$ este un romb, iar perimetrul său este 20 cm. **28.** a) CBN este triunghi dreptunghic isoscel, deci $\sphericalangle CBN = 45°$, prin urmare $\sphericalangle NBM = 45°$. Astfel, $\sphericalangle BMN = 75°$; b) Cum $BM \parallel DN$ și $BM = DN$, rezultă că $BMDN$ este un paralelogram. Diagonalele sale au același mijloc, deci O se află pe MN. **29.** a) $\sphericalangle DSR$ este unghi exterior triunghiului ADS, deci $\sphericalangle DSR = 67°30'$; b) Cum $\sphericalangle DRS = \sphericalangle DSR = \sphericalangle ASB = \sphericalangle BAS = 67°30'$, rezultă că triunghiurile DSR și BAS sunt isoscele, cu $DS = DR$ și $BS = AB$. Sumând aceste egalități obținem relația dorită. **30.** a) $BM = \frac{AB}{2} = CD$ și $BM \parallel CD$, deci $BCDM$ este paralelogram. Rezultă $DM = BC = AD$ și ADM este triunghi echilateral, astfel că $AM = AD = 12$ cm; b) $DC = DA = 12$ cm, prin urmare $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DCA$. Însă $\sphericalangle DCA = \sphericalangle CAB$ (alterne interne), așadar $\sphericalangle DAC = \sphericalangle CAB$.

TEMA 9. Asemănare. Relații metrice

1. $\frac{BN}{BC} = \frac{3}{8}$. **2.** 12,5 km. **3.** $AP = 15$ cm. **4.** $BC = 15$ cm. **5.** 96 m. **6.** $PC = 6\sqrt{3}$ m. **7.** 144 cm. **8.** $AD = 12$ cm. **9.** $BC^2 = 48 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \sphericalangle BAC = 90°$; $\text{tg}(\sphericalangle C) = \frac{AB}{AC} = \sqrt{3}$, deci $\sphericalangle C = 60°$. **10.** $\text{tg}(\sphericalangle ABD) = \frac{3}{4}$. **11.** $\mathcal{P}_{ABCD} = 68$ cm. **12.** $\sphericalangle B = 45°$. **13.** a) $\frac{AN}{AC} = \frac{3}{5}$; b) $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}\left(= \frac{3}{5}\right)$, deci $MN \parallel BC$ (reciproca teoremei lui Thales) și atunci $\Delta AMN \sim \Delta ABC$. Deducem că $\frac{MN}{BC} = \frac{3}{5}$, așadar $MN = 6$ cm, iar $\mathcal{P}_{BCNM} = 24{,}4$ cm. **14.** b) $AB \parallel CD \Rightarrow \Delta OAB \sim \Delta OCD \Rightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{AB}{CD} = 3$. **15.** a) $AB = BC = AC = 6$ cm, deci triunghiul ABC este echilateral. Obținem că $\sphericalangle B = 60°$, apoi $\sphericalangle BAD = 180° - \sphericalangle B = 120°$; b) $\Delta AMN \sim \Delta CDN$ (T.F.A:), deci $\frac{AN}{NC} = \frac{AM}{CD} = \frac{1}{2}$. Rezultă că $CN = \frac{2}{3}AC = 4$ cm. **16.** a) $\Delta BPM \sim \Delta CDM$ (T.F.A:), deci $\frac{BP}{CD} = \frac{BM}{MC} = \frac{1}{2}$; rezultă că $BP = 12$ cm; b) În triunghiul BNP avem $\sphericalangle B = 90°$ și $BP = BN$, așadar $\sphericalangle BPN = 45°$. Dar $\sphericalangle CQP \equiv \sphericalangle BPN$ (alterne interne), deci $\sphericalangle CQP = 45°$. **17.** a) $\sphericalangle AFE = \sphericalangle BFC$, $\sphericalangle EAF = \sphericalangle CBF = 90°$, prin urmare $\Delta AFE \sim \Delta BFC$. Rezultă că $\frac{AF}{BF} = \frac{AE}{BC} = \frac{1}{2}$, de unde $AF = \frac{AB}{3} = 8$ dm; b) În triunghiul AEF avem $\sphericalangle A = 90°$ și $AE = AF$, deci $\sphericalangle AFE = 45°$. Deducem că $\sphericalangle EFC$ $180° - 2 \cdot 45° = 90°$. Drumul parcurs de bilă este $EF + FC = 24\sqrt{2}$ cm. **18.** a) $\mathcal{P}_{BCED} = 34$ cm; b) $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}\left(= \frac{1}{3}\right)$ și $\sphericalangle DAE = \sphericalangle CAB$ $(= 90°)$, deci $\Delta AED \sim \Delta ABC$; rezultă că $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle ABC$. **19.** b) $\Delta AFE \sim \Delta ADC$ (U.U.) $\Rightarrow \frac{EF}{DC} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{ED}{6} = \frac{8 - ED}{12} \Rightarrow ED = 3$ cm. **20.** a) ΔOBC este un triunghi echilateral, deci $BC = OC = 12$ dam; $AB^2 = AC^2 - BC^2$, deci $AB = 12\sqrt{3}$ dam; b) Cele mai depărtate puncte față de F sunt punctele C și D; $FC = 6\sqrt{7}$ dam. **21.** a) $L = 4k$, $l = 3k$; $L^2 + l^2 = 100^2 \Rightarrow k = 20$; $L = 80$ m, $l = 60$ m; b) 70 de stâlpi;

21 de stâlpi. **22.** a) $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BDA + \sphericalangle ADC = 90° + 90° = 180°$, de unde coliniaritatea punctelor B, C și D; b) $\sphericalangle B = 90° - \sphericalangle C = \sphericalangle CAD = 60°$; $\cos(\sphericalangle B) = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{300}{BC} \Rightarrow BC = 600$ m. **23.** a) $BD = 6$ cm; b) Distanța dintre oricare două puncte din interiorul rombului este mai mică decât AC; $AC = 6\sqrt{3}$ cm și $6\sqrt{3} < 6 \cdot 1{,}75 = 10{,}5$. **24.** b) $BD = \sqrt{DE^2 + BE^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 5^2} = 2\sqrt{13}$ cm; dacă $CF \perp AB$, cu $F \in AB$, atunci $AC = \sqrt{AF^2 + CF^2} = \sqrt{11^2 + (3\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{37}$ cm. **25.** a) $AB = 30\sqrt{2}$ cm și $30\sqrt{2} < 30 \cdot 1{,}5 = 45$; b) $AC + BD = 30(3 + \sqrt{3})$ cm. **26.** a) Fie $EE' \perp AD$, $FF' \perp AD$, cu E', $F' \in AD$; atunci $EE'F'F$ este dreptunghi. Avem $E'A = (AD - EF) : 2 = 0{,}5$ m; $\cos(\sphericalangle EAE') = \frac{AE'}{AE} = \frac{1}{2}$, deci $\sphericalangle DAE = 60°$; b) $AB = 2EE' = \sqrt{3}$ m. **27.** a) Fie $CE \perp AB$, $E \in AB$. Cum $AE = DC = EB = 6$ cm, rezultă că triunghiul dreptunghic CAB este isoscel, deci $\sphericalangle B = 45°$; b) $OB = 12\sqrt{2}$ cm. **28.** a) Avem $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 4$ cm; $\Delta OCD \sim \Delta OAB \Rightarrow \frac{OC}{OA} = \frac{CD}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow OC = 1$ cm, $OA = 3$ cm; b) Analog se arată că $OD = \frac{1}{4}BD = \sqrt{3}$ cm. În triunghiul OAD avem $OA^2 + OD^2 = 12 = AD^2$ și concluzia rezultă aplicând reciproca teoremei lui Pitagora. **29.** a) $DE = 4\sqrt{5}$ cm, $CE = 2\sqrt{5}$ cm, deci $DE^2 + CE^2 = 100 = CD^2$. Din reciproca teoremei lui Pitagora obținem $\sphericalangle CED = 90°$; b) AM este mediana ipotenuzei în triunghiul ADE, deci $AM = \frac{1}{2}DE = 2\sqrt{5}$ cm. Analog, $BN = \sqrt{5}$ cm. Apoi, MN este linie mijlocie în triunghiul CDE, prin urmare $MN = \frac{1}{2}CD = 5$ cm. Lungimea drumului A–M–N–B este $(5 + 3\sqrt{5})$ cm. **30.** a) $EM = \sqrt{x^2 - 8x + 25}$; b) $\sphericalangle AME = 90° \Leftrightarrow AE^2 = AM^2 + ME^2 \Leftrightarrow 36 + x^2 = (x^2 - 8x + 25) + 25 \Leftrightarrow x = 1{,}75$ cm.

TEMA 10. Arii

1. $\mathcal{A}_{ABC} = 10$ (u.a). **2.** $B(-4, 3)$; $\mathcal{A}_{OAB} = 12$ (u.a). **3.** $\mathcal{A}_{ABC} = 3\sqrt{3}$ cm^2. **4.** $x = 12\sqrt{3}$. **5.** $\mathcal{A}_{ABC} = 336$ cm^2. **6.** $AM_{min} = d(A, BC) = 24$ cm. **7.** a) $\mathcal{A}_{ABC} = 156$ cm^2; b) $MD = 5$ cm, deci $BD = 8$ cm, iar $AB = \sqrt{BD \cdot BC} = 4\sqrt{13}$ cm. **8.** a) $\sphericalangle A = 30°$, deci $BD = AB \cdot \sin 30° = 5$ cm; b) $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AC \cdot BD}{2} = 25$ cm^2. **9.** a) $\mathcal{A}_{ABC} = 48$ cm^2; b) $\sin(\sphericalangle A) = \frac{2 \cdot \mathcal{A}_{ABC}}{AB \cdot AC} = \frac{24}{25}$.

10. $\mathcal{A}_{ABC} = 2 \cdot \mathcal{A}_{MBC} = 2 \cdot 2 \cdot \mathcal{A}_{PBC} = 68$ cm^2. **11.** $d(M, AB) = 4$ cm. **12.** a) 36 cm^2; b) $d(M, AB) = \frac{2 \cdot \mathcal{A}_{BMC}}{BC} = 4{,}8$ cm.

13. $\mathcal{A}_{AMGN} = 34$ cm^2. **14.** a) $\frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{NMC}} = \frac{25}{4}$; b) $\frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{NMC}} = \left(\frac{AB}{MN}\right)^2 \Rightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{5}{2} \Rightarrow MN = 4$ cm. **15.** a) $\Delta CMN \sim \Delta CAB$ (U.U.) $\Rightarrow \frac{CM}{CA} = \frac{MN}{AB} \Rightarrow MN = \frac{x}{3}$; b) $\frac{\mathcal{A}_{CMN}}{\mathcal{A}_{CAB}} = \left(\frac{MN}{AB}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{MN}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{3} = 1 \Rightarrow x = 3$ cm. **16.** a) Cum $AB^2 + AC^2 > BC^2$ și BC este latura cea mai lungă, rezultă că ABC este ascuțitunghic, deci D este între B și C. Notăm $BD = x$, $CD = 7 - x$; avem $AD^2 = AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2 \Rightarrow 25 - x^2 = 32 - (7 - x)^2 \Rightarrow x = 3$; b) $AD = 4$ cm; $\mathcal{A}_{ABC} = 14$ cm^2. **17.** 14 cm.

18. $\mathcal{A}_{ABCD} = 112\sqrt{3}$ cm^2. **19.** 294 m^2. **20.** a) $\mathcal{A}_{APQ} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{ABP} - \mathcal{A}_{CPQ} - \mathcal{A}_{ADQ} = 13$ cm^2; b) $d(A, PQ) = \frac{2 \cdot \mathcal{A}_{APQ}}{PQ} = \frac{2 \cdot 13}{5} = 5{,}2$ cm. **21.** 9,6 m. **22.** a) 3024 cm^2; b) $\sin(\sphericalangle BAD) = \frac{\mathcal{A}_{ABCD}}{AB \cdot AD} = \frac{336}{625}$. **23.** 32 cm. **24.** a) $\operatorname{tg}(\sphericalangle BAM) = \frac{BM}{AB} \Rightarrow BA = 2BM \Rightarrow AD = 2BM$; b) $BM \parallel AD \Rightarrow \Delta BEM \sim \Delta DEA \Rightarrow \frac{BE}{ED} = \frac{BM}{AD} = \frac{1}{2}$. Atunci $BD = 3BE = 12$ cm, iar $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot BD^2 = 72$ cm^2. **25.** a) $MN = NP = PQ = QM = 100\sqrt{5}$ m, deci $MNPQ$ este romb. Apoi, $MP = 100\sqrt{10}$ m, așadar $MP^2 = MN^2 + NP^2$; rezultă că $\sphericalangle MNP = 90°$, prin urmare $MNPQ$ este un pătrat; b) $\mathcal{A}_{MNPQ} = 50\,000$ m^2; prețul

gazonului este 1 100 000 lei. **26.** a) $OQCR$ este paralelogram cu $\sphericalangle O = 90°$, deci este un dreptunghi. Diagonala CO a acestuia este bisectoare a unghiului din care pleacă, prin urmare $OQCR$ este pătrat; b) $\mathcal{A}_{\text{figură}} = \mathcal{A}_{ABCD} + \mathcal{A}_{OMNP} - \mathcal{A}_{OQCR} =$ $= 28$ cm^2. **27.** a) $\sphericalangle GBA = \sphericalangle BED = 45°$, deci $BG \parallel ED$. Apoi $BD = GE = 2\sqrt{5}$ cm și, astfel, $BGED$ este trapez isoscel; b) Trapezul are diagonalele perpendiculare, așadar $\mathcal{A}_{BDEG} = \dfrac{BE \cdot GD}{2} = 18$ cm^2. **28.** a) Fie $CP \perp AB$, $P \in AB$; atunci $BP = \sqrt{BC^2 - CP^2} = 6$ m, deci $BM = (6 + x)$ m. Astfel, $\mathcal{A}_{MBNC} = \dfrac{(MB + NC) \cdot MN}{2} = 8(3 + x)$ m^2; b) Impunem condiția $8(3 + x) = 8 \cdot 6$ și obținem $x = 3$. **29.** a) Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Triunghiurile OAB și OCD fiind dreptunghice isoscele, avem $OA = OB = 8\sqrt{2}$ cm, $OC = OD = 6\sqrt{2}$ cm. Trapezul are diagonalele perpendiculare, deci $\mathcal{A}_{ABCD} = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BD =$ $= \dfrac{1}{2} \cdot \left(14\sqrt{2}\right)^2 = 196$ cm^2; b) $AD = BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = 10\sqrt{2}$ cm, deci $\mathcal{P}_{ABCD} = 4\left(7 + 5\sqrt{2}\right)$ cm. **30.** a) PN este linie mijlocie în ΔABC, deci $PN \parallel BC$, $PN = 12{,}5$ cm; analog, $MN = \dfrac{1}{2} \cdot AB = 7{,}5$ cm. Apoi, DP este mediana ipotenuzei în triunghiul dreptunghic ABD, așadar $DP = \dfrac{1}{2} \cdot AB = 7{,}5$ cm. Rezultă că $DMNP$ este un trapez isoscel; b) $d(DM, PN) =$ $= \dfrac{1}{2} \cdot AD = 6$ cm, iar $\mathcal{A}_{DMNP} = \dfrac{1}{2}(DM + PN) \cdot d(DM, PN) = 48$ cm^2.

TEMA 11. Cercul

1. $OCMD$ este un dreptunghi, deci $CD = OM = 6$ cm. **2.** a) romb; b) Triunghiurile AO_1O_2 și BO_1O_2 sunt echilaterale și au aria $9\sqrt{3}$ cm^2, deci $\mathcal{A}_{AO_1BO_2} = 18\sqrt{3}$ cm^2. **3.** $\sphericalangle A = 70°$, $\sphericalangle B = 50°$, $\sphericalangle C = 60°$. **4.** a) 120°, respectiv 60°; b) AC este diametru al cercului. **5.** 70°. **6.** $\sphericalangle AOD = 80°$, $\sphericalangle ACD = 40°$. **7.** 45°. **8.** a) OM este mediana bazei în triunghiul isoscel OAB, deci este și înălțime; b) $AB = 8$ cm. **9.** a) 2 cm; b) 120°. **10.** $6\sqrt{3}$ cm. **11.** a) Arcul $\overset{\frown}{BC}$ are măsura $2 \cdot 90° = 180°$, deci BC este diametru al cercului; b) $AB = 8$ cm; $d(O, AB) = 4$ cm. **12.** 60°, respectiv 300°. **13.** În triunghiul dreptunghic MAO, avem $AO^2 = AM^2 + OM^2 \Rightarrow r^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(\dfrac{r}{3}\right)^2 \Rightarrow r = 3$ cm. **14.** a) $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} \Rightarrow AD = BC$ și $AB \parallel CD$; b) Triunghiurile OAD, OCD și OBC sunt echilaterale; $\mathcal{P}_{ABCD} = 30$ cm. **15.** a) $\sphericalangle AOC = 30°$, $\sphericalangle FAB = 30°$, $\sphericalangle BCG = 15°$; b) Fie $M = \text{pr}_{AB} C$; $CM = CO \cdot \sin 30° = 3$ cm, $OM = CO \cdot \cos 30° = 3\sqrt{3}$ cm; $CA = \sqrt{CM^2 + AM^2} = 6\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ cm, iar $\sqrt{2 - \sqrt{3}} < 0{,}6$, după cum se constată după ridicarea la pătrat. **16.** a) O se află pe mediatoarea laturii BC, care este AM; b) $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = 8$, $\sphericalangle ABD = 90° \Rightarrow AB^2 = AM \cdot AD \Rightarrow AD = 12{,}5$ cm și atunci $r = \dfrac{1}{2} AD = 6{,}25$ cm. **17.** a) $AM =$ $= MO = 6$ cm, deci TM este mediana ipotenuzei în triunghiul dreptunghic TAO. Astfel, $TM = \dfrac{1}{2} AO = AM$. **18.** a) $\Delta MAO_1 \equiv$ $\equiv \Delta MTO_1$ (C.I.), deci $MA = MT$ și, analog $MB = MT$; Rezultă că $MA = MB$; b) $\sphericalangle AMO_1 \equiv \sphericalangle TMO_1$ și $\sphericalangle BMO_2 \equiv \sphericalangle TMO_2$, așadar $\sphericalangle O_1MO_2 = \dfrac{1}{2} \cdot \sphericalangle AMB = 90°$. **19.** $2\sqrt{2}$ cm. **20.** a) $r = \sqrt{3}$ cm, $R = 2\sqrt{3}$ cm; b) $9\sqrt{3}$ cm^2. **21.** b) ACD este triunghi dreptunghic, cu $\mathcal{A}_{ACD} = \dfrac{AC \cdot CD}{2} = 50\sqrt{3}$ cm^2, iar ACE este triunghi echilateral, cu $\mathcal{A}_{ACE} = 75\sqrt{3}$ cm^2. Raportul cerut este 2 : 3. **22.** b) 6π cm. **23.** a) $\sphericalangle BOC = 75°$, $\sphericalangle COD = 90°$; b) $r = \dfrac{12}{\pi}$ cm. **24.** a) 16π m^2; b) Trebuie arătat că $\dfrac{1}{3} \cdot 16\pi >$ $> 64 - 16\pi$, adică $\dfrac{\pi}{3} > 4 - \pi \Leftrightarrow \dfrac{4\pi}{3} > 4 \Leftrightarrow \pi > 3$, fapt adevărat. **25.** a) $r_1 + r_2 = \dfrac{1}{2} DT + \dfrac{1}{2} TC = \dfrac{1}{2} DC = \dfrac{1}{2} AB$; b) Cum $BC = r_2$, $AB = 3BC$ și $AB \cdot BC = 48$ cm^2, obținem că $r_2 = 4$ cm, deci $\mathcal{A}_{\text{colorată}} = \dfrac{1}{4} \cdot \pi r_2^2 = 4\pi$ cm^2. **26.** a) $r = 4\sqrt{3}$ cm;

b) $4\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)$ cm². **27.** a) Unghiul C este drept, fiind înscris în semicerc. Obținem $BC = 8$ cm; b) $\mathscr{A}_{\text{colorată}} = \frac{1}{2}\pi\cdot\left(\frac{AC}{2}\right)^2 +$

$+\frac{1}{2}\pi\cdot\left(\frac{BC}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\cdot\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \mathscr{A}_{ABC} = \frac{\pi}{8}(AC^2+BC^2-AB^2) + \mathscr{A}_{ABC} = \mathscr{A}_{ABC} = 24$ cm². **28.** a) Fie $\{M\} = AB \cap O_1O_2$.

În rombul AO_1BO_2 diagonalele se înjumătățesc și sunt perpendiculare. Obținem $AM = \sqrt{O_1A^2 - O_1M^2} = 3$ cm, $AB =$ $= 2AM = 6$ cm; b) Notăm cu S aria rombului AO_1BO_2, S_1 aria sectorului O_1AB, S_2 aria sectorului O_2AB. Aria suprafeței colorate este $S_1 + S_2 - S = 6\pi + 6\pi - 18\sqrt{3} = 6(2\pi - 3\sqrt{3})$ cm². **29.** a) Fie $M = \text{pr}_{O_1A}O_2$; în triunghiul dreptunghic MO_1O_2 avem $O_1O_2 = 10$ dm și $MO_1 = 5$ dm, deci $\sphericalangle MO_1O_2 = 60°$; b) $AB = MO_2 = 5\sqrt{3}$ dm. Lungimea curelei este $\frac{2}{3}l_{\text{cerc mare}} + \frac{1}{3}l_{\text{cerc mic}} + 2AB = 2\left(\frac{13\pi}{3}+5\sqrt{3}\right)$ dm. **30.** a) $16(50 + 9\pi)$ m²; b) În 74 de secunde.

TEMA 12. Elemente ale geometriei în spațiu

1. a) Fie M mijlocul laturii BC. Atunci $d(P, BC) = PM = 6$ cm; b) Cum $BC \perp AM$ și $BC \perp PM$, rezultă că $BC \perp (PAM)$, așadar $BC \perp AP$. **2.** a) $(CEF) \cap (AEB) = EF$; b) Completăm cubul $ABCDEFGH$. Observăm că $AE \parallel DH$, deci $\sphericalangle(AE, BD) =$ $= \sphericalangle(DH, BD) = \sphericalangle BDH = 60°$, deoarece triunghiul BDH este echilateral. **3.** a) $DC \parallel AB$, $\sphericalangle(BM, DC) = \sphericalangle MBA = 45°$; b) Deoarece BDM este triunghi echilateral, rezultă că $MD = BD$, astfel că $\Delta DAM \equiv \Delta DAB$ (L.L.L.), deci $\sphericalangle MAD = 90°$. Așadar, $MA \perp AD$ și $MA \perp AB$, ceea ce conduce la $MA \perp (BCD)$. **4.** a) Fie $VO \perp (ABC)$, $D \in (ABC)$. Deoarece $VA =$ $= VB = VC$, rezultă că $OA = OB = OC$, deci O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Din triunghiul dreptunghic VOA obținem $OA = 6\sqrt{3}$ cm și $AB = OA\sqrt{3} = 18$ cm; b) $\text{pr}_{(VAM)}VB = VM$, astfel că $\sphericalangle(VB, (VAM)) = \sphericalangle BVM$. Din triunghiul VMB, $\sphericalangle M = 90°$, obținem că $\text{tg}(\sphericalangle BVM) = \frac{BM}{VM} = \frac{9}{3\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$. **5.** a) Triunghiul ABC este echilateral, iar $\sphericalangle(AC, (QAM)) = \sphericalangle CAM = 30°$; b) P este centrul triunghiului echilateral ABC și $QP \perp (ABC)$, deci $QA = QB = QC$ (= 12 cm). **6.** a) $MA \parallel BN$, $MA < BN$, deci există $\{P\} = MN \cap AB$. Din $P \in MN$, $P \in AB$, $MN \subset (CMN)$, $AB \subset (ABD)$, rezultă că $(CMN) \cap (ABD) = CP$; b) Triunghiurile PAM și PBN sunt asemenea, deci $\frac{PA}{PB} = \frac{MA}{BN} = \frac{1}{2}$, adică $PA = 4$ cm. Deoarece $PA \parallel DC$, $PA = DC$, rezultă că $PACD$ este paralelogram, astfel că $\sphericalangle(MN, AC) = \sphericalangle(MP, PD) = \sphericalangle MPD$. Constatăm că $MP = MD = PD = 4\sqrt{2}$ cm, așadar $\sphericalangle DNP = 60°$. **7.** a) Deoarece $AM \parallel CN$, $AM < NC$, rezultă că MN și AC sunt diagonale ale unui trapez, concurente în punctul P, $P \in AC$. Triunghiurile PMA și PNC fiind asemenea, obținem că $\frac{PA}{PC} = \frac{MA}{NC}$, deci $PA = 1$ cm, $NC = 3$ cm. Atunci $\sphericalangle(MN, (ABC)) = \sphericalangle(PN, (ABC)) = \sphericalangle NPC = 45°$, deoarece triunghiul PCN este dreptunghic isoscel; b) Deoarece $P \in MN$, rezultă că $MN = MP + PN = 4\sqrt{2}$. **8.** a) Deoarece $ABCD$ este pătrat, iar $MO \perp (ABCD)$, rezultă că $MA = MB = MC = MD$. Din triunghiul MOA se obține $MA = 18$ cm; OP este linie mijlocie în triunghiul MAC, deci $OP \parallel MA$ și $\sphericalangle(OP, AD) = \sphericalangle(MA, AD) = \sphericalangle MAD = 60°$, deoarece triunghiul MAD este echilateral; b) $OQ \parallel AD$, $OP \parallel MA$, $OQ \cap OP = \{O\}$, $MA \cap AD = \{A\}$, astfel că $(POQ) \parallel (MAD)$. **9.** a) Fie $CT \perp MA$, $T \in MA$. Deoarece $CT \perp MA$, $MA \perp AB$ și $AB \perp CA$, rezultă, conform $R_2T3\perp$, că $d(C, (MAB)) = CT = \frac{MC\cdot CA}{MA} =$ $= 3\sqrt{3}$ cm; b) $AB \perp AC$, $AB \perp MC$, așadar $AB \perp (MCA)$. Dar $AB \subset (MAB)$ și astfel $(MAB) \perp (MAC)$. **10.** a) $BD \perp AC$, $BD \perp AA'$, deci $BD \perp (ACC')$ și $A'M \subset (ACC')$; b) $(ABC) \parallel (A'BC')$; rezultă că $\sphericalangle(A'M, (ABC)) = \sphericalangle(A'M, (A'B'C')) =$ $= \sphericalangle MA'C'$, deoarece $\text{pr}_{(A'B'C')}A'M = A'C'$. În triunghiul $MA'C'$, $\sphericalangle C' = 90°$, obținem că $\sphericalangle MA'C' = 30°$. **11.** a) $DC \perp BC$, $DC \perp CC'$, deci $DC \perp (BCC')$ și $MB \subset (BCC')$. Așadar, $DC \perp MB$, iar $\sphericalangle(DC, BM) = 90°$; b) $AN \parallel MC'$, $AN = MC'$, deci AC' și MN au același mijloc. Însă și BD' și AC' au același mijloc, de unde obținem că MN și BD' au același mijloc. Așadar, MN și BD' sunt concurente, iar punctele B, N, D' și M sunt coplanare. **12.** a) $AB \parallel CS$ și $AB = CS$, deci $ABCS$ este paralelogram, cu $AC \parallel SB$. Atunci $\sphericalangle(SB, D'C') = \sphericalangle(AC, CD) = 45°$; b) Deoarece $SB \perp BD$, $SB \perp BB'$, $BD \cap BB' = \{B\}$, rezultă că $SB \perp (DD'B')$. **13.** a) $EI \parallel DL$, deci $\sphericalangle(PD, EI) = \sphericalangle PDL = 60°$, deoarece triunghiul PDL este echilateral; b) Deoarece $PO \parallel RU$, $PO = RU$, rezultă că $PORU$ este paralelogram și astfel $OR \parallel PU$, $OR = PU$. Ținând cont că O_1

este mijlocul OR și O_2 este mijlocul PU, vom obține că $RO_1 \parallel PO_2$ și $RO_1 = PO_2$, adică PO_1RO_2 este paralelogram, deci $PO_1 \parallel RO_2$. **14.** a) Punctele coliniare V, P, M au proiecțiile puncte coliniare. Dacă $PT \perp (ABC)$, atunci $T \in OM$ și $OT = TM$. În triunghiul VOM, PT este linie mijlocie, deci $PT = \frac{VO}{2} = \frac{8}{2} = 4$ cm; b) Dacă N este mijlocul AD, atunci OP este linie mijlocie în triunghiul VNM; $OP \parallel VN$, $VN \subset (VAD)$, astfel că $OP \parallel (VAD)$. **15.** a) Dacă M este mijlocul laturii BC, atunci $\sphericalangle((VBC), (ABC)) = \sphericalangle VMO$. Deoarece $OM = 3$ cm, $VM = 3\sqrt{3}$ cm, rezultă că $VO = 3\sqrt{2}$ cm și $\text{tg}(\sphericalangle VMO) = \sqrt{2}$; b) $ABCD$ pătrat, deci $d(O, AB) = d(O, BC) = d(O, CD) = d(O, DA) = 3$ cm. În triunghiul dreptunghic isoscel VOB, $\sphericalangle O = 90°$, obținem că $d(O, VB) = \frac{VO \cdot OB}{VB} = 3$ cm. La fel se obțin distanțele până la celelalte muchii laterale și concluzia este imediată. **16.** a) $AO = \frac{AB\sqrt{6}}{3}$, deci $AB = 6$ cm; $MN = \frac{1}{2}BD = 3$ cm; b) Deoarece $MN \parallel BD$ și $AC \perp BD$, obținem că $\sphericalangle(MN, AC) = 90$. **17.** a) Fie $MT \perp AC$, $T \in AC$. Deoarece $MT \perp AC$, $MT \perp VO$, $VO \cap AC = \{O\}$, rezultă că $d(M, (VAC)) = MT$. Din reciproca liniei mijlocii, $MT = \frac{BO}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm; b) Fie N mijlocul laturii AD. Atunci $\sphericalangle((VAD), (VBC)) = \sphericalangle MVN$. Observând că triunghiul VMN este echilateral, obținem că $\sphericalangle MVN = 60°$. **18.** a) $AA_1 \perp (ABC)$, $CD \subset (ABC)$ și $AC \perp CD$, implică $A_1C \perp DC$; $d(A_1, CD) = A_1C = 7$ cm; b) $AC \parallel FD$, $AA_1 \parallel DD_1$, $AA_1 \cap AC = \{A\}$, $FD \cap DD_1 = \{D\}$, deci $(A_1AC) \parallel (D_1DF)$. **19.** a) $A'B' \parallel AB$, deci $\sphericalangle(BM, A'B') = \sphericalangle(BM, AB) = \sphericalangle ABM = 60°$; b) Deoarece $BM \perp AM$ și $BM \perp AA'$, rezultă că $BM \perp (A'AM)$. Din $BM \perp (A'AM)$ și $BM \subset (B'BM)$ se obține că $(A'AM) \perp (B'BM)$. **20.** a) Deoarece $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{NB}$, rezultă că $AM = MN = NB = AO = 6$ cm. Atunci $\text{pr}_{(ABM)} VMN = OMN$, iar $\mathcal{A}_{OMN} = \frac{OM^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ cm^2 < 18 cm^2; b) Din $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BN}$ rezultă că $MN \parallel AB$, deci $\sphericalangle(VB, MN) = \sphericalangle(VB, AB) = \sphericalangle VBA = 60°$.

21. a) Fie M mijlocul muchiei AB; atunci $CM \perp AB$ și $CM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ cm. Din $CC' \perp (ABC)$, $AB \subset (ABC)$, $CM \perp AB$ rezultă, conform T3⊥, că $d(C', AB) = C'M = 3\sqrt{7}$ cm; b) Fie $\{P\} = BC' \cap B'C$. Atunci OP este linie mijlocie în triunghiul ABC', deci $OP \parallel AB$. Cum $OP \subset (B'OC)$ și $AB \parallel OP$, rezultă că $AB \parallel (B'OC)$. **22.** a) $B'C' \parallel BC$, $\sphericalangle(AB, B'C') = \sphericalangle ABC = 60°$; b) Dacă $\{O\} = B'C \cap BC'$, atunci MO este linie mijlocie în triunghiul $A'B'C$, deci $MO \parallel A'C$ și $MO \subset (BC'M)$, astfel că $A'C \subset (BC'M)$. **23.** a) Deoarece $BD = 6$ cm, rezultă că BDD_1B_1 este pătrat și $BD_1 \perp DB_1$; b) $DD_1 \parallel (A_1AC)$, $S \in DD_1$, deci $d(S, (ACC_1)) = d(D, (ACC_1))$. Fie $DP \perp AC$, $P \in AC$. Din $DP \perp AC$, $DP \perp AA_1$ rezultă că $DP \perp (ACC_1))$ și $d(D, (ACC_1)) = DP = \frac{DA \cdot DC}{AC} = 2\sqrt{2}$ cm. **24.** a) $\text{pr}_{(ABC)} MD_1 = MD = 4$ cm; b) Dacă N este mijlocul segmentului A_1B_1, atunci $(MDD_1) \cap (MCC_1) = MN$, $\sphericalangle((MDD_1), (MCC_1)) = \sphericalangle D_1NC_1 = 60°$. **25.** a) Dacă O este centrul triunghiului ABC, atunci $\text{pr}_{(ABC)} SM = OM$, iar $OM = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ cm; b) Cum $SO = 2\sqrt{6}$ cm, $SM = 6$ cm și $AM = 6\sqrt{3}$ cm, constatăm că $AM^2 = SA^2 + SM^2$, deci $SA \perp SM$. **26.** a) Din $SO = 6$ cm și $SN = 2NO$ obținem $SN = 4$ cm. Triunghiul ABC fiind echilateral, rezultă că $OM = \frac{1}{3}AM = 2\sqrt{3}$. Din triunghiul NOM, $\sphericalangle O = 90°$, obținem $MN = 4$ cm $= SN$; b) Ținând cont că $(NBC) \cap (SBC) = BC$, $NM \perp BC$, $SM \perp BC$, obținem că $\sphericalangle((NBC), (SBC)) = \sphericalangle NMS = 30°$. **27.** a) Din triunghiul AVB, $\sphericalangle AVB = 90°$, obținem $AB = 12$ cm. Analog $BC = AC = 12$ cm, deci triunghiul ABC este echilateral. Avem $AB = AO\sqrt{3}$, de unde $AO = 4\sqrt{3}$ cm < 7 cm; b) Fie M mijlocul laturii BC ($\{M\} = AO \cap BC$). Deoarece $AV \perp VB$ și $AV \perp CV$, rezultă că $AV \perp (VBC)$, deci $AV \perp VM$. Așadar, $\sphericalangle(AO, (VBC)) = \sphericalangle AMV$, iar $\text{tg}(\sphericalangle AMV) = \frac{AV}{VM} = \sqrt{2}$. **28.** a) Fie O centrul hexagonului și $T = \text{pr}_{(ABC)} Q$. Atunci $T \in OB$ și $\frac{QT}{VO} = \frac{BQ}{BV} = \frac{BT}{BO}$, de unde $BT = 1$ cm și $QT = \sqrt{3}$ cm. Construim $TX \perp FC$, $X \in FC$. Atunci $QT \perp (ABC)$, $CF \subset (ABC)$, $TX \perp OC$, astfel că $d(Q, CF) = XQ$. Din triunghiul QXT, $QX = \sqrt{QT^2 + TX^2} = \sqrt{3 + \frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{39}}{2}$ cm; b) $ABCO$ este romb; fie $\{S\} = OB \cap CA$. Atunci $\frac{BS}{BE} = \frac{BQ}{BV}\left(= \frac{1}{4}\right)$, deci $QS \parallel VE$, conform reciprocei teoremei lui Thales. Cum $QS \parallel VE$ și $QS \subset (AQC)$, obținem că

$VE \parallel (AQC)$. **29.** a) $AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ cm, $AO = 8\sqrt{3}$ cm, $OM = 4\sqrt{3}$ cm, $A'M' = 6\sqrt{3}$ cm, $A'O' = 4\sqrt{3}$ cm, $O'M' = 2\sqrt{3}$ cm. Deoarece $A'O' \parallel OM$, $A'O' = OM$, rezultă că $OMO'A'$ este paralelogram, deci A', M și mijlocul lui OO' sunt coliniare; b) Din trapezul $AOO'A'$ se obține $OO' = 2\sqrt{6}$ cm și din trapezul $OO'M'M$ se obține $MM' = 6$ cm. Construim $A'P \parallel MM'$, $P \in AM$. Atunci $A'P = MM' = 6$ cm, $PM = A'M' = 6\sqrt{3}$ cm, iar $AP^2 = AA'^2 + A'P^2$, deci $AA' \perp A'P$. **30.** a) $OM = \frac{AB}{2} = 4$ cm, iar $O'M' = 1$ cm, unde M' este mijlocul $B'C'$. Din trapezul $OMM'O'$ deducem că $MM' = 3\sqrt{2}$ cm și atunci $\sphericalangle((BCC'), (ABC)) = \sphericalangle OMM' = 45°$; b) În trapezul $AOO'A'$, fie $A'T \perp AO$, $T \in AO$. Atunci $A'T \parallel OO'$, $OO' \perp (ABC)$, deci $A'T \perp (ABC)$, prin urmare și $A'T \perp TM$. Din triunghiul ABC, $TM = \sqrt{26}$, iar $A'M = \sqrt{A'T^2 + TM^2} = \sqrt{35}$ cm.

TEMA 13. Poliedre

1. 144 cm³. **2.** 27000 cuburi. **3.** 30 cm. **4.** $\mathcal{A}_l = 24\sqrt{3}$ cm² > 40 cm². **5.** $\mathcal{V} = 324$ cm³. **6.** a) $\mathcal{V} = 90$ m³ și se folosesc 2880 : 90 = 32 cărămizi; b) Suprafața vopsită va fi egală cu 147,2 m², deci se vor folosi 29,44 kg vopsea. **7.** a) $\mathcal{V} = 180$ m³ = 180000 ℓ. Cele 5 robinete vor aduce $5 \cdot 190 \cdot 60 \cdot 3 = 171000$ ℓ; b) Suprafața acoperită este de 174 m², deci numărul plăcuțelor este 174 : 0,25 = 696. **8.** a) $d = \sqrt{30^2 + 40^2 + 50^2} = 50\sqrt{2}$ cm, iar $70 < 50\sqrt{2}$; b) $\mathcal{V} = 60$ dm³, deci în interiorul stupului putem evidenția 60 de cubulețe cu latura de 1 dm. Fiind 60 de cubulețe și 61 de albine, cu siguranță cel puțin două albine sunt în același cubuleț, deci distanța dintre ele este cel mult egală cu $\sqrt{3}$ dm (diagonala cubului). **9.** a) Dacă l este lungimea laturii cubului, atunci $l^3 = 1000$ cm³, de unde $l = 10$ cm. Apa rămasă are volumul $\mathcal{V}_{apă} = 10^2 \cdot 8 = 800$ cm³, deci s-au evaporat 200 cm³ de apă; b) Dacă $N \in DD'$, $P \in BB'$, astfel încât $MN \parallel AD$, $MP \parallel AB$ și $BD' \cap (MNP) = \{Q\}$, atunci $\Delta D'NQ \sim \Delta D'DB$ și $QB = 8\sqrt{2}$ cm. **10.** a) $BD = 40\sqrt{2}$ cm și $DD' = \sqrt{BD'^2 - BD^2} = 70$ cm; b) $\mathcal{V} = 112$ ℓ. **11.** a) $\mathcal{A}_l = 1248$ cm²; pierderile = 187,2 cm², deci se folosesc 1435,2 cm²; b) Considerând desfășurarea suprafeței laterale, lungimea minimă este cea a segmentului AM. Din triunghiul ACM se obține $AM = 26$ cm. **12.** a) $\mathcal{V}_{corp} = 3072\sqrt{3}$ cm³, $\mathcal{V}_{șurub} = 960\sqrt{3}$ mm³; se vor obține 3200 șuruburi. **13.** a) $AB = 12$ cm; $\mathcal{A}_l = 216$ cm²; b) Dacă M este mijlocul BC, atunci $\sphericalangle((A'BC), (ABC)) = \sphericalangle A'MA = 30°$. **14.** a) Se pot aplica înscrisuri publicitare pe $2 \cdot \mathcal{A}_{BCPM} + 2 \cdot \mathcal{A}_{ABC} = \left(12000 + 1800\sqrt{3}\right)$ cm² < 15500 cm²; b) Dacă O este centrul $ABMN$, atunci $OQ \parallel PM$ și $OQ \subset (BQN)$, astfel că $PM \parallel (BQN)$. **15.** a) $VA = AB = 8$ cm. Deoarece $BD \perp AC$ și $BD \perp VO$, deducem că $BD \perp (VAC)$, deci $BD \perp OM$; b) Triunghiul VBC fiind echilateral și $MC = 3$ cm, obținem că $BM = 7$ cm. Deoarece triunghiurile MBC și MCD sunt congruente, rezultă că $MD = MB = 7$ cm, iar $MB + MD = 14$ cm. **16.** a) Fie P, Q, R, S punctele unde este ancorată plasa pe muchiile VA, VB, VC, respectiv VD. Atunci $(PQRS) \parallel (ABCD)$ și $PQ = \frac{1}{2}AB = 8$ m. Ținând cont că $PQRS$ este pătrat, obținem că $\mathcal{A}_{PQRS} = 64$ m², iar prețul plasei este 1600 €; b) Fie M, N mijloacele laturilor BC, respectiv AD. Atunci $\sphericalangle((VBC), (VAD)) = = \sphericalangle MVN$ și, cum $VO = \frac{MN}{2}$, deducem că $\sphericalangle MVN = 90°$. **17.** a) $6 \cdot AB^2 = 864$, deci $AB = 12$ cm. Dacă $O = \text{pr}_{(ABC)} V$, atunci $VA = \sqrt{VO^2 + OA^2} = 6\sqrt{6}$ cm; b) $\mathcal{V}_{cub} = AB^3 = 12^3$ cm³; $\mathcal{V}_{piramidă} = \frac{AB^2 \cdot VO}{3} = \frac{12^3}{3}$ cm³. Pierderile reprezintă $\frac{2}{3}$ din $\mathcal{V}_{cub}$, adică 66,(6)%. **18.** a) $AB = 8$ m, $S_{vopsită} = \mathcal{A}_{lat.\ piramidă} + \mathcal{A}_{lat.\ piesă} + \mathcal{A}_{b\ piesă} = 314$ m². Se vor utiliza 23,55 kg vopsea, deci cele 24 kg sunt suficiente; b) $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{prismă} + \mathcal{V}_{piramidă} = 384$ m³. **19.** b) $\mathcal{A}_l = 112$ m² sticlă; b) $\Delta TBA \equiv \Delta TBC$, deci $AT = TC$. Pentru ca AT să fie minim, trebuie ca $AT \perp VB$, astfel că $AT = 4{,}8$ m și lungimea traseului va fi de 9,6 m. **20.** a) $\mathcal{V} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ cm³; b) $BC \perp AO$ și $BC \perp VO$, deci $BC \perp (VAO)$. Rezultă că $BC \perp VA$. **21.** $\mathcal{A}_l = 144\sqrt{3}$ cm² și pentru o cutie vom folosi 286,488 cm² material. Numărul cutiilor este 174. **22.** a) $\mathcal{V} = \frac{AB^3\sqrt{2}}{12} =$

$= 18\sqrt{2}$ mm³; b) Dacă P este mijlocul AD, atunci $\sphericalangle((MN), (AC)) = \sphericalangle NMP = 45°$. **23.** Dacă M este mijlocul CD, atunci $\sphericalangle((VDC), (ABC)) = \sphericalangle VMO = 45°$. Vom obține $AB = 12$ mm, iar $\mathcal{V} = 1296$ mm³ $= 1{,}296$ cm³. Vor curge 1,296 ml de apă, mai puțin de 1,3 ml. **24.** a) 9 cm; b) 6 cm. **25.** 40 kg. **26.** 300 g. **27.** b) $l = 4$ cm, apotema trunchiului are 10 cm, $\mathcal{A}_l = 480$ cm². **28.** a) Dacă O și O' sunt centrele bazelor, atunci $AO = 3$ m, $A'O' = 1{,}2$ m și $OO' = 2{,}4$ m; b) $\mathcal{V} = 22{,}464$ m³ > 22 m³. **29.** a) $\mathcal{A}_{ABCDEF} = \dfrac{6 \cdot AB^2\sqrt{3}}{4} = 5400\sqrt{3}$ cm²; b) Se obține un trunchi de piramidă triunghiulară regulată având latura bazei mici $MN = \dfrac{AF + BE}{2} = 90$ cm, latura bazei mari $AF = 60$ cm și muchia laterală de 30 cm. Atunci $h_{tr.} = 10\sqrt{6}$ cm și $\mathcal{V} = 42750\sqrt{2}$ cm³. **30.** $\mathcal{V} = \dfrac{1053\sqrt{3}}{4} < 526{,}5$ cm³. Deoarece 13 cm³ cântăresc 10 g, obținem că masa lumânării va fi mai mică decât $\dfrac{10 \cdot 526{,}5}{13} = 405$ g.

TEMA 14. Corpuri rotunde

1. $157 = 3{,}14 \cdot 25 \cdot h$, deci $h = 2$ cm. **2.** $\mathcal{V} = 900\pi$ cm³, masa corpului $= 1{,}5\pi$ kg $> 4{,}7$ kg. **3.** a) $\mathcal{A}_l = 550$ cm², deci vom folosi $\dfrac{3}{5} \cdot 550 = 330$ g vopsea; b) $\mathcal{V} = 1925$ cm³ < 2 ℓ. **4.** a) $\mathcal{A}_l = 120$ dm²; b) Analizăm două situații: 1) Dacă generatoarea este AD, atunci $G = 10$ dm, $R = \dfrac{6}{\pi}$ dm, $\mathcal{V} = \dfrac{360}{\pi}$ dm³; 2) Dacă generatoarea este AA_1, atunci $G = 12$ dm, $R = \dfrac{5}{\pi}$ dm, $\mathcal{V} = \dfrac{300}{\pi}$ dm³. **5.** a) $R = 3$ cm; b) Considerând desfășurarea suprafeței laterale, drumul minim este reprezentat de segmentul AE de pe desfășurare; $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{9\pi^2 + 49} < \sqrt{90 + 49} < 12$ cm. **6.** a) $R = 10$ cm, $G = 28$ cm; b) Pentru a avea pierderi minime, înălțimea prismei va fi egală cu generatoarea trunchiului, iar bazele prismei vor fi pătrate, având vârfurile pe circumferințele bazelor cilindrului; $\mathcal{V}_{\text{cilindru}} = 8800$ cm³; $AB = R\sqrt{2}$ cm; $\mathcal{V}_{\text{prismă}} = 5600$ cm³. Se pierd 3200 cm³. **7.** $\mathcal{A}_l = 18\pi$ cm². **8.** a) $R = 3{,}5$ cm, $\mathcal{A}_l = 137{,}5$ cm² și se pot confecționa cel mult 72 de cornete; b) $\mathcal{V} = 154$ cm³; masa cornetului este $\dfrac{154}{56} \cdot 40 = 110$ g. **9.** a) $R = 5\sqrt{2}$ cm; b) $\mathcal{V} = \dfrac{\pi R^2 H}{3} = \dfrac{1000\pi}{3}$ cm³ > 1 ℓ, deci încape 1 ℓ de apă în vasul obținut. **10.** a) $G = 12$ cm, $H = 6\sqrt{3}$ cm $< 10{,}5$ cm; b) Desfășurarea suprafeței laterale este un sector de disc având unghiul $\alpha = 360° \cdot \dfrac{R}{G} = 180°$, iar drumul minim este reprezentat de segmentul AB de pe desfășurare; $AB = 12\sqrt{2}$ cm. **11.** 51 g. **12.** a) $H = 12$ cm; b) Dacă v este volumul conului mic și h înălțimea sa, atunci $\dfrac{v}{V} = \left(\dfrac{h}{H}\right)^3$, deci $\left(\dfrac{h}{H}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$, de unde $h = 6$ cm. Secțiunea se va face la 6 cm de planul bazei. **13.** $\mathcal{V} = 11{,}1\pi$ $\ell > 30$ ℓ, deci robinetul nu poate umple găleata. **14.** a) $r = 2$ cm; b) $\mathcal{V}_{tr.} = 181\pi$ ml, iar $181\pi > 500$, deci încap 500 ml de suc în pahar. **15.** a) $R = 8$ dm, $h = 6\sqrt{3} < 11$ dm; b) Dacă $AD \cap BC = \{M\}$, atunci triunghiul MAB este echilateral, iar distanța de la M la planul bazei mici va fi egală cu $2\sqrt{3}$ dm. **16.** a) $h = 12$ cm; b) $\mathcal{A}_{\text{piesă}} = \mathcal{A}_{\text{l trunchi}} + \mathcal{A}_{\text{l cilindru}} - 2\mathcal{A}_{\text{b cilindru}} = 410\pi$ cm². **17.** a) $R = 7$ cm, $r = 1$ cm, $h = 8$ cm, $h = 10$ cm, $\mathcal{V}_{tr.} = 152\pi$ cm³ > 475 cm³; b) Se va acoperi cu hârtie suprafața laterală și baza mică, deci vom folosi 81π cm². Dacă s este suprafața de hârtie folosită la ambalare, atunci $\dfrac{90}{100}s = 81\pi$, de unde $s = 90\pi$ cm². **18.** a) $R + r = 24$ și $R - r = 6$, deci $R = 15$ cm, $r = 9$ cm, $\mathcal{V}_{tr.} = 1176\pi$ cm³; b) Generatoarea conului va fi egală cu 25 cm, deci măsura unghiului va fi $\alpha = 216°$. **19.** a) $S = 96\pi$ cm²; b) $\dfrac{4 \cdot \pi \cdot 6^3}{3} = \dfrac{\pi \cdot 12^2 \cdot h}{3}$, de unde $h_{con} = 6$ cm.

20. $\mathcal{V}_{\text{dovleac}} = 4\pi \cdot 24^2$, deci $\dfrac{4\pi r^3}{3} = 4\pi \cdot 24^2$, așadar, raza dovleacului este $r = 12$ cm.

MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ

PRECIZĂRI

Subiectul I și Subiectul al II-lea

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

Subiectul al III-lea

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

- Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut.

TESTUL 1

Subiectul I. 1. c). **2.** c). **3.** b). **4.** d). **5.** a). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** d). **3.** a). **4.** c). **5.** b). **6.** b).
Subiectul al III-lea. 1. Fie x lungimea drumului în kilometri. a) Dacă în prima zi biciclistul ar fi parcurs 13 km, atunci $\frac{x}{3}-5=13$, de unde rezultă că $x=54$ km, ceea ce nu este posibil, deoarece numai în ultima zi biciclistul a parcurs 55 km. Deci, nu este posibil ca biciclistul să fi parcurs în prima zi 13 km; b) În prima zi biciclistul a parcurs $\left(\frac{x}{3}-5\right)$ km, iar în a doua zi a parcurs $\left[15+\frac{1}{3}\left(\frac{2x}{3}+5\right)\right]$ km. Din ecuația $\frac{x}{3}-5+15+\frac{1}{3}\left(\frac{2x}{3}+5\right)+55=x$ rezultă că $x=150$ km. **2.** a) $E(2)=$ $=-9$; b) $E(x)=x^2-6x-1=(x-3)^2-10\geq -10$, pentru orice număr real x. **3.** a) $A(-3,0)$, $B(0,4)$; b) B este mijlocul segmentului AP, deci $x_B=\frac{x_A+x_P}{2}$ și $y_B=\frac{y_A+y_P}{2}$, de unde rezultă că $x_P=3$ și $y_P=8$, deci $P(3,8)$. **4.** a) $\mathcal{A}_{ADC}=$ $=\frac{AB\cdot DC}{2}=48$ cm^2; b) Fie $\{F\}=DE\cap AC$. Deoarece $\measuredangle FDC+\measuredangle FCD=\measuredangle BDE+\measuredangle ACB=90^\circ$, rezultă că $EF\perp AC$. Din relațiile $EF\perp AC$ și $CB\perp AE$, deducem că D este ortocentrul triunghiului ACE, deci $AD\perp EC$. **5.** a) Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul ADC, obținem $AC=15$ cm. Cum $DC\parallel AB$, avem $\Delta DOC\sim\Delta BOA$, deci $\frac{OC}{OA}=\frac{DC}{AB}=\frac{9}{16}$. Din relațiile $\frac{OC}{OA}=\frac{9}{16}$ și $OC+OA=15$, deducem că $OA=\frac{48}{5}$ cm; b) Analog, obținem $OD=\frac{36}{5}$ cm. Cum $OA^2+OD^2=$ $=AD^2$, rezultă că diagonalele trapezului, AC și BD, sunt perpendiculare. **6.** a) Deoarece $BB'\perp(ABC)$ și $BM\perp CM$, rezultă că $B'M\perp CM$, deci $\mathcal{A}_{CMB'}=\frac{CM\cdot MB'}{2}=\frac{6\sqrt{3}\cdot 10}{2}=30\sqrt{3}$ cm^2; b) $d(A,(CMB'))=\frac{BB'\cdot\mathcal{A}_{ACM}}{\mathcal{A}_{CMB'}}=\frac{24}{5}=4{,}8$ cm.

TESTUL 2

Subiectul I. 1. b). **2.** a). **3.** a). **4.** d). **5.** c). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** c). **3.** c). **4.** b). **5.** c). **6.** d).
Subiectul al III-lea. 1. a) Dacă r este numărul merelor roșii, g al celor galbene și v al celor verzi, atunci, din relațiile $\frac{r}{2}=\frac{g}{5}=\frac{v}{6}$ și $r+g+v=52$, rezultă că $r+\frac{5r}{2}+3r=52$, de unde $r=8$; b) Notăm cu x numărul merelor galbene care ar

trebui puse în coș pentru a fi îndeplinită condiția din enunț. Cum numărul inițial al merelor galbene este 20, avem $\frac{20+x}{52+x}=\frac{1}{2}$, de unde obținem $x = 12$. **2.** a) $E(x) = (2x + 3 + 2x - 3)^2 - 14x^2 - 4x + 6 = 2x^2 - 4x + 6$; b) $E(x) \le 8 - 4x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x^2 \le 2 \Leftrightarrow |x| \le 1 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$. **3.** a) Cum $f(-2) = 0$, rezultă că $f(-4) \cdot f(-3) \cdot f(-2) \cdot f(-1) = 0$; b) Deoarece $A(-2, 0)$, $B(0, 2)$ și $M(-1, 1)$, avem $AM = MO = \sqrt{2}$, $OA = 2$. Perimetrul triunghiului AMO este egal cu $2+2\sqrt{2}$. **4.** a) Fie $CE \perp AB$, $E \in AB$. Cum $BE = 2$ cm, $\measuredangle E = 90°$ și $\measuredangle B = 60°$, rezultă că $BC = 4$ cm și $CE = 2\sqrt{3}$ cm. Aria trapezului $ABCD$ este egală cu $\frac{(AB+CD)\cdot CE}{2} = 10\sqrt{3}$ cm²; b) Deoarece $BC = CD = 4$ cm, rezultă că $\measuredangle BDC = \measuredangle CBD$. Din relația $AB \parallel CD$ deducem că $\measuredangle BDC = \measuredangle ABD$, deci $\measuredangle BDC = \measuredangle CBD = \measuredangle ABD = 60° : 2 = 30°$. **5.** a) $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 100$, deci $BC = 10$ cm; b) Deoarece $\frac{CE}{CD}=\frac{5}{4}=\frac{CB}{CA}$ și $\measuredangle ECD = \measuredangle BCA$, rezultă că $\Delta ECD \sim \Delta BCA$, deci $\frac{DE}{AB}=\frac{EC}{BC}=\frac{1}{2}$, de unde obținem $DE =$ $= 3$ cm. Din relațiile $EA = ED = 3$ cm și $BA = BD = 6$ cm rezultă că BE este mediatoarea segmentului AD, deci $BE \perp AD$. **6.** a) Fie M mijlocul laturii BC. Deoarece $OM = 2\sqrt{3}$ cm, $VO = 2$ cm și $\measuredangle VOM = 90°$, rezultă că $VM = 4$ cm, deci $\mathcal{A}_l =$ $= 3\mathcal{A}_{VBC} = 72$ cm²; b) Avem $\measuredangle((ABC), (VBC)) = \measuredangle(VM, OM) = 30°$.

TESTUL 3

Subiectul I. 1. b). **2.** a). **3.** b). **4.** a). **5.** d). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** c). **3.** a). **4.** a). **5.** b). **6.** c).
Subiectul al III-lea. 1. a) Notăm cu c prețul cadoului, cu t suma Teodorei și cu a suma lui Andrei. Pentru $c = 100$, am avea $t = 75$ de lei, $a = 60$ de lei și $75 + 60 \neq 270$. Deci, prețul cadoului nu poate fi 100 de lei; b) Din $t + a = 270$ rezultă că $\frac{3}{4}c+\frac{3}{5}c = 270$, de unde $c = 200$ de lei, $t = 150$ de lei și $a = 120$ de lei. **2.** a) $E(x) = 2x^2 + 3x + 1 = (x + 1)(2x + 1)$; b) Pentru $n = 3k + 1$, $E(n) = (3k + 2)(6k + 3) \vdots 3$, iar pentru $n = 3k + 2$, $E(n) = (3k + 3)(6k + 5) \vdots 3$. **3.** a) $f(4) = 0$, deci $f(0) \cdot f(2) \cdot f(4) = 0$; b) $A(4, 0)$; $B(0, -2)$; $M(2, -1)$; $\mathcal{A}_{AOM} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{AOB} = 2$. **4.** a) $BDMP$ este trapez isoscel ortodiagonal, iar $\mathcal{A}_{BDMP} = \frac{MB \cdot DP}{2} = \frac{9}{2}$ cm²; b) $AQ = AP = 1$ cm, deci $\measuredangle MQA = 45°$. Deoarece $\measuredangle QMB = 45°$ și $\measuredangle MBD = 45°$, rezultă că $MQ \perp BD$. În triunghiul BMD avem: $DA \perp MB$ și $MQ \perp BD$, $DA \cap MQ = \{Q\}$, deci Q este ortocentrul triunghiului BMD. **5.** a) Deoarece $\measuredangle BCD = 120°$, rezultă că $\measuredangle CBA = 60°$, iar $\measuredangle CBD = \measuredangle DBA = 30°$. Triunghiul BCD este isoscel, cu $BC = DC$. Dacă $CT \perp AB$, $T \in AB$, rezultă că $CT = AD = 2\sqrt{3}$ cm, $TB = 2$ cm și $BC = 4$ cm; b) Fie $OM \perp AB$, $M \in AB$. Deoarece $\Delta AOM \sim \Delta ACT$, rezultă că $\frac{OM}{CT}=\frac{AO}{AC}$, de unde $OM = \frac{6\sqrt{3}}{5}$ cm. **6.** a) $ABMB'$ este paralelogram, deci $MB \parallel B'A$. Cum $CC' \parallel AA'$, avem că $\measuredangle(MB, CC') = \measuredangle(B'A, AA') = \measuredangle B'AA'$. Se obține $AA' = 6\sqrt{3}$ cm și $B'A = 12$ cm, deci $\measuredangle B'AA' = 30°$. b) În triunghiul $MA'C'$ constatăm că $C'B' = \frac{MA'}{2}$, deci $\measuredangle MC'A' = 90°$, așadar $MC' \perp A'C'$. Pe de altă parte, din $CC' \perp (A'B'C')$ și $MC' \subset (A'B'C')$, rezultă că $CC' \perp MC'$. Deducem că $MC' \perp (ACC')$, prin urmare $d(M, (ACC')) = MC' = 6\sqrt{3}$ cm.

TESTUL 4

Subiectul I. 1. c). **2.** d). **3.** b). **4.** c). **5.** c). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. d). **2.** d). **3.** c). **4.** d). **5.** b). **6.** d).
Subiectul al III-lea. 1. a) Fie a, b, c sumele celor trei copii. Atunci $a + b + c = 57$, $a = 2b - 1$, $c = 2b - 7$. Bianca nu poate avea 15 lei, deoarece $b = 15$ ar conduce la $a = 29$, $c = 23$ și $57 \neq 29 + 23 + 15$; b) $a = 25$; $b = 13$; $c = 19$.

2. b) $E(n^2)+E(n)-1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$. **3.** a) $f(\sqrt{5})\cdot f(-\sqrt{5})=(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=4$; b) Simetricul este $P'(-1, 4)$ și $f(-1)=1+3=4$, deci $P'\in G_f$. **4.** a) $\measuredangle BMC=\measuredangle AMC-\measuredangle AMB=45°-30°=15°$, deoarece $AB=AM$ și $\measuredangle MAB=120°$; b) Se constată că $\measuredangle PAB=\measuredangle PBA=30°$, deci $\Delta APB\sim\Delta MAB$, ceea ce conduce la $\frac{AB}{MB}=\frac{PB}{AB}\Leftrightarrow AB^2=AP\cdot MB$. **5.** a) În ΔMAD, $MD=\frac{AD}{2}=6$ cm, $MA=6\sqrt{3}$ cm. Atunci $\mathcal{P}_{ABCD}=(24+12\sqrt{3})$ cm <45 cm; b) $\mathcal{A}_{MAD}=18\sqrt{3}$ cm^2, $\mathcal{A}_{ABCD}=$ $=72\sqrt{3}$ cm^2, deci $\mathcal{A}_{MAD}=25\%$ din $\mathcal{A}_{ABCD}$. **6.** a) $VA=VC$ și $\measuredangle AVC=90°$, deci ΔAVC este dreptunghic isoscel, iar $VA=$ $=6$ cm și $VO=3\sqrt{2}$ cm. Atunci $\mathcal{V}_{VABCD}=\frac{\mathcal{A}_{ABCD}\cdot VO}{3}=36\sqrt{2}$ cm^3; b) Dacă M este mijlocul lui BC, atunci $\measuredangle((VO),(VBC))=\measuredangle OVM$, iar $\operatorname{tg}(\measuredangle OVM)=\frac{OM}{OV}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

TESTUL 5

Subiectul I. 1. b). **2.** d). **3.** c). **4.** c). **5.** b). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. d). **2.** a). **3.** c). **4.** a). **5.** d). **6.** b).
Subiectul al III-lea. 1. a) Lățimea dreptunghiului nu poate fi egală cu 15 m, deoarece am avea $L=40$ m și $19\cdot 35\neq$ $\neq 600$; b) Din $l\cdot L=600$ și $(l+4)(L-5)=600$ se obțin: $L=30$ m, $l=20$ m, $\mathcal{P}_{ABCD}=100$ m. **2.** a) $E(x)=$ $=\frac{x^2-2x+1}{x-2}\cdot\frac{(x-2)(x-5)}{x(x-1)^2}=\frac{x-5}{x}$; b) $E(n)\in\mathbb{Z}$ implică $n\in\{-1,-5\}$. **3.** a) $A(-\sqrt{2},0)$; $B(0,2)$; $\mathcal{A}_{AOB}=\frac{OA\cdot OB}{2}=$ $=\sqrt{2}$; b) $x\in\left(-\infty,-2\sqrt{2}-2\right]$. **4.** a) $AC=BD$, deci ΔMNP este echilateral, cu $MN=2$ cm și $\mathcal{A}_{MNP}=\sqrt{3}$ cm^2; b) $PO\perp BD\Rightarrow\Delta POB\sim\Delta DAB$. Rezultă că $AD=\frac{\sqrt{3}AB}{2}$ și din ΔDAB obținem $AB=\frac{8}{\sqrt{7}}$ cm. **5.** a) $AB=6\sqrt{2}$ cm, iar dacă $CT\perp AD$, $T\in AD$, se obține că $DC=9$ cm; b) Deoarece $DM=3\sqrt{6}$ cm, $MC=3\sqrt{3}$ cm, se constată că $DC^2=$ $=MD^2+MC^2$ și astfel $\measuredangle DMC=90°$. **6.** a) $\mathcal{A}_{ABCD}=16$ cm^2, deci $AB=4$ cm. Deoarece $4\cdot AB\cdot AA'=96$ cm^2, rezultă că $AA'=6$ cm; b) Dacă P este mijlocul muchiei BB', atunci $\operatorname{pr}_{(BCC')}MN=CP=5$ cm.

TESTUL 6

Subiectul I. 1. a). **2.** c). **3.** a). **4.** c). **5.** a). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. b). **2.** c). **3.** a). **4.** c). **5.** b). **6.** a).
Subiectul al III-lea. 1. a) Nu, deoarece am obține $200=\overline{2y}+\overline{z2}$; b) Se obține $89x=y+10z$, de unde deducem că $\overline{xyz}=$ $=198$. **2.** b) $E_1(x)=-8x+8$, deci $E_1(n)+E_2(n)=4n+20$. Pentru $n=2k+1$ avem $E_1(n)+E_2(n)=8k+24$, care se divide cu 8. **3.** a) $\frac{f(1)-f(\sqrt{2})}{\sqrt{2}-1}=2$; b) $A\left(\frac{3}{2},0\right)$, $B(0,3)$; $\mathcal{A}_{PAB}=\frac{PB\cdot OA}{2}$, de unde $PB=4$, iar punctele sunt $P_1(0,-1)$ și $P_2(0,7)$. **4.** a) $BD=9\sqrt{2}$ cm; $\sin(\measuredangle ABD)=\frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{2}$; b) Dacă $\{N\}=MC\cap BD$, atunci $\Delta MNB\sim\Delta CND$, de unde $BN=3\sqrt{2}$ cm. În ΔBAE, MN este linie mijlocie, astfel că $AE\parallel MN$, adică $AE\parallel MC$. **5.** a) $BD=6\sqrt{2}$ cm, deci $BA=$ $=6$ cm și $\mathcal{P}_{ABCD}=24$ cm; b) Deoarece $OT=\frac{BD}{2}$, rezultă că BTD este triunghi dreptunghic în T și $\mathcal{A}_{BTD}=9\sqrt{3}$ cm^2.
6. a) Fie M mijlocul laturii BC. Deoarece $VA=2\sqrt{7}$ cm și $OA=4$ cm, rezultă că $VO=2\sqrt{3}$ cm și $OM=2$ cm. Din triunghiul VOM se obține $VM=4$ cm; b) $OM=PO=2$ cm, deci $\measuredangle PMO=45°$. Cum $\measuredangle VMO=60°$ și $\measuredangle PMO=45°$, rezultă că $\measuredangle((VBC),(PBC))=\measuredangle VMP=15°$.

TESTUL 7

Subiectul I. 1. c). **2.** b). **3.** a). **4.** b). **5.** b). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. b). **2.** c). **3.** d). **4.** c). **5.** c). **6.** d).
Subiectul al III-lea. 1. a) Nu, deoarece dacă numărul vazelor ar fi 6, numărul trandafirilor ar fi $3 \cdot 6 + 1 = 19$, dar $5 \cdot (6 - 3) = 15$, contradicție; b) Notăm cu t numărul trandafirilor și cu v numărul vazelor; $t = 3v + 1 = 5(v - 3)$, de unde $v = 8$ și $t = 25$. **2.** b) $E(a) \leq 0 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 9 \leq 12 \Leftrightarrow (a-3)^2 \leq 12$ și, cum $a \in \mathbb{Z}$, obținem $a \in \{0, 1, \ldots, 6\}$. **3.** b) Punctele de intersecție dintre graficul funcției f și axele de coordonate sunt $A(3, 0)$ și $B(0, 3)$. Cum $OA = OB$ și $MA = MB$, rezultă că OM este mediatoarea segmentului AB, deci $OM \perp AB$. **4.** a) $AB^2 = BD \cdot BC \Leftrightarrow AB^2 = BD \cdot (BD + DC) \Leftrightarrow 4^2 = 2 \cdot (2 + 6) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 16 = 2 \cdot 8 \Leftrightarrow 16 = 16$ (A); b) Din $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBA$ și $\frac{AB}{BD} = \frac{CB}{AB}$ rezultă că $\Delta ABD \sim \Delta CBA$, prin urmare $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ACB$.

5. a) Se arată că înălțimea trapezului este $3\sqrt{3}$ cm, iar aria este egală cu $27\sqrt{3}$ cm^2; b) Se dovedește că $AC \perp BC$, deci $d(A, BC) = AC = 6\sqrt{3}$ cm. **6.** a) Se calculează $AM = 12$ cm, $OM = 4$ cm și apoi, cu teorema lui Pitagora în ΔVOM ($\sphericalangle O = 90°$), se determină $VM = 4\sqrt{3}$ cm; b) Cum $BC \perp (VAM)$, rezultă că $(VAM) \perp (VBC)$, așadar $\text{pr}_{(VBC)} O \in VM = (VAM) \cap$ $\cap (VBC)$. Astfel, punctul P se află pe mediana VM a triunghiului VBC. Din teorema catetei, $\frac{VP}{PM} = \frac{VO^2}{OM^2} = 2$, prin urmare P este centrul de greutate al triunghiului VBC.

TESTUL 8

Subiectul I. 1. b). **2.** a). **3.** d). **4.** b). **5.** c). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. a). **2.** c). **3.** b). **4.** a). **5.** d). **6.** d).
Subiectul al III-lea. 1. a) Dacă bunica ar avea 6 nepoți, atunci ar avea $6 \cdot 3 + 2 = 20$ de mere și $6 \cdot 8 + 14 = 62$ de nuci. Cum $62 \neq 3 \cdot 20$, bunica nu poate avea 6 nepoți; b) Fie n numărul nepoților; atunci $3(3n + 2) = 8n + 14$, de unde rezultă $n = 8$. **2.** $E(x) = x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$; a) $E(2023) - E(2022) = 2024 \cdot 2025 - 2023 \cdot 2024 = 2024 \cdot 2$; b) $\frac{1}{E(n)} =$ $= \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$. Rezultă că $\frac{1}{E(0)} + \frac{1}{E(1)} + \ldots + \frac{1}{E(8)} + 0{,}1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + 0{,}1 = 1 - \frac{1}{10} +$ $+ 0{,}1 = 1 \in \mathbb{N}$. **3.** a) Avem $A(-4, 0)$, $B(0, -4)$ și $AB = 4\sqrt{2}$; b) $\mathcal{A}_{MAB} = \frac{AM \cdot OB}{2} \Rightarrow AM = 2$, deci $OM = 2$ sau $OM = 6$, de unde $M(-2, 0)$ sau $M(-6, 0)$. **4.** a) Deoarece $AE \perp BC$ și $DE \perp BC$, rezultă că punctele A, D și E sunt coliniare; b) $AD =$ $= (12 - 5\sqrt{3})$ cm $\simeq 3{,}3...$ cm. **5.** a) $\sphericalangle AMC = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \sphericalangle ABC = 60°$. Triunghiul MDC este isoscel, cu $\sphericalangle DMC = 60°$, așadar este echilateral; b) Cum $\sphericalangle ACD = 60° - \sphericalangle DCB = \sphericalangle BCM$, $CD = CM$ și $CA = CB$, rezultă că $\Delta ADC \equiv \Delta BMC$ (L.U.L.), deci $BM = AD$. Rezultă că $AM = AD + DM = BM + MC$. **6.** a) $\mathcal{A}_{ABC} = 25\sqrt{3}$ cm^2, deci volumul prismei este egal cu $375\sqrt{3}$ cm^3; b) Cum $AB \parallel A'B'$ și dreapta AB este conținută în planul (ABC), iar dreapta $A'B'$ este conținută în planul $(A'B'C)$, dreapta comună planelor este dreapta d, care conține punctul C și este paralelă cu AB și $A'B'$. Dacă M este mijlocul lui AB, iar N este mijlocul lui $A'B'$, atunci $MC \perp d$ și $NC \perp d$; de aici, $\sphericalangle((ABC), (A'B'C)) = \sphericalangle NCM$. În ΔNMC, dreptunghic în M, $\text{tg}(\sphericalangle NCM) = \frac{MN}{CM} = \sqrt{3}$, deci $\sphericalangle NCM = 60°$.

TESTUL 9

Subiectul I. 1. b). **2.** c). **3.** b). **4.** a). **5.** d). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** d). **3.** d). **4.** b). **5.** c). **6.** b).

Subiectul al III-lea. 1. a) $67 + 6 + 7 \neq 93$ și $76 + 7 + 6 \neq 93$, deci nepoții nu pot avea 6 ani, respectiv 7 ani; b) Fie $\overline{ab}$ vârsta bunicului; atunci $\overline{ab} + a + b = 93$, deci $11a + 2b = 93$. Rezultă că $\overline{ab} = 78$. **2.** a) $E(x) = 5 - 2x$; $E(a) + E(b) = 10 - 2(a + b) = -200$; b) Fie $S = E(1) + E(2) + ... + E(104)$ și $S = E(104) + E(103) + ... + E(1)$. Rezultă că $2S = [E(1) + E(104)] + [E(2) + E(103)] + ... + [E(104) + E(1)] = -200 \cdot 104 \Rightarrow S = -10400$. **3.** a) $f(-1) \neq 0$, deci M nu este situat pe graficul funcției f; b) Fie $MN \perp G_f$, $N \in G_f$, $d(M, G_f) = MN$. Cum $\Delta BAO \sim \Delta BMN$, rezultă că $\frac{BA}{BM} = \frac{AO}{MN}$, de unde $MN = 3$. **4.** a) Din ΔABC dreptunghic în A și $BC = 2AB$ rezultă că $\measuredangle ACB = 30°$ și $\measuredangle ABC = 60°$. Triunghiul ABE este dreptunghic isoscel, deci $\measuredangle ABE = 45°$. Rezultă că $\measuredangle EBC = 15°$; b) Fie $AB = a$; $BE = a\sqrt{2}$ și $BD = \frac{BC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$. Prin urmare, ΔBDE este isoscel și, cum $\measuredangle EBD = 60°$, acesta este echilateral. **5.** a) BM este mediană în ΔBOA, deci acesta este isoscel, $BO = BA$. Cum $BO = AO$, rezultă că triunghiul BOA este echilateral; b) Din ΔBOC dreptunghic în B deducem că $\measuredangle BCO = 30°$ (deoarece $\measuredangle BOC = 60°$). Dar $\measuredangle ABC = 90° - \measuredangle OBA = 30°$. Rezultă că ΔABC este isoscel, cu $AC = AB$. Prin urmare, $AC = AB = AO$, deci C este simetricul lui O față de A. **6.** a) Fie $AO \cap BC = \{M\}$, M – mijlocul segmentului BC. Cum $AM \perp BC$ și $VM \perp BC$, rezultă că $\measuredangle((VBC), (ABC)) = \measuredangle VMO = 60°$. Folosind și $VM = 6$ cm, deducem că $VO = 3\sqrt{3}$ cm, $OM = 3$ cm și $AB = 6\sqrt{3}$ cm. Rezultă că aria bazei piramidei este $27\sqrt{3}$ cm^2 și volumul piramidei este 81 cm^3; b) Cum $(VAM) \perp (VBC)$, considerând $PN \perp VM$, $N \in VM$, rezultă că $PN \perp (VBC)$. Prin urmare, condiția problemei este $PO = PN$. Din $\Delta VNP \sim \Delta VOM$ deducem că $\frac{VP}{VM} = \frac{PN}{OM}$ și, de aici, $PO = \sqrt{3}$ cm.

TESTUL 10

Subiectul I. 1. d). **2.** a). **3.** d). **4.** c). **5.** b). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. d). **2.** b). **3.** d). **4.** d). **5.** c). **6.** c).
Subiectul al III-lea. 1. a) Dacă a doua zi ar vizita 10 obiective, în zilele următoare turistul ar vizita minim 11, 12, 13, respectiv 14 obiective. Cum $5 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 > 52$, răspunsul este negativ; b) Fie 5, a, b, c, d, e numărul obiectivelor vizitate în cele 6 zile. Astfel, $52 = 5 + a + b + c + d + e \geq 5 + a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4)$, de aici $52 \geq 5a + 15$, adică $5a \leq 37$. Cum $a \in \mathbb{N}$, rezultă că $a \leq 7$. Cum turistul poate vizita, în cele 6 zile, 5, 7, 8, 9, 10, 13 obiective, rezultă că $a_{max} = 7$. **2.** $E_1(x) = \frac{x^2}{x-1}$, $E_2(x) = \frac{2x}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; a) $E_1(-1) \cdot E_1\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$; b) $a = \frac{n^2}{n-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2n}{n-1} = n \in \mathbb{N}$. **3.** a) $A'(3, 2)$, $B'(1, -2)$; b) $A'B' = \sqrt{(3-2)^2 + (2+2)^2} = 2\sqrt{5}$. **4.** *Soluția 1.* a) $\mathcal{A}_{DMN} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{ADM} - \mathcal{A}_{MBN} - \mathcal{A}_{DCN} = 5$ cm^2; b) $DM = 5$ cm; $DN = 2\sqrt{5}$ cm; $\mathcal{A}_{DMN} = \frac{DM \cdot DN \cdot \sin(\measuredangle MDN)}{2} \Rightarrow \sin(\measuredangle MDN) = \frac{2\mathcal{A}_{DMN}}{DM \cdot DN} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. *Soluția 2.* a) Cum $DM = 5$ cm, $MN = \sqrt{5}$ cm, $DN = 2\sqrt{5}$ cm și $DM^2 = MN^2 + DN^2 \Rightarrow \Rightarrow \Delta DNM$ este dreptunghic în N. Rezultă că $\mathcal{A}_{DMN} = \frac{DN \cdot MN}{2} = 5$ cm^2; b) $\sin(\measuredangle MDN) = \frac{MN}{DM} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. **5.** a) Se observă că $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$ și $\measuredangle MAN \equiv \measuredangle BAC$, deci $\Delta AMN \sim \Delta ACB$. Prin urmare, $\measuredangle AMN \equiv \measuredangle ACB$; b) $\measuredangle MAP = 90° - \measuredangle B = \measuredangle C$ și, cum $\measuredangle AMP = \measuredangle C$, rezultă că ΔAPM este isoscel, cu $MP = AP$. Analog, deducem că $AP = PN$. Rezultă că $MP = PN$, deci P este mijlocul segmentului MN. **6.** a) Fie r raza axului după strunjire, R raza axului inițial, iar h lungimea axului. Avem $\frac{r}{R} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$, $h = 1400$ mm și $\frac{v}{\mathcal{V}} = \frac{\pi r^2 h}{\pi R^2 h} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{16}{25} = 0{,}64$, deci $v = 0{,}64 \cdot \mathcal{V}$; b) Din $M - m = p\% \cdot M$ deducem că $p = 100 \cdot \frac{M-m}{M}$. Dar $M = \rho \cdot \mathcal{V}$ și $m = \rho \cdot v$, unde ρ este densitatea oțelului. Rezultă că $p = 100\left(\frac{\mathcal{V} - v}{\mathcal{V}}\right) = 100\left(1 - \frac{v}{\mathcal{V}}\right) = 36$. Prin urmare, prin strunjire se pierde 36% din masa inițială.

TESTUL 11

Subiectul I. 1. d). **2.** b). **3.** c). **4.** b). **5.** b). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** c). **3.** b). **4.** b). **5.** c). **6.** c).
Subiectul al III-lea. 1. a) Deoarece 46 împărțit la 6 dă câtul 7 și restul 4, iar împărțit la 8 dă câtul 5 și restul 6, rezultă că puteau fi 46 de bomboane în pungă; b) Fie n numărul minim de bomboane din pungă. Avem $n = 6a + 4$ și $n = 8b + 6$, unde a și b sunt numere naturale, deci $n + 2 = 6a + 6$ și $n + 2 = 8b + 8$. Prin urmare, $n + 2$ este cel mai mic multiplu comun al numerelor 6 și 8, adică $n + 2 = 24$ sau $n = 22$. **2.** a) $E(3) = -1$; b) $E(k) = k^2 - 6k + 8 = (k - 4)(k - 2)$. Pentru $k = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$, avem $E(k) = E(2m) = (2m - 4)(2m - 2) = 4(m - 2)(m - 1)$. Cum $m - 2$ și $m - 1$ sunt numere întregi consecutive, rezultă că 2 divide $(m - 2)(m - 1)$, deci 8 divide $4(m - 2)(m - 1) = E(2m) = E(k)$. **3.** a) Ecuația $f(2a) = a^2 + 5$ este echivalentă cu $a^2 - 2a + 1 = 0$ sau $(a - 1)^2 = 0$. Soluția este $a = 1$; b) Cum $AB \perp BC$, rezultă că distanța de la punctul C la dreapta AB este $BC = 4\sqrt{2}$. **4.** a) $BC = \sqrt{61}$ cm; b) Cum $\frac{DC}{DA} = \frac{2}{3} = \frac{DA}{AB}$ și $\sphericalangle CDA = \sphericalangle DAB = 90°$ rezultă că $\Delta CDA \sim \Delta DAB$, deci $\sphericalangle CAD = \sphericalangle DBA$, de unde deducem că $90° - \sphericalangle CAB = \sphericalangle DBA$ sau $\sphericalangle CAB + \sphericalangle DBA = 90°$, deci $\sphericalangle AOB = 90°$, unde $\{O\} = AC \cap BD$. **5.** a) Avem $DO = OB = \frac{AC}{2} = 6$ cm $= BD$, deci triunghiul BOD este echilateral și atunci $\mathcal{A}_{BOD} = \frac{BD^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ cm^2; b) $\sphericalangle BOD = \sphericalangle DOC + \sphericalangle BOC = 2(\sphericalangle DAC + \sphericalangle BAC) = 2 \cdot \sphericalangle BAD$, deci $\sphericalangle BAD = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BOD = 30°$. **6.** a) Fie M mijlocul segmentului $B'C'$. Deoarece $A'M \perp B'C'$, $A'M \perp BB'$ (căci $BB' \perp (A'B'C')$) și $BB' \cap B'C' = \{B'\}$, rezultă că distanța de la A' la planul (BCC') este $A'M = 6\sqrt{3}$ cm; b) Fie N mijlocul segmentului $A'B'$. Observăm că $\frac{NO}{NC'} = \frac{1}{3} = \frac{BD}{BC'}$, deci $DO \parallel BN$, de unde deducem că $DO \parallel (ABB')$.

TESTUL 12

Subiectul I. 1. a). **2.** c). **3.** b). **4.** d). **5.** b). **6.** d).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** b). **3.** a). **4.** b). **5.** c). **6.** b).
Subiectul al III-lea. 1. a) 25%; b) $a = 12$, $b = 27$, $c = 48$. **2.** a) $E(n) = n^2 + n + 1$, deci $n^2 < E(n) < n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$; b) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $E(n)$ este cuprins între pătratele perfecte consecutive n^2 și $(n + 1)^2$, deci $E(n)$ nu poate fi pătratul unui număr natural. Cum $E(0) = 1^2$, rezultă că $n = 0$ este singura soluție a problemei. **3.** a) Din condițiile $f(-2) = -2a + b = 0$ și $f(0) = b = 4$, rezultă că $a = 2$ și $b = 4$; b) $\mathcal{P}_{AOB} = 2 + 4 + \sqrt{20} < 6 + \sqrt{25} = 11$. **4.** a) Deoarece $AG = CE$, $DA = DC$ și $\sphericalangle GAD = \sphericalangle ECD = 90°$, rezultă că $\Delta GAD \equiv \Delta ECD$, deci $DG = DE$. Așadar triunghiul DEG este isoscel; b) Cum $\sphericalangle ADG = \sphericalangle CDE = 30°$ ($\Delta GAD \equiv \Delta ECD$) avem $\sphericalangle GDE = 90°$. Din relațiile $\sphericalangle GDE = 90°$ și $\sphericalangle GDF = 45°$, deducem că DF este bisectoarea unghiului GDE, deci $\sphericalangle(DF, EG) = 90°$ (căci $DG = DE$). **5.** a) $\mathcal{A}_{CEO} = 24$ cm^2; b) În triunghiul ACE, AB și EO sunt mediane, deci F este centrul de greutate și atunci $BF = \frac{AB}{3} = 4$ cm $= BC$. Unghiul BFC are măsura de 45°. **6.** a) Avem $AC = 4\sqrt{2}$ cm și $AA' = \sqrt{A'C^2 - AC^2} = 4 = AB = BC$, deci $ABCDA'B'C'D'$ este cub; b) $d(B, A'C) = \frac{A'B \cdot BC}{A'C} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ cm.

TESTUL 13

Subiectul I. 1. b). **2.** c). **3.** d). **4.** c). **5.** c). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** a). **3.** c). **4.** a). **5.** b). **6.** d).

Subiectul al III-lea. 1. a) 12 zile; b) 27 de zile. **2.** a) $E(x) = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x^2+1} \cdot 4 = \frac{4x}{x^2+1}$; b) $-2 < E(x) \Leftrightarrow -1 < \frac{2x}{x^2+1} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -x^2 - 1 < 2x \Leftrightarrow 0 < (x+1)^2$; $E(x) < 2 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1} < 1 \Leftrightarrow 0 < (x-1)^2$. **3.** a) $f(0) = 6 \Rightarrow A(0, 6) \in G_f$, $f(7) = 3 \Rightarrow B(7, 3) \in G_f$; b) $AC^2 = 29 = BC^2$, $AB^2 = 58 \Rightarrow AC^2 + CB^2 = AB^2$. Deci, triunghiul ABC este dreptunghic isoscel cu ipotenuza AB. **4.** $\measuredangle A = 30°$, $\measuredangle B = 60°$, $\measuredangle C = 90°$; b) $\mathcal{P}_{MBC} = 3 \cdot 6$ cm $= 18$ cm. **5.** a) Cum DE este paralelă și egală cu BC, rezultă că $BCED$ este paralelogram, deci punctele B, N și E sunt coliniare; b) $p = 25$. **6.** a) 3000 cm^3; b) Fie $OE \perp CV$, $E \in CV$. Cum $BO \perp (VAC)$ și $OE \perp CV$, rezultă că $BE \perp CV$, deci unghiul dintre planele (VAC) și (VBC) este egal cu unghiul BEO. Avem $\text{tg}(\measuredangle BEO) = \frac{BO}{OE} = \frac{5}{4}$.

TESTUL 14

Subiectul I. 1. d). **2.** c). **3.** b). **4.** c). **5.** b). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** a). **3.** a). **4.** b). **5.** a). **6.** d).

Subiectul al III-lea. 1. a) În prima zi se plantează 84 de pomi. Dacă $84 = \frac{p}{100} \cdot 160$, obținem $p = 52{,}5$; b) $m + n = 160$ și $\frac{3m}{5} + \frac{2n}{5} = 84$, de unde $m = 100$ și $n = 60$. **2.** b) $S = E(1) + E(5) + \ldots + E(37) = 4 \cdot 10 = 40$. **3.** a) Cum O este mijlocul lui AC, rezultă că $x_O = \frac{x_A + x_C}{2}$ și $y_O = \frac{y_A + y_C}{2}$, de unde concluzia; b) $B(3, -2)$; $f(x) = -2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. **4.** a) Fie S și T punctele de tangență ale semicercului cu AB, respectiv AC; atunci $\Delta SBD \equiv \Delta TCD$ (C.U.), deci $BD = DC$; b) Avem $AD \perp BC$. Raza semicercului este înălțimea DS a triunghiului dreptunghic ADB, iar $DS = 12$ cm. **5.** a) $\measuredangle ADB \equiv \measuredangle DBC$ (alterne interne), deci $\measuredangle ADB \equiv \measuredangle ABD$, de unde $AD = AB$; b) Din a) obținem că $AD = AC$. Apoi, $\measuredangle DAC = \measuredangle ACB = 80°$. Avem: $\measuredangle ADB = 40°$, $\measuredangle ADC = 50°$, deci $\measuredangle BDC = 10°$. **6.** a) $BD = 8\sqrt{2}$ cm; b) Completăm cubul $ABCDFEGH$. Observăm că $AE \parallel DH$, așadar $\measuredangle(AE, BD) = \measuredangle(DH, BD) = \measuredangle BDH = 60°$, deoarece triunghiul BDH este echilateral.

TESTUL 15

Subiectul I. 1. d). **2.** d). **3.** c). **4.** b). **5.** d). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** c). **3.** b). **4.** a). **5.** d). **6.** a).
Subiectul al III-lea. 1. a) În prima zi; b) 270 kg. **2.** b) Obținem că $x^2 \leq 1$, prin urmare $x \in \{-1, 0, 1\}$. Ținând cont și de condițiile de existență, reținem doar valoarea $x = 0$. **3.** a) $f(-1) = 3$, $f(1) = -1$, deci $f(-1) - f(1) = 4$; b) $A(1, -1)$, $B(-3, 7)$; mijlocul segmentului AB este $M(-1, 3)$. **4.** a) Din triunghiurile dreptunghice AOB și COD obținem $AB^2 + CD^2 = AO^2 + OD^2 + OC^2 + OB^2$, iar în mod analog $AD^2 + BC^2 = AO^2 + OD^2 + OC^2 + OB^2$; b) Construim $CM \perp AB$, $M \in AB$; atunci $BC^2 - AD^2 = 49$. Folosind relația de la punctul anterior, vom obține $AD = 12$ cm și $\mathcal{A}_{ABCD} = 150$ cm^2. **5.** a) Folosim asemănarea $\Delta BEM \sim \Delta BDC$; b) Vom demonstra că $AE \perp DB$. Deoarece $\frac{DE}{DA} = \frac{DA}{DB}$ și $\measuredangle D$ este comun, rezultă că $\Delta DEA \sim \Delta DAB$, deci $\measuredangle AED = 90°$. Așadar, oricare ar fi punctul $F \in DB$, vom avea că $AF \geq AE$. **6.** a) $B'M = 4$ cm, $BM = 5$ cm, deci $BB' = 3$ cm, iar $\mathcal{A}_t = 224$ cm^2; b) Fie $\{O'\} = A'C' \cap B'D'$ și $MT \parallel C'O'$, $T \in D'B'$. Deoarece $C'O' \perp D'B'$ și $C'O' \perp DD'$, rezultă că $C'O' \perp (BDD')$. Atunci $MT \perp (BDD')$, iar $d(M, (BDD')) = MT = \frac{C'O'}{2} = 2\sqrt{2}$ cm.

TESTUL 16

Subiectul I. 1. d). **2.** c). **3.** b). **4.** d). **5.** c). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. a). **2.** b). **3.** b). **4.** c). **5.** a). **6.** b).

Subiectul al III-lea. 1. a) Nu este posibil; b) 100 de probleme. **2.** b) $E(x) = 9 + (x+1)^2 \geq 9$, deci $\frac{1}{E(x)} \leq \frac{1}{9}$, oricare ar fi numărul real x. **3.** a) $f(-2) = 1$, $f(0) = -1$, deci $f(-2) \cdot f(0) = -1$; b) Dacă $A(-1, 0)$ și $B(0, -1)$ sunt punctele de intersecție a graficului cu Ox, respectiv Oy, atunci $\sphericalangle MBA = 90°$, deci $d(M, G_f) = MB = \sqrt{2}$. **4.** a) Din $\mathcal{A}_{ADC} = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABD}$, rezultă $DC = 2BD$. Deoarece $AD^2 = BD \cdot DC$, obținem $BD = 4$ cm și $DC = 8$ cm, deci $BC = 12$ cm; b) În ΔABC, $AB^2 = BD \cdot BC$, de unde rezultă $AB = 4\sqrt{3}$ cm, iar $\sin(\sphericalangle BCA) = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **5.** a) $BCDM$ este un paralelogram, deci $MB = DC = 6$ cm și $DM = BC = 12$ cm. În ΔADM cu $\sphericalangle ADM = 30°$, avem $AM = \frac{DM}{2} = 6$ cm $= MB$; b) $\mathcal{A}_{ABCD} = 54\sqrt{3}$ cm^2 $= \sqrt{8748}$ cm^2 $> \sqrt{8100}$ cm^2. **6.** a) Avem: $VB = 2MN = 7$ cm; $AO = 4\sqrt{3}$ cm; $AB = 12$ cm. Atunci $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$ cm^2; b) Dacă T este mijlocul segmentului AC, rezultă $MP \parallel BT$, $MN \parallel VB$, $MN \cap MP = \{M\}$ și $BT \cap VB = \{B\}$, prin urmare $(MNP) \parallel (VOB)$.

TESTUL 17

Subiectul I. 1. d). **2.** b). **3.** c). **4.** c). **5.** d). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. a). **2.** c). **3.** b). **4.** c). **5.** b). **6.** b).
Subiectul al III-lea. 1. a) Nu; b) Din $m - 2 = 5(f-2)$ și $m + 6 = 3(f+6)$ obținem $f = 10$ ani (și $m = 42$ de ani). **2.** b) Avem $7 + \sqrt{3}(t-4) \in \mathbb{N}$, de unde $t = 4$. **3.** a) $x = \left(\frac{5}{2\sqrt{2}} - \frac{7}{\sqrt{2}}\right) : \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{-9}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{-3}{4}$; b) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{3}{4\sqrt{5}}\right) \cdot \sqrt{5} = \frac{7}{4\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = \frac{7}{4}$. Atunci $x + y = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1 \in \mathbb{N}$. **4.** a) Deoarece $\sphericalangle NAB = 45°$, $\sphericalangle ABN = 60°$, rezultă $\sphericalangle ANB = \sphericalangle MNC = 75°$. Ținând cont că $MB = BC$, iar $\sphericalangle MBC = 45°$, obținem $\sphericalangle BMC = 75°$. Astfel, triunghiul MNC este isoscel; b) Fie T mijlocul segmentului AB. În triunghiul echilateral ABM avem $MT \perp AB$ și $G \in MT$. În triunghiul ABC, OT este linie mijlocie, deci $OT \perp AB$. Din unicitatea perpendicularei în punctul T pe dreapta AB rezultă concluzia. **5.** a) Deoarece MN este mediatoare, rezultă $MB = MC = x$ și $AM = 8 - x$. Din triunghiul CAM, obținem $x = 6{,}25$ cm. Așadar, $\mathcal{P}_{MBC} = 2x + BC = 22{,}5$ cm; b) În triunghiul TBC avem $TN \perp BC$, $BA \perp TC$ și $BA \cap TN = \{M\}$, deci M este ortocentrul triunghiului. Astfel, $CM \perp TB$. **6.** a) $BC = 3$ cm, $AC' = \sqrt{48}$ cm $< \sqrt{49}$ cm; b) Deoarece $MC = \sqrt{3}$ cm, constatăm că $MB \perp BD$. Din relațiile: $MB \perp BD$, $MB \perp BB'$ și $BD \cap BB' = \{B\}$, rezultă concluzia.

TESTUL 18

Subiectul I. 1. d). **2.** c). **3.** b). **4.** b). **5.** c). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. b). **2.** c). **3.** d). **4.** a). **5.** b). **6.** b).
Subiectul al III-lea. 1. a) Nu; b) 8 lei. **2.** b) $E(\sqrt{8}) - E(\sqrt{2}) = E(\sqrt{18}) - E(\sqrt{8}) = 2\sqrt{2}$. **3.** a) $x = \left(\frac{6}{3\sqrt{7}} - \frac{4}{4\sqrt{7}} + \frac{6}{2\sqrt{7}}\right) \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{4}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = 2$; b) $y = 2^{27} \cdot 2^6 : 2^{30} = 2^3$. Obținem $m_g = \sqrt{x \cdot y} = \sqrt{2^4} = 2^2$. **4.** a) ΔADM este echilateral, deci $AM = 8$ cm. ΔMBC este isoscel, deci $MB = 8$ cm. Atunci $\mathcal{P}_{ABCD} = 2 \cdot AB + 2 \cdot AD = 48$ cm; b) Fie $MT \perp BC$, $T \in BC$. Atunci $d(M, BC) = MT = \frac{MC}{2} = 4\sqrt{3}$ cm. **5.** a) $AB = AC$ și $\sphericalangle ABC = 75° \Rightarrow \sphericalangle BAC = 30°$, iar $\sphericalangle DAC = 60°$. Deoarece ΔADC este echilateral cu $DC = 6$ cm, rezultă $\mathcal{A}_{ADC} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ cm^2; b) Notăm cu M mijlocul lui AC. Ținând cont că $\frac{MG_1}{MD} = \frac{1}{3}$ și $\frac{MG_2}{MB} = \frac{1}{3}$, rezultă $G_1G_2 \parallel DB$, deci $\Delta MG_1G_2 \sim \Delta MDB$. Așadar, $\frac{G_1G_2}{BD} = \frac{MG_1}{MD} = \frac{1}{3}$, adică $G_1G_2 =$

$= \frac{BD}{3} = 2\sqrt{2}$ cm. **6.** a) $AB = 12$ cm, $AM = AA' = 6\sqrt{3}$ cm, deci $AMM'A'$ este pătrat, cu $AM' \perp A'M$; b) $pr_{(MAA')} BM' = MM'$, deci $\sphericalangle(M'B, (MAA')) = \sphericalangle BM'M$. Din triunghiul $M'BM$ se obține $\sphericalangle BM'M = 30°$.

TESTUL 19

Subiectul I. 1. d). **2.** b). **3.** c). **4.** a). **5.** d). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. b). **2.** b). **3.** c). **4.** c). **5.** d). **6.** a).

Subiectul al III-lea. 1. a) Fracția $\frac{74}{84}$ nu este echiunitară; b) Din $7a + 5b = 84$, rezultă $a = 12$, $b = 0$ sau $a = 7$, $b = 7$, sau $a = 2$, $b = 14$. Soluția este $a = 2$, $b = 14$. **2.** b) $E(x) = 3n(3n + 1)$ și $3n$, $3n + 1$ sunt consecutive, deci $3n(3n + 1) \vdots 2$. Cum $E(n) \vdots 3$, rezultă că $E(n) \vdots 6$. **3.** a) $f(1) = 2$ și $f(2) = 5$; b) $\mathcal{A}_{AA'B'B} = \frac{(AA' + BB') \cdot A'B'}{2} = \frac{(2+5)\cdot 1}{2} = 3{,}5$. **4.** a) $\sphericalangle DAM = 45° \Rightarrow \sphericalangle DMA = 45°$; b) Din punctul a) $DM = DA = 2$ cm, rezultă $MC = 2\sqrt{3}$ cm. Din triunghiul MCB, deducem $MB = 4$ cm. **5.** Avem $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = ... = 60°$. a) Cum $\sphericalangle AOD = \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD = 3 \cdot 60° = 180°$, rezultă că A, O, D sunt coliniare; b) Triunghiul ACE este echilateral și $AC = 3\sqrt{3}$ cm. Rezultă că perimetrul triunghiului ACE este $9\sqrt{3}$ cm. **6.** a) $V = 5 \cdot 4 \cdot 12$ cm^3 $= 240$ cm^3; b) Cum $CC' \parallel AA'$, rezultă $\sphericalangle(AB', CC') = \sphericalangle(AB', AA') = \sphericalangle A'AB'$ și $\sin(\sphericalangle A'AB') = \frac{A'B'}{AB'} = \frac{5}{13}$.

TESTUL 20

Subiectul I. 1. c). **2.** d). **3.** a). **4.** d). **5.** d). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** b). **3.** c). **4.** c). **5.** a). **6.** c).
Subiectul al III-lea. 1. a) Nu: 207 împărțit la 16 dă restul egal cu 15; b) $145 = n \cdot c_1 + 1$, $207 = n \cdot c_2 + 3$, $329 = n \cdot c_3 + 5$ și $n \geq 6$; rezultă $nc_1 = 144$, $nc_2 = 204$, $nc_3 = 324$ și $n \geq 6$. Astfel, n este divizor comun, cel puțin egal cu 6, al numerelor 144, 204 și 324. Găsim $n = 6$ sau $n = 12$. **2.** b) $E(a) = a^2 - 6a + 7 = (a-3)^2 - 2$ este număr natural pentru $a = 3 + \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, astfel încât n nu este pătrat perfect. **3.** a) $f(-1) - f(2) = 3 - (-3) = 6$; b) Punctele A, B, C sunt pe graficul funcției f, deci sunt coliniare. **4.** a) AM este mediană în triunghiul dreptunghic ABC, deci $AM = \frac{BC}{2} = 6$ cm. Triunghiul AMC este isoscel cu $\sphericalangle ACM = 15°$. Rezultă $\sphericalangle AMC = 150°$ și atunci $\sphericalangle AMB = 30°$; b) Din triunghiul dreptunghic ADM cu $AM = 6$ cm, $\sphericalangle AMD = 30°$, deducem $DM = \sqrt{27}$ cm. Cum $\sqrt{27} < 5{,}2$ (deoarece $5{,}2^2 = 27{,}04$), rezultă concluzia. **5.** a) Ducem $CE \perp AB$; din triunghiul dreptunghic CEB cu $CE = 4\sqrt{2}$ cm și $EB = 2$ cm, rezultă $BC = 6$ cm; b) Fie N mijlocul lui BC. Deoarece MN este linie mijlocie în trapez, rezultă că $MN = 3$ cm. Astfel, $MN = \frac{BC}{2}$ și, cum MN este mediană în ΔBMC, obținem concluzia. **6.** b) Deoarece $(MCC') \cap (B'BC) = CC'$ și $BC \perp CC'$, $MC \perp CC'$, rezultă că $\sphericalangle((MCC'), (B'BC)) = \sphericalangle(BC, MC) = \sphericalangle BCM = 30°$.

TESTUL 21

Subiectul I. 1. b). **2.** c). **3.** b). **4.** b). **5.** a). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. b). **2.** c). **3.** c). **4.** c). **5.** c). **6.** d).
Subiectul al III-lea. 1. a) Andrei ar da lui Bogdan $162 : 2 = 27$ de lei și, astfel, Bogdan ar avea $210 - 162 + 27 = 75$ de lei, care nu reprezintă jumătate din suma rămasă lui Andrei, adică 135 de lei. Deci, nu este posibil ca Andrei să aibă 162 de lei; b) Fie x suma lui Andrei. Avem $\frac{5x}{6} \cdot \frac{1}{2} = 210 - x + \frac{x}{6}$, deci $x = 168$. **2.** a) $E(x) = \frac{x+1}{x^2+1} : \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{4x}{x^2+1}$; b) $-2 < E(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x+1)^2 > 0$ (A); $E(x) < 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 0$ (A). **3.** a) Cum $f(3) = 0$, rezultă că produsul este 0; b) În triunghiul dreptunghic

AOB, $OA = 3$, $OB = 4 \Rightarrow AB = 5$. **4.** a) $BC = 6$ cm, $\mathcal{A}_{ABCD} = AB \cdot BC = 36\sqrt{3}$ cm^2; b) Cum $\Delta MBS \sim \Delta MDC$, rezultă că $\frac{SB}{CD} = \frac{MB}{MD} = \frac{1}{3}$, deci $SB = 2\sqrt{3}$ cm. **5.** a) Fie $AM \perp BC$, $M \in BC$. Avem $AM = 20$ cm și $\mathcal{A}_{ABC} = AM \cdot BC : 2 = 300$ cm^2; b) Fie $BD' \perp AC$, $D' \in AC$. Observăm că $BD' = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABC} : AC = 24$ cm $= BD$. Dacă $D \neq D'$, atunci $BD > BD'$, fals. Deci, $D = D'$ și atunci $BD \perp AC$. **6.** a) Dacă $SP \perp BC$, $P \in BC$, atunci $\mathcal{A}_{SBC} = SP \cdot BC : 2 = 12 \cdot 10 : 2 = 60$ cm^2; b) Cum $\Delta ASM \equiv \Delta ASN$, înseamnă că $SM = SN$. Deci, avem $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC}$, de unde rezultă că $MN \parallel BC$. Din relațiile $MN \parallel BC$, $BC \subset (ABC)$ și $MN \not\subset (ABC)$ deducem că $MN \parallel (ABC)$.

TESTUL 22

Subiectul I. 1. d). **2.** c). **3.** d). **4.** b). **5.** d). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. d). **2.** d). **3.** b). **4.** b). **5.** a). **6.** c).

Subiectul al III-lea. 1. a) $100\% - 25\% = 75\%$; b) Dacă lungimea totală a drumului este x km, atunci $18 + \frac{3}{5}(x - 18) = \frac{3x}{4}$, de unde rezultă $x = 48$. **2.** a) $E(x) = 4x^2 + 4x + 1 - 2x^2 + 4x - 2 - x^2 - 2x + 3 = x^2 + 6x + 2$; b) $E(x) = (x + 3)^2 - 7 \geq -7$, $\forall x \in \mathbb{R}$ și $E(-3) = -7$. Valoarea minimală a lui $E(x) = -7$. **3.** a) $a + 2 = 3a - 4 \Leftrightarrow a = 3$; b) $A(-2, 0)$, $B\left(\frac{4}{3}, 0\right)$, $C(3, 5)$, $\mathcal{A}_{ABC} = AB \cdot d(C, Ox) : 2 = \frac{10}{3} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{3}$. **4.** a) Fie O mijlocul lui MN. Deoarece $\sphericalangle POQ = 180° - \sphericalangle PON - \sphericalangle MOQ = 60°$ și $OP = OQ$, rezultă că triunghiul OPQ este echilateral, deci $PQ = OP = OQ = 6$ cm; b) $L_{\text{contur}} = (18 + 4\pi)$ cm. **5.** a) $\sphericalangle CAD = 90° - \sphericalangle BAD = 90° - 60° = 30°$; b) Aplicând teorema $30° - 60° - 90°$ în triunghiurile ABC și ADC, obținem $AC = \frac{BC}{2} = 12$ cm și apoi $CD = \frac{AC}{2} = 6$ cm. **6.** a) În triunghiul VAC, VO este mediană și $VG = 2GO$, deci G este centrul de greutate a triunghiului. Așadar, M este mijlocul muchiei CV; b) Avem $MO \parallel (VAB)$, $ON \parallel (VAB)$ și $MO \cap ON = \{O\}$, rezultă că $(MON) \parallel (ABV)$.

TESTUL 23

Subiectul I. 1. d). **2.** d). **3.** c). **4.** c). **5.** b). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. d). **2.** c). **3.** c). **4.** b). **5.** b). **6.** b).

Subiectul al III-lea. 1. a) 360kg; b) 200kg. **2.** b) $2n - 1 \geq -6 \Rightarrow n \geq -\frac{5}{2} \Rightarrow n \in \{-2, -1\}$. **3.** a) $m = 1$; b) $4\sqrt{2}$. **4.** Cum $DA = DB : 2$, rezultă că $\sphericalangle ABD = 30°$, deci $\sphericalangle BOM = \sphericalangle OAB + \sphericalangle OBA = 45° + 30° = 75°$; b) Avem $AD = DM = 4$ cm și $BD = 8$ cm. Din relația $\Delta DOM \sim \Delta BOA$, rezultă că $\frac{DO}{OB} = \frac{DM}{AB}$, de unde obținem $\frac{DO}{8 - DO} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, deci $DO = 4\left(\sqrt{3} - 1\right)$ cm. **5.** a) $AE = 4\sqrt{5}$ cm; b) În triunghiul ADE, EB și AC sunt înălțimi, deci DC este înălțime. **6.** a) Observăm că AO_1 este înălțimea triunghiului echilateral ACB', deci $AC\sqrt{3} : 2 = AO_1 = 3\sqrt{6}$, de unde obținem $AC = 6\sqrt{2}$ dm. Așadar $AB = 6$ dm și aria cutiei este 216 dm^2. Cum $240 - 10\%\ 240 = 216$, înseamnă că 240 dm^2 de carton ajung pentru confecționarea cutiei; b) Din relațiile $CB = CD = CC' = 6$ dm și $A'B = A'D = A'C' = 6\sqrt{2}$ dm, rezultă că $A'C \perp (C'BD)$.

TESTUL 24

Subiectul I. 1. b). **2.** a). **3.** d). **4.** a). **5.** c). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** d). **3.** a). **4.** d). **5.** a). **6.** b).
Subiectul al III-lea. 1. a) Dacă ar fi 13 oi, ele ar avea împreună 52 de picioare, fals; b) Dacă r reprezintă numărul raţelor şi o numărul oilor, atunci $o + r = 16$ şi $4o + 2r = 50$. Se obţine $r = 7$. **2.** a) $E(x) = 3x^2 + x - x^2 + 4x - 4 - x^2 - 2x - 1 + 5 = x^2 + 3x$, pentru orice număr real x; b) $E(n) = n(n + 3)$. Factorii sunt numere naturale cu parităţi diferite, deci produsul este număr par. **3.** a) $f(-1) = \frac{1}{2}$, $f(2) = 2$, deci $f(1) \cdot f(2) = 1$; b) $A(-2, 0)$, $B(0, 1)$, deci $\mathcal{A}_{AOB} = \frac{OA \cdot OB}{2} = 1$. **4.** a) Construind $CC_1 \perp AB$, $DD_1 \perp AB$, $C_1, D_1 \in AB$, obţinem că $BC_1 = AD_1 = 6$ cm, $D_1C_1 = DC = 12$ cm, deci $AB = 24$ cm şi $AM = 12$ cm; b) $AMCD$ este romb, deci $CM = DA = 12$ cm. În triunghiul ACB, MC este mediană şi $MC = \frac{AB}{2}$, deci $\sphericalangle ACB = 90°$; $AC = 12\sqrt{3}$ cm. **5.** a) Deoarece $\sphericalangle ACB = 60°$, $\sphericalangle DAC = 90°$, rezultă că $AC = \frac{DC}{2} = 6$ cm, deci $DC = 12$ cm; b) $\mathcal{P}_{ADC} = (18 + 6\sqrt{3})$ cm. Deoarece $3\sqrt{3} > 5$, rezultă că $18 + 6\sqrt{3} > 28$ cm. **6.** a) Din triunghiul VOM, obţinem că $OM = 9$ m, deci $AB = 18$ m. $\mathcal{A}_{lat.} = \frac{\mathcal{P}_{ABCD} \cdot VM}{2} = 540$ m^2. Dacă pentru 13,5 m^2 folosim 5 kg de vopsea, atunci cu cele 200 kg vom vopsi $40 \cdot 13{,}5 = 540$ m^2; b) Relaţiile $(PBC) \cap (ABC) = BC$, $OM \perp BC$, $PM \perp BC$, $OM \subset (ABC)$ şi $PM \subset (PBC)$, conduc la $\sphericalangle((PBC), (ABC)) = \sphericalangle PMO$. Din triunghiul POM, $\sphericalangle O = 90°$, $OM = PO = 9$ m, rezultă că $\sphericalangle PMO = 45°$.

TESTUL 25

Subiectul I. 1. c). **2.** c). **3.** a). **4.** b). **5.** d). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** d). **3.** a). **4.** c). **5.** a). **6.** d).
Subiectul al III-lea. 1. a) Nu este posibil; b) Dacă r este preţul unui kg de roşii şi c este preţul unui kg de cartofi, atunci $2r + 3c = 16$ şi $4r + 2c = 24$. Se obţine $c = 2$ lei. **2.** a) $x^2 + 2x - 3 = x^2 - 3x - x - 3 = (x + 3)(x - 1)$. Altfel: $(x + 3)(x - 1) = x^2 - x + 3x - 3 = x^2 + 2x - 3$; b) $E(x) = x^2 + 4x + 3$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1\}$. Atunci $1 + E(n) = n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2$. **3.** a) $f(\sqrt{3}) = 0, f(0) = -3$, de unde $f(\sqrt{3}) - f(0) = 3$; b) $A(\sqrt{3}, 0)$, $B(0, -3)$, $d(O, AB) = \frac{3}{2}$. **4.** a) $2BC + 15 = 27$, deci $BC = 6$ cm. b) $DC \parallel AB$, deci $\Delta COD \sim \Delta AOB$ şi $\frac{OC}{OA} = \frac{CD}{AB} = \frac{1}{2} = \frac{CM}{MB}$. Rezultă că $OM \parallel AB$, deci $\frac{OM}{AB} = \frac{CM}{BC}$, prin urmare $OM = \frac{10}{3}$ cm. **5.** a) $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = 10$ km $= OD$; b) $\mathcal{A}_{ABD} = \frac{AO \cdot BD}{2} = \frac{AD \cdot d(B, AD)}{2}$, de unde $d(B, AD) = \frac{216}{13}$ km. Timpul necesar parcurgerii acestei distanţe este $t = \frac{d}{v} = \frac{216}{13} \cdot \frac{1}{18} = \frac{12}{13}$ ore, mai mic de 1 oră. **6.** a) $\mathcal{A}_t = 0{,}54$ m$^2 > 0{,}5$ m^2, deci nu putem împacheta cutia; b) $\sin(\sphericalangle BOC) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

TESTUL 26

Subiectul I. 1. d). **2.** b). **3.** d). **4.** b). **5.** c). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. b). **2.** a). **3.** a). **4.** c). **5.** d). **6.** c).
Subiectul al III-lea. 1. a) Dacă ar fi 10 apartamente cu trei camere, atunci ar fi tot 10 apartamente cu două camere, în total 50 de camere (fals); b) Dacă d şi t reprezintă numărul apartamentelor cu două, respectiv trei camere, atunci $d + t = 20$, $2d + 3t = 49$, astfel că $d = 11$. **2.** b) $E(x) = \frac{x}{3}$; media aritmetică va fi egală cu $1 \in \mathbb{N}$. **3.** a) 8; b) $A(2, 0)$; $B(0, 4)$,

$\mathcal{P}_{AOB} = 6 + 2\sqrt{5}$. **4.** a) Dacă $AB = l$, atunci $AD = 3l$ și $3l^2 = 48$; obținem $l = 4$ cm și $AD = 12$ cm; b) $\Delta FOG \sim \Delta AOD$, implică $\frac{FO}{AO} = \frac{1}{3}$. Din $AF = 4\sqrt{5}$ cm și $AO = 3OF$, obținem că $OF = \sqrt{5}$. **5.** a) $AB = 9$ cm, $AC = 16$ cm, astfel că $BC = 7$ cm; b) Dacă $BT \perp MC$, $T \in MC$, atunci $BT = 4{,}2$ cm și $\sin(\sphericalangle BMT) = \frac{BT}{BM} = \frac{7}{25} < \frac{2}{7}$. **6.** a) Pentru un acvariu se utilizează $\mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b = 6400$ cm^2 sticlă; b) $32\,000 = 40 \cdot 40 \cdot h_{apă}$, de unde $h_{apă} = 20$ cm. Distanța cea mai mare între două puncte aflate în apă este diagonala paralelipipedului format de apa din vas, iar lungimea acestei diagonale este egală cu $\sqrt{40^2 + 40^2 + 20^2} = 60$ cm.

TESTUL 27

Subiectul I. 1. d). **2.** d). **3.** a). **4.** b). **5.** c). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. b). **2.** c). **3.** a). **4.** d). **5.** a). **6.** c).
Subiectul al III-lea. 1. a) Da; b) $\overline{ab} \in \{24, 43, 62, 81\}$, deci 4 numere. **2.** b) Dacă $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$, atunci $E(n) = 2(2k + 2)^2 = 8(k + 1)^2$, deci $E(n) \vdots 8$. **3.** a) $f(-1) = -2$ și $f(5) = 7$, deci punctele A și B aparțin graficului funcției f; b) Punctele căutate sunt $M(x, y)$, $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $y = f(x)$, cu $x, y \in \mathbb{Z}$; obținem $M(1, 1)$ sau $M(3, 4)$. **4.** a) $100(4 + \sqrt{2})$ m; b) $\mathcal{A}_{ABCD} = 200 \cdot 50$ m$^2 = 10000$ m$^2 = 1$ ha. **5.** a) ΔABD este dreptunghic în B, $AB = 12$ cm și $\sphericalangle ADB = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \sphericalangle ACB = 60°$. Rezultă că $\sphericalangle BAD = 30°$; b) $R = \frac{AD}{2} = 4\sqrt{3}$ m. **6.** a) $27\sqrt{3}$ cm^3; b) $\sphericalangle((AB'M), (AC'M)) = \sphericalangle B'MC'$ și $\sphericalangle B'MC' = 90°$.

TESTUL 28

Subiectul I. 1. b). **2.** a). **3.** b). **4.** a). **5.** d). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. d). **2.** b). **3.** c). **4.** c). **5.** b). **6.** d).
Subiectul al III-lea. 1. a) 11 timbre; b) 25 timbre. **2.** b) Cum $(2x - 3)^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că $E(x) \geq -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Rezultă că $E_{min} = -1$, valoarea minimă fiind atinsă când $x = \frac{3}{2}$. **3.** b) Ambii membri au valoarea $2\sqrt{3} + 2$. **4.** a) $\Delta TOA \equiv \Delta SOA$ ($\sphericalangle T = \sphericalangle S = 90°$, $OT = OS$, $OA = OA$), deci $AS = AT = 120$ m; b) $OT = \sqrt{OA^2 - AT^2} = 50$ m; $\mathcal{A}_{lac} = \pi r^2 = 2500\pi$ m^2, iar $2500\pi < 2500 \cdot 4 = 10000$. **5.** a) OB este linie mijlocie în triunghiul ACT; b) G este centrul de greutate al triunghiului ACT, deci $BG = \frac{1}{3}AB = 2$ cm. Astfel, ΔBCG este dreptunghic isoscel, așadar $\sphericalangle BGC = 45°$. **6.** a) $72\sqrt{3}$ cm^3; b) $d(M, (B'BC)) = \frac{1}{2}d(A', (B'BC)) = 3$ cm.

TESTUL 29

Subiectul I. 1. d). **2.** c). **3.** b). **4.** b). **5.** c). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. d). **2.** c). **3.** a). **4.** c). **5.** a). **6.** d).
Subiectul al III-lea. 1. b) 28 elevi. **2.** b) $n \in \{-2, -1, 2\}$. **3.** b) $\sin(\sphericalangle AOy) = \frac{2}{\sqrt{13}}$. **4.** b) Fie $S = pr_{MN}D$; din triunghiul DSN obținem că $ND = \sqrt{DS^2 + SN^2} = 4\sqrt{10}$ cm, iar $4\sqrt{10} = \sqrt{160} < \sqrt{169} = 13$. **5.** a) Tangenta d în A la cerc este perpendiculară pe raza OA. În triunghiul OBC, OA este mediană și înălțime; rezultă că $OB = OC$; b) $OA = \frac{1}{2}BC = 5$ cm.

6. a) $36\sqrt{3}$ cm^2; b) $AD \parallel BC \Rightarrow \sphericalangle(AD, BC) = \sphericalangle PBC$. Fie $S = \text{pr}_{BC} P$; avem $BS = \frac{5}{6} BC = 5$ cm, $PS = \frac{1}{3} d(V, BC) = \sqrt{3}$ cm, $\text{tg}(\sphericalangle PBC) = \frac{PS}{BS} = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

TESTUL 30

Subiectul I. 1. d). **2.** c). **3.** c). **4.** b). **5.** d). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** b). **3.** a). **4.** d). **5.** b). **6.** b).
Subiectul al III-lea. 1. a) Nu; b) Cum $e = 4n + 2$ și $e = 7m + 2$, rezultă că $e - 2$ se divide atât cu 4, cât și cu 7, deci se divide cu 28. Deducem că $e = 30$. **2.** b) $n \in \{-4, -3\}$. **3.** b) $\mathcal{P}_{OAB} = 12$. **4.** a) $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MCA = 30°$, deci $MA = MC$; b) $AM = \frac{1}{2} BM$, așadar $\frac{MC}{BC} = \frac{1}{3}$. **5.** a) $\mathcal{A}_{ABECD} = \mathcal{A}_{ABCD} + \mathcal{A}_{BCE} = 64\sqrt{3} + 48\sqrt{3} = 112\sqrt{3}$ cm^2; b) Dacă M este mijlocul lui BC, atunci $\Delta ABP \sim \Delta EMP$. Obținem $BP = \frac{8\sqrt{3}}{5}$ m, iar $\frac{8\sqrt{3}}{5} < \frac{8 \cdot 1{,}75}{5} = 2{,}8$. **6.** a) 64 cm^3; b) Dacă O este centrul bazei $ABCD$, atunci $MO \perp AC$ și $D'O \perp AC$, prin urmare $\sphericalangle((D'AC), (MAC)) = \sphericalangle D'OM$. Cum $D'M = 6$ cm, $D'O = 2\sqrt{6}$ cm și $OM = 2\sqrt{3}$ cm, se arată cu reciproca teoremei lui Pitagora că $\sphericalangle D'OM = 90°$.

TESTUL 31

Subiectul I. 1. c). **2.** d). **3.** b). **4.** d). **5.** a). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** a). **3.** d). **4.** d). **5.** b). **6.** b).
Subiectul al III-lea. 1. a) $40 \cdot 6 = 240$ ani; b) $m = \frac{240 + 100}{10} = 34$ ani. **2.** a) $(x + 2)(2x - 1) - x(x + 3) + 1 = 2x^2 + 3x - 2 - x^2 - 3x + 1 = x^2 - 1$; b) $E(x) = \frac{x}{x^2(x+1)} \cdot \frac{6(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{6}{x(x+1)}$. **3.** a) $4\sqrt{2}$; b) $2\sqrt{2}$. **4.** a) $BC = 2AM = 6$ cm, $\mathcal{P}_{ABC} = 3BC = 18$ cm; b) $\sphericalangle AMC = \sphericalangle MAB + \sphericalangle MBA = 30° + 30° = 60°$. Deci, $\sphericalangle DCM = \sphericalangle AMC = 60°$, de unde rezultă că $AM \parallel CD$. **5.** a) $\mathcal{A}_{EMNP} : \mathcal{A}_{\text{grăd}} = 50 : 600 < 9 : 100$; b) Observăm că $DE + EG = 10\sqrt{5} + 10\sqrt{5} = 20\sqrt{5} = DG$ deci punctele D, E, G sunt coliniare. **6.** a) Din relațiile $AA' \overset{\parallel}{=} CC'$, $AA' = AC = 6\sqrt{2}$ cm și $AA' \perp AC$, rezultă că $ACC'A'$ este pătrat; b) Fie O' centrul pătratului $ACC'A'$. Cum $C'O \parallel AO'$, $AO' \subset (AB'D')$ și $C'O \not\subset (AB'D')$, rezultă că $C'O \parallel (AB'D')$.

TESTUL 32

Subiectul I. 1. c). **2.** c). **3.** a). **4.** c). **5.** b). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** b). **3.** b). **4.** b). **5.** c). **6.** a).
Subiectul al III-lea. 1. a) Da, pentru că 43 împărțit la 12 dă câtul 3 și restul 7, iar 43 împărțit la 18 dă câtul 2 și rest 7; b) Cum $n - 7 = 12c_1 = 18c_2$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{N}^*$), rezultă că $n - 7 = 36k$, $k \in \mathbb{N}^*$, deci $n = 36k + 7$. Din condiția $100 < 36k + 7 < 200$, obținem $k \in \{3, 4, 5\}$, deci $n \in \{115, 151, 187\}$. **2.** a) $E(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} \cdot \frac{(x-1)^2}{x^2 - x + 1} = x - 1$; b) Avem $|2E(x) - 1| = 1 \Leftrightarrow |2x - 3| = 1 \Leftrightarrow 2x - 3 \in \{-1, 1\} \Leftrightarrow x \in \{1, 2\}$. Cum $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, doar $x = 2$ este soluție. **3.** a) $m = 1$, $n = 2$; b) 45°. **4.** a) Cum $AB \parallel CD$, avem $\sphericalangle CDB = \sphericalangle ABD$, deci $\sphericalangle CDB = \sphericalangle CBD$ (căci $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD$). De aici, rezultă că $CD = CB = 5$ cm și apoi $AD = 4$ cm; b) Deoarece $EB = BC = CD = DE = 5$ cm, rezultă că $EBCD$ este romb, deci $AC \perp BD$. **5.** a) $\sphericalangle ACD + \sphericalangle DCE = 45° + 135° = 180°$; b) Cum OM și QM sunt mediane în triunghiurile dreptunghice DOC ($\sphericalangle O = 90°$), respectiv DQC ($\sphericalangle Q = 90°$), rezultă că $OM = \frac{DC}{2} = QM$. **6.** a) Deoarece $DC \parallel AB$ și $AB \parallel EF$, rezultă că $DC \parallel EF$, deci punctele D, C, E și F sunt coplanare; b) 1,2 m^2.

TESTUL 33

Subiectul I. 1. b). **2.** d). **3.** c). **4.** c). **5.** c). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. b). **2.** a). **3.** c). **4.** d). **5.** b). **6.** c).
Subiectul al III-lea. 1. a) Atunci numărul vârfurilor ar fi $4 \cdot 6 + 8 \cdot 3 = 48$, fals. Nu este posibil să fie 6 tetraedre și 3 cuburi; b) Sunt 5 tetraedre și 3 cuburi. **2.** a) $E(x) = \frac{5}{x^2-9} \cdot \frac{x^2-9}{2x-1} = \frac{5}{2x-1}$; b) $E(a) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2a - 1 \in \{-5, -1, 1, 5\} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a \in \{-2, 0, 1\}$ $(a \neq 3)$. **3.** a) 0; b) $A(6, 0)$, $B(0, -6)$. **4.** a) Cum $BD = 5$, rezultă că $BD^2 + BA^2 = DA^2$, deci $AB \perp BD$; b) $CM + MN + NB = \frac{BD}{2} + \frac{AB}{2} + \frac{AD}{2} = 15$ cm. **5.** a) $\sphericalangle BMN + \sphericalangle NMS + \sphericalangle SMA = 30° + 120° + 30° = 180°$; b) Fie $NX \perp$ $\perp BM$, $X \in BM$. Avem $MX = MN \cdot \cos 30° = \sqrt{3}$ cm, deci $AB = 4MX = 4\sqrt{3}$ cm și $\mathcal{P}_{ABC} = 12\sqrt{3}$ cm. **6.** a) Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul $AA'M$ $(\sphericalangle A = 90°)$, obținem $AM = 2\sqrt{43}$ cm; b) Din relațiile $A'M \perp B'C'$ și $A'M \perp BB'$, rezultă că $A'M \perp (BCC')$, deci proiecția dreptei $A'B$ pe planul BCC' este dreapta BM, iar unghiul căutat este $A'BM$. Avem $\operatorname{tg}(\sphericalangle A'BM) = \frac{A'M}{BM} = \frac{3\sqrt{3}}{5}$.

TESTUL 34

Subiectul I. 1. c). **2.** b). **3.** b). **4.** b). **5.** b). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. a). **2.** b). **3.** b). **4.** b). **5.** c). **6.** c).
Subiectul al III-lea. 1. a) Punctajul maxim este 40 p, iar cel minim este −100 p; b) Andrei a răspuns corect la 17 întrebări. **2.** a) $\frac{2x^2+4x}{x^2+4x+4} - 1 = \frac{x^2-4}{(x+2)^2} = \frac{x-2}{x+2}$; b) $(E(x)-2)^{100} = (1-2)^{100} = 1$. **3.** a) $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $B(0, -3)$; b) $P(x, y) \in$ $\in G_f \Leftrightarrow y = 2x - 3$; $OP = 3 \Leftrightarrow x^2 + (2x-3)^2 = 9 \Leftrightarrow x \in \left\{0, \frac{12}{5}\right\}$. Punctele sunt: $P_1(0, -3)$ și $P_2\left(\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right)$. **4.** a) Fie $DE \perp BC$, $E \in BC$. Din relația $DE \cdot BC = CA \cdot BD$, rezultă că $DE = 3$ cm; b) Cum $\Delta CAD \equiv \Delta CED$ (I.C.) rezultă că $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ECD$, deci CD este bisectoarea unghiului ACB. **5.** a) $BE = AB^2 : BD = 9$ cm; b) Fie $EF \perp CD$, $F \in CD$. Cum $\Delta DEF \sim \Delta DBC$, rezultă că $\frac{EF}{BC} = \frac{DE}{DB}$ sau $\frac{EF}{20} = \frac{16}{25}$, deci $EF = 12{,}8$ cm $= \operatorname{dist}(E, DC)$. **6.** a) Fie M și M' mijloacele laturilor BC, respectiv $B'C'$. Din trapezul dreptunghic $OMM'O'$, obținem $MM' = 5$ m. Sunt necesari 124 m^2 de tablă; b) Perpendiculara din O pe MM' este perpendiculara din O pe planul BCC'. Distanța căutată este de 3 m.

TESTUL 35

Subiectul I. 1. b). **2.** b). **3.** c). **4.** a). **5.** d). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. b). **2.** c). **3.** d). **4.** d). **5.** b). **6.** a).
Subiectul al III-lea. 1. a) $450 - 160 = 290 \neq 320$. Bursa nu este 320 de lei; b) 300 de lei. **2.** a) $x^2 - x - 2 = x^2 + x - 2x - 2 =$ $= x(x + 1) - 2(x + 1) = (x + 1)(x - 2)$; b) $E(x) = \frac{x^2+4}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{(x+1)(x-2)}{x^2+4} = \frac{x+1}{x+2}$. **3.** a) $m = 1$; b) $Q(3, -3) \notin G_f$. Dreapta desenată nu reprezintă graficul funcției f. **4.** a) Cum BC este tangentă la cerc și OB este rază, rezultă că $BC \perp OB$. Cu teorema lui Pitagora obținem că $AC = 39$ cm; b) Cum $\sphericalangle OTA = \sphericalangle ABC = 90°$ și $\sphericalangle OAT = \sphericalangle CAB$, rezultă că $\Delta AOT \sim$ $\sim \Delta ACB$. Cu notația $OB = OT = r$, avem $\frac{OT}{BC} = \frac{AO}{AC} \Rightarrow \frac{r}{15} = \frac{36-r}{39} \Rightarrow r = 10$ cm. **5.** a) Fie M mijlocul lui AB. Deoarece $AM \parallel CD$, $AM = CD$ și $AD = DC$, rezultă că $AMCD$ este romb, deci AC este bisectoarea unghiului BAD; b) Triunghiul AMD este echilateral, deci măsura lui BAD este 60°. **6.** a) Fie O și O' centrele bazelor, M mijlocul lui BC și M' mijlocul lui $B'C'$. În trapezul dreptunghic $OMM'O'$, avem $OM = 2\sqrt{3}$ m, $MM' = 2$ m și $O'M' = \sqrt{3}$ m, deci $OO' = 1$ m; b) $\sphericalangle((BCC'), (ABC)) = \sphericalangle M'MO = 30°$.

TESTUL 36

Subiectul I. 1. c). **2.** d). **3.** b). **4.** b). **5.** a). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** c). **3.** d). **4.** b). **5.** a). **6.** c).

Subiectul al III-lea. 1. a) 36 camere; b) 12 apartamente cu două camere. **2.** a) $E(x)=\frac{4x^2}{(1-x^2)(1+x^2)}\cdot\frac{x(1-x^2)}{4x}=\frac{x^2}{1+x^2}$;

b) $x^2\geq 0\Rightarrow E(x)\geq 0$; $E(x)<1\Leftrightarrow x^2<1+x^2$. **3.** a) $2\sqrt{2}$; b) $5\sqrt{2}$. **4.** a) 170 m; b) $AE=150$ m, $\text{tg}(\sphericalangle BAD)=\frac{BE}{AE}=\frac{8}{15}$.

5. a) Fie $EF\perp BC$, $F\in BC$. Avem $EF=3\sqrt{3}$ cm, $AF=15$ cm, deci $AE=6\sqrt{7}$ cm; b) Cum $\Delta ABE\equiv\Delta DBC$ (L.U.L.) rezultă că $\sphericalangle EAB=\sphericalangle CDB$ și $AE=DC$. Din $\sphericalangle MAB=\sphericalangle NDB$, $AM=DN$ și $AB=DB$ deducem că $\Delta MAB\equiv\Delta NDB$, deci $\sphericalangle ABM=\sphericalangle DBN$. Astfel, avem: $\sphericalangle MBN=\sphericalangle MBD+\sphericalangle DBN=\sphericalangle MBD+\sphericalangle ABM=\sphericalangle ABD=60°$. **6.** a) Fie $AP\perp BD$, $P\in BD$. Conform teoremei celor trei perpendiculare, din $AA'\perp(ABC)$ și $AP\perp BD$, rezultă că $A'P\perp BD$, deci $\mathcal{A}_{A'BD}=\frac{A'P\cdot BD}{2}=$

$=\frac{13\cdot 25}{2}=162{,}5$ cm^2; b) Fie $AQ\perp A'P$, $Q\in A'P$. Din relațiile $A'P\perp BD$, $AP\perp BD$ și $AQ\perp A'P$ rezultă că $AQ\perp$

$\perp(A'BD)$ (reciproca a doua a teoremei celor trei perpendiculare), deci $d(A,(A'BD))=AQ=\frac{AA'\cdot AP}{A'P}=\frac{60}{13}$ cm.

TESTUL 37

Subiectul I. 1. b). **2.** c). **3.** a). **4.** a). **5.** c). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. d). **2.** b). **3.** c). **4.** b). **5.** a). **6.** d).
Subiectul al III-lea. 1. a) Dacă ar avea 5 vaze, atunci numărul florilor ar fi $5\cdot 5+8=33$, dar 5 vaze și 33 de flori nu verifică codiția a doua; b) 7 vaze (43 de flori). **2.** a) $x^2+4x+3=x^2+x+3x+3=x(x+1)+3(x+1)=(x+1)(x+3)$;

b) $E(x)=\frac{(x+1)(x+3)(x+1)(x+2)}{(x+2)(x+3)}=(x+1)^2\geq 0$. **3.** a) $m=1$, $n=2$; b) 2. **4.** a) Cum $AB^2+AC^2=BC^2$, rezultă că $\sphericalangle BAC=$

$=90°$, deci $AO=\frac{BC}{2}=25$ cm. Perimetrul triunghiului ABO este egal cu 80 cm; b) Triunghiurile DOC și BAC sunt asemenea, deci $\frac{DO}{AB}=\frac{OC}{AC}$, de unde obținem $DO=\frac{75}{4}=18{,}75$ cm. **5.** a) Deoarece $\sphericalangle DAE=30°+60°=90°$, rezultă că $DE^2=AD^2+AE^2=16\cdot 5$, deci $DE=4\sqrt{5}$ cm; b) Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice DCF și EBF, obținem $DF=EF=4\sqrt{5}=DE$, de unde rezultă că triunghiul DEF este echilateral. **6.** a) Observăm că $\Delta VMA\equiv\Delta VMC$ (L.U.L.), deci $AM=MC$ și atunci suma $AM+MC=2AM$ este minimă dacă și numai dacă $AM\perp VB$. Dacă $VP\perp AB$, $P\in AB$, avem $VP\cdot AB=AM\cdot VB$, de unde rezultă că $AM=24$ m, deci $AM+MC=48$ m; b) Fie O centrul pătratului $ABCD$. Cum $AC\perp VO$ și $AC\perp BD$, rezultă că $AC\perp(VBD)$, deci $AC\perp VB$. Măsura unghiului determinat de dreptele AC și VB este 90°.

TESTUL 38

Subiectul I. 1. a). **2.** c). **3.** b). **4.** c). **5.** b). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. a). **2.** a). **3.** b). **4.** c). **5.** d). **6.** b).

Subiectul al III-lea. 1. a) $17+2\cdot 12=41$ m; b) 2 m pentru o bluză (3 m pentru o rochie). **2.** a) $E(x)=\frac{2x+1-x-2}{2x^2+5x+2}\cdot$

$\cdot(2x^2+5x+2)=x-1$; b) $E(-x)\cdot E(x)=1-x^2\leq 1$. **3.** a) Din relațiile $b=5-a$ și $3a=2b$, obținem $a=2$ și $b=3$; b) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

4. a) $AC = 17$ cm; b) Din asemănarea triunghiurilor AOB și COD, rezultă că $\frac{AO}{OC} = \frac{AB}{CD} = \frac{7}{3}$, de unde obținem $AO = 11{,}9$ cm.

5. a) Aria haşurată este egală cu $\mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{AEFG} = 1500$ m^2. Cum $1500 : 20 = 75$ și deoarece putem împărți zona haşurată în 75 de dreptunghiuri de 4 m × 5 m, rezultă că numărul maxim de mașini care pot fi parcate este 75; b) Cum $AF + FC = 50 + 25 = 75 = AC$, rezultă că punctele A, F și C sunt coliniare. **6.** a) Fie M mijlocul lui CD. Deoarece $AM \perp CD$ și $BM \perp CD$, rezultă că $\measuredangle((ACD), (BCD)) = \measuredangle(AM, BM)$. Dacă $AO \perp (BCD)$, $O \in (BCD)$, atunci $O \in BM$ și $MO = BM : 3$. Avem $\cos(\measuredangle(AM, BM)) = \cos(\measuredangle AMO) = MO : AM = MO : BM = \frac{1}{3}$; b) Din relațiile $CD \perp AM$ și $CD \perp BM$ rezultă că $CD \perp (ABM)$, deci $CD \perp AB$.

TESTUL 39

Subiectul I. 1. c). **2.** b). **3.** c). **4.** c). **5.** a). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** b). **3.** b). **4.** d). **5.** c). **6.** b).
Subiectul al III-lea. 1. a) Dacă primul clasat ar avea 12 puncte, atunci al doilea ar avea 11 puncte, iar al treilea ar avea 10,5 puncte. În acest caz, ei ar avea împreună 33,5 puncte, fals. Deci, nu este posibil ca primul clasat să aibă 12 puncte; b) 12,5 puncte; 11,5 puncte; 11 puncte. **2.** a) $E(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{4x} \cdot \frac{2x}{x-2} + \frac{1}{2} = \frac{x-2}{2x} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{x}$; b) $\frac{1}{4}$. **3.** a) $A(3, 0)$; $B(0, 6)$; b) $m = 9$. **4.** a) $AP = 12\sqrt{3}$ m < 21 m; b) Din relațiile $AP = CP = 12\sqrt{3}$ m și $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3} = \frac{CD}{CP}$, rezultă că $CD = 36$ m.

5. a) $\measuredangle ACB = \measuredangle CAD = 30°$, $\measuredangle BAD = \measuredangle BAC - \measuredangle CAD = 90°$; b) $\Delta CDA \sim \Delta CAB \Rightarrow \frac{CD}{CA} = \frac{CA}{CB} \Rightarrow CD \cdot CB = CA^2 = 100$ cm^2.

6. a) Din relațiile $2VA + 2OA = 16$ cm și $\frac{OA}{VA} = \frac{3}{5}$ rezultă că $OA = 3$ cm, $VA = 5$ cm și $VO = 4$ cm; b) Din egalitatea $\frac{\mathcal{V}_{\text{con mic}}}{\mathcal{V}_{\text{tr}}} = \frac{1}{7}$, rezultă că $\frac{\mathcal{V}_{\text{con mic}}}{\mathcal{V}_{\text{con mare}}} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$, deci secțiunea se face prin mijlocul înălțimii. Distanța cerută este de 2 cm.

TESTUL 40

Subiectul I. 1. d). **2.** c). **3.** d). **4.** d). **5.** a). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. b). **2.** c). **3.** b). **4.** d). **5.** c). **6.** d).
Subiectul al III-lea. 1. a) 3914 t; b) 87 ha, 119 ha. **2.** a) $E(x) = \frac{x^2}{x+1} \cdot \frac{x(x+1)}{1} - x = x^3 - x$; b) $E(n) = n(n-1)(n+1)$. Cum $n - 1$, n și $n + 1$ sunt trei numere naturale consecutive ($n \in \mathbb{N}^*$), rezultă că unul dintre ele se divide cu 2 și unul dintre ele se divide cu 3 (este posibil să fie același număr), deci produsul lor se divide cu 6, căci $(2; 3) = 1$. **3.** a) Cum $f(\sqrt{9}) = 0$, rezultă că produsul considerat este egal cu 0; b) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. **4.** a) $BD = 40\sqrt{3}$ m; b) $AB = BD + DA = 120 + 40\sqrt{3} \simeq$ $\simeq 189{,}3$ m. **5.** a) Fie $DP \perp AB$, $P \in (AB)$. Avem $AP = \frac{AD}{2} = 6$ cm, $PB = 18$ cm, $DP = 6\sqrt{3}$ cm, deci $BD = 12\sqrt{3}$ cm; b) Dacă F este mijlocul lui AB, atunci $BF = CE$ și $BF \parallel CE$, adică $BFEC$ este paralelogram, deci $EF = BC = 12$ cm. Așadar, $EF = AF = BF = 12$ cm, de unde rezultă că $\measuredangle AEB = 90°$. **6.** a) $\measuredangle((ABD), (CBE)) = \measuredangle(AB, BC) = 60°$; b) Fie $DE \cap AC = \{F\}$. Avem $(ABC) \cap (BDE) = BF$. Cum $CE \parallel AD$ și $AD = 2CE$, rezultă că $AC = CF = BC$, deci $AB \perp BF$. Din relațiile $DA \perp (ABC)$ și $AB \perp BF$, deducem că $DB \perp BF$. Prin urmare, distanța căutată este $BD = 50$ cm.

TESTUL 41

Subiectul I. 1. a). **2.** c). **3.** d). **4.** d). **5.** b). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. d). **2.** a). **3.** c). **4.** b). **5.** c). **6.** a).

Subiectul al III-lea. 1. a) 50 de pagini; b) 200 de pagini. **2.** a) $(x^2+2x)(x^2+2x+5)+6 \overset{x^2+2x=a}{=} a(a+5)+6 = a^2+2a+$ $+3a+6 = a(a+2)+3(a+2) = (a+2)(a+3) = (x^2+2x+2)(x^2+2x+3)$; b) $E(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2} = \dfrac{(x+1)^2}{(x+1)^2+1} \geq 0$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$ și $E(-1) = 0$. Deci, valoarea minimă a lui $E(x)$, $x \in \mathbb{R}$, este 0. **3.** a) 0; b) $P_1(-3, -4)$, $P_2(4, 3)$. **4.** a) În triunghiul ADF avem: $\measuredangle ADF = 90°$ și $\measuredangle AFD = \measuredangle FCA + \measuredangle FAC = 30°$ (căci $FA = FC$), deci $2AD = AF$; b) Deoarece $\measuredangle EAF = \measuredangle BAF - \measuredangle BAE = 75° - 45° = 30° = \measuredangle EFA$, rezultă că $AE = EF$. **5.** a) Fie P intersecția dintre paralela prin I la BC și paralela prin F la AB. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul PIF ($\measuredangle P = 90°$, $PF = 40$ m, $PI = 30$ m), obținem $IF = 50$ m; b) Fie M mijlocul lui AB, O mijlocul lui FI și N mijlocul lui CD. Deoarece $OM = 25$ m $= \dfrac{FI}{2}$ și $OM \perp AB$, rezultă că cercul cu diametrul FI este tangent în M dreptei AB. Analog se arată că cercul cu diametrul FI este tangent în N dreptei CD. **6.** a) Cum $\measuredangle CVA = \measuredangle AVB = 90°$, rezultă că $VA \perp (VBC)$, deci distanța de la A la planul (VBC) este $VA =$ $= 6$ cm; b) Fie M mijlocul lui BC. Din relațiile $\measuredangle CVB = 90°$ și $BM = MC$, rezultă că $VM = BC : 2 = 3\sqrt{2}$ cm. Cum proiecția dreptei VA pe planul (ABC) este dreapta AM, deducem că $\operatorname{tg}(\measuredangle(VA, (ABC))) = \operatorname{tg}(\measuredangle(VA, AM)) = \operatorname{tg}(\measuredangle VAM) =$ $= \dfrac{VM}{VA} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

TESTUL 42

Subiectul I. 1. b). **2.** d). **3.** a). **4.** c). **5.** b). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. d). **2.** d). **3.** b). **4.** c). **5.** d). **6.** b).

Subiectul al III-lea. 1. a) 240 de lei; b) 300 de lei. **2.** a) $E(x) = \dfrac{x-1}{(x+1)(x+2)} \cdot \dfrac{x+2}{x(x-1)} = \dfrac{1}{x(x+1)}$; b) $E(2) + E(3) + \ldots + E(9) =$ $= \left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{10}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{4}{10} = 0{,}4 \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right) \cap \mathbb{Q}$. **3.** a) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x - 1 = 5 - x \Leftrightarrow x = 3$. Cum $f(3) = 2$, rezultă că $A(3, 2)$ este singurul punct comun al reprezentărilor grafice ale celor două funcții; b) Avem $B(1, 0)$, $C(5, 0)$ și $AB = AC = 2\sqrt{2}$ u, deci $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Rezultă că ΔABC este dreptunghic isoscel. **4.** a) Cum $AD =$ $= CD$ și $AB = CB$, rezultă că BD este mediatoarea segmentului AC, deci dreptele AC și BD sunt perpendiculare; b) Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Avem $AO = OC = 8$ cm. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile AOB și AOD, obținem $BO =$ $= 6$ dm și $DO = 15$ dm, deci $BD = 21$ dm. **5.** a) $\measuredangle EDF = \measuredangle ADC - (\measuredangle ADE + \measuredangle CDF) = 150° - (60° + 60°) = 30°$; b) Fie $EP \perp DF$, $P \in (DF)$. Avem $DE = \dfrac{AD}{2} = 6$ cm, $DP = DE \cdot \cos 30° = 3\sqrt{3}$ cm, $DF = \dfrac{DC}{2} = 6\sqrt{3}$ cm. Deci, P este mijlocul lui DF și, cum $EP \perp DF$, rezultă că $EF = DE = 6$ cm. **6.** a) Din $MN \parallel BC$ și $BC \parallel B'C'$, rezultă că $MN \parallel B'C'$, deci punctele M, N, C' și B' sunt coplanare; b) Avem $MB' = NC' = 10$ cm, $MN = 6$ cm și $B'C' = 12$ cm, deci $\mathcal{P}_{B'MNC'} = 38$ cm.

TESTUL 43

Subiectul I. 1. a). **2.** b). **3.** b). **4.** a). **5.** d). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** c). **3.** d). **4.** d). **5.** d). **6.** a).
Subiectul al III-lea. 1. a) Dacă numărul apartamentelor cu două camere ar fi egal cu numărul apartamentelor cu trei camere, atunci numărul tuturor camerelor ar fi egal cu $14 \cdot 2 + 14 \cdot 3 = 70 \neq 73$. Deci, nu este posibil; b) Fie x numărul apartamentelor cu două camere și y numărul apartamentelor cu trei camere. Avem $x + y = 28$ și $2x + 3y = 73$, deci

$x = 11$, $y = 17$. **2.** b) Conform a), rezultă că $E(x) \geq 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Dacă $E(n) = 1$, atunci $n = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Cum n este număr întreg, $E(n)$ este, de asemenea, întreg. Rezultă că, atunci când $n \in \mathbb{Z}$, $E_{min} = 2$ (pentru $n \in \{0, 1\}$). **3.** a) $f(4) = 0$, deci $P = 0$; b) $AB = \sqrt{80} < 9$. **4.** a) $\sphericalangle DMP = \sphericalangle AMN$ (din asemănarea triunghiurilor MDP și MAN), rezultă că M, N, P sunt coliniare; b) $\sphericalangle AMB = 90°$; $NP = MN - MP = 2$ cm. **5.** a) Fie D proiecția punctului B pe latura AC. Avem $BD = AB \cdot \sin A = 4$ cm, $AD = 3$ cm, $DC = 5$ cm și $BC = \sqrt{41}$ cm; b) $\mathcal{A}_{ABD} = BD \cdot AC : 2 = 16$ cm^2. **6.** a) 72 cm; b) Fie M mijlocul muchiei BC; atunci $VM = 4\sqrt{17}$ cm. Suma $VN + NP$ este minimă atunci când punctele V, N și P sunt coliniare pe desfășurare. Din $\Delta PBN \sim \Delta VMN$ obținem că $\frac{BN}{NM} = \frac{BP}{VM} = \frac{1}{2}$ și atunci $BN = \frac{1}{3}BM = \frac{1}{6}BC$, de unde $NC = 5BN$.

TESTUL 44

Subiectul I. 1. d). **2.** b). **3.** d). **4.** d). **5.** c). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** d). **3.** a). **4.** c). **5.** b). **6.** a).
Subiectul al III-lea. 1. a) Nu; $4 \nmid 35$; b) Folosim 2 timbre de 4 lei și 3 timbre de 9 lei. **2.** a) $E(x) = -4x^2 + 4x - 1 + x^2 - x - 6 + 3x^2 + 12x + 12 = 15x + 5$; b) $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. **3.** a) 1; b) $a = -1$, $b = 2$. **4.** a) Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile OMQ și ONP deducem că $OM = ON = 5\sqrt{3}$ cm; b) $\sphericalangle ABQ = \frac{1}{2}\sphericalangle AOQ = 15°$. **5.** a) $\sphericalangle BMC = 180° - \frac{\sphericalangle B + \sphericalangle C}{2} = 90°$; b) Dacă $M \in AD$, rezultă că triunghiurile ABM și DCM sunt isoscele, cu $AM = AB$ și $DM = DC$, deci $AD = 2AB$. **6.** a) $OM = \sqrt{3}$ cm; $AM = 3OM = 3\sqrt{3}$ cm; $AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \frac{2AM}{\sqrt{3}} = 6$ cm; b) $\sphericalangle(VB, (VAM)) = \sphericalangle BVM$, $\operatorname{tg}(\sphericalangle BVM) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

TESTUL 45

Subiectul I. 1. b). **2.** c). **3.** c). **4.** a). **5.** a). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** d). **3.** b). **4.** d). **5.** d). **6.** b).
Subiectul al III-lea. 1. a) Dacă efectivul clasei ar fi de 24 de elevi și x elevi ar lipsi, atunci, conform enunțului, trebuie ca $x = \frac{24 - x}{8}$, imposibil ($x \in \mathbb{N}^*$); b) Fie a numărul elevilor absenți și p numărul elevilor prezenți. Atunci $a = \frac{1}{8}p$ și $a + 2 = \frac{1}{5}(p - 2)$. Găsim $a = 4$ și $p = 32$. În clasă sunt 36 de elevi. **2.** a) $E(x) = 1 - \frac{8}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{(x-2)^2}{4x} \cdot \frac{2x}{x-2} = 1 - \frac{4}{x+2} = \frac{x-2}{x+2}$; b) $E(-x) = \frac{-x-2}{-x+2} = \frac{x+2}{x-2} = \frac{1}{E(x)}$. **3.** a) 1; b) Dacă $M(x, y)$ este punctul căutat, atunci $y = 3 - 2x$ și $y = x + 6$. Rezultă $M(-1, 5)$. **4.** a) MP și NP sunt mediane în triunghiurile dreptunghice BMC, respectiv CNB, deci $MP = NP = \frac{BC}{2}$; b) $\sphericalangle MPN = 180° - (\sphericalangle MPC + \sphericalangle NPB) = 180° - (180° - 2\sphericalangle C + 180° - 2\sphericalangle B) = 2(\sphericalangle B + \sphericalangle C) - 180° = 2 \cdot 120° - 180° = 60°$. Astfel, triunghiul PMN este isoscel, cu $\sphericalangle P = 60°$, deci este echilateral. **5.** a) Deoarece AM este diametru, rezultă că $\sphericalangle ACM = 90°$. b) Dacă $\{D\} = AM \cap BC$, atunci D este mijlocul lui BC. În triunghiul dreptunghic ACM: $AC^2 = AD \cdot AM$ și de aici rezultă că $AM = 50$ cm, deci $R = 25$ cm. **6.** a) Fie M mijlocul laturii BC. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul VOM, obținem $VM = 13$ cm; b) Lungimea totală a întăriturilor este egală cu $4(\sqrt{313} + 24)$ m < 167 m.

TESTUL 46

Subiectul I. 1. b). **2.** b). **3.** c). **4.** d). **5.** c). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. d). **2.** a). **3.** b). **4.** a). **5.** a). **6.** c).
Subiectul al III-lea. 1. a) $a = \frac{-3b-1}{2}$ și $c = \frac{4b-2}{5}$, deci $8a + 15c = 4(-3b - 1) + 3(4b - 2) = -10$; b) $b = 3$, $a = -5$.
2. a) $E(x) = \frac{-x}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-1}{2x^2} = -\frac{1}{2x}$; b) 1. **3.** a) 7; b) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$. **4.** a) $\Delta ADE \sim \Delta ACB$ (deoarece $DE \parallel BC$). Din $\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC}$ deducem $DE = 20$ cm; b) ΔDEB este isoscel (deoarece $DE = EB = 20$ cm), deci $\sphericalangle BDE = \sphericalangle EBD$ și, cum $\sphericalangle EDB = \sphericalangle CBD$, rezultă că $\sphericalangle CBD = \sphericalangle DBE$. **5.** a) Fie O mijlocul laturii AB. Cum $OM = ON = 5$ cm, rezultă concluzia; b) $\sphericalangle ANB$ este dreptunghic în N, deci $\sphericalangle NBC = 90° - \sphericalangle NBA = \sphericalangle NAB$. **6.** a) $NP \parallel CD$, deci $\sphericalangle(NP, CM) = \sphericalangle(CD, CM) = \sphericalangle MCD$. Folosind faptul că ΔMCD este isoscel, obținem $\sin(\sphericalangle MCD) = \frac{\sqrt{6}}{3}$; b) $\mathcal{A}_t = 16\sqrt{3}$ cm^2 < 28 cm^2 $\Leftrightarrow 4\sqrt{3} < 7 \Leftrightarrow \sqrt{48} < 7$, evident adevărat.

TESTUL 47

Subiectul I. 1. b). **2.** b). **3.** b). **4.** c). **5.** c). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. d). **2.** a). **3.** c). **4.** b). **5.** d). **6.** b).
Subiectul al III-lea. 1. a) 160 de lei; b) 2,5 lei. **2.** a) $E(x) = \frac{x-1}{2} - \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x-1}{2} = \frac{x-1}{2}\left(1 - \frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{x-1}{2} \cdot \frac{2}{x+1} = \frac{x-1}{x+1}$;
b) $E(\sqrt{3}) + \sqrt{3} = 2$. **3.** a) 2; b) $M(3, 2)$. **4.** $AO = \sqrt{12}$ dm, $OM = 2$ dm, $AM = 4$ dm. a) $AM^2 = AO^2 + OM^2$, deci $\sphericalangle AOM = 90°$; b) $AO + OM = (2\sqrt{3} + 2)$ dm. Avem $2\sqrt{3} + 2 < 5{,}5 \Leftrightarrow 2\sqrt{3} < 3{,}5 \Leftrightarrow 12 < 12{,}25$, adevărat. **5.** a) Triunghiul DMN este dreptunghic isoscel, deci $DM = DN$. Rezultă $AM = NC$. b) $\Delta MAB \equiv \Delta NCB$, rezultă $NB = MB$ și $\sphericalangle NBC = \sphericalangle MBA = 15°$. Triunghiul MBN este isoscel cu $\sphericalangle MBN = 60°$, deci este echilateral. **6.** a) $3\sqrt{2}$ cm; b) Dreptele AO și AC' sunt în planul (ACC'). Cum $\sphericalangle OAC = 45°$ și $\sphericalangle C'AC = 60°$, rezultă că $\sphericalangle(AO, AC') = \sphericalangle C'AO = 15°$.

TESTUL 48

Subiectul I. 1. d). **2.** a). **3.** c). **4.** b). **5.** d). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** c). **3.** b). **4.** a). **5.** d). **6** b).
Subiectul al III-lea. 1. a) Maria primește $2k$ lei, iar Ioana $3k$ lei, deci Ioana primește mai mult; b) $S = 100$. **2.** a) $E(x) = \frac{7x-7}{x^2-1} \cdot \frac{(x+1)^2}{7x-7} = \frac{x+1}{x-1}$; b) 55. **3.** a) 6; b) $M(-12, 0)$. **4.** a) Deoarece $\sphericalangle DAE = \sphericalangle CAB$ și $\sphericalangle AED = \sphericalangle ABC$, rezultă că $\Delta ADE \sim \Delta ACB$; b) Lungimea drumului DEC este de 23 km, iar lungimea drumului DBC este de 25 km. Primul drum este cu 2 km mai scurt decât al doilea drum. **5.** a) $\mathcal{A}_{AMN} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{ABM} - \mathcal{A}_{CMN} - \mathcal{A}_{ADN} = 15$ cm^2; b) $\mathcal{A}_{AMN} = \frac{AM \cdot AN \cdot \sin(\sphericalangle MAN)}{2} = 15\sqrt{2}\sin(\sphericalangle MAN)$. Rezultă $\sin(\sphericalangle MAN) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, deci $\sphericalangle MAN = 45°$. **6.** a) 10π cm $\simeq 30$ cm;
b) $\mathcal{V} = 3{,}416\pi$ dm$^3 \simeq 10{,}248$ ℓ.

TESTUL 49

Subiectul I. 1. c). **2.** c). **3.** b). **4.** c). **5.** a). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. b). **2.** d). **3.** b). **4.** d). **5.** c). **6.** d).
Subiectul al III-lea. 1. a) Presupunem că numărul candidaților înscriși este 120. Atunci, după vizita medicală rămân $\frac{14}{15} \cdot 120 = 112$ candidați, după proba scrisă rămân $\frac{5}{7} \cdot 112 = 80$ de candidați, iar după proba orală rămân $\frac{1}{4} \cdot 80 =$

= 20 de candidați, fals. Numărul candidaților înscriși nu este 120; b) 150. **2.** a) $E(x) = \left(\frac{2x-1}{x+1}-1\right)\cdot\frac{(x+1)^2}{x-2} = x+1$; b) 176. **3.** a) $a = -1$; b) 1. **4.** a) 26 m^2. b) Patrulaterul $DMBC$ este romb. **5.** a) Triunghiurile AMD și AND sunt dreptunghice egale, deci $AM = AN$; b) Cum $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, rezultă că $MN \parallel BC$, deci $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}$, de unde obținem $MN = 14{,}4$ cm. **6.** a) $AS \perp SB$, $AS \perp SC \Rightarrow AS \perp (SB, SC)$, deci $AS \perp (SBC)$; b) Triunghiul DSE este dreptunghic în S; rezultă $DE = \sqrt{6}$ cm.

TESTUL 50

Subiectul I. 1. b). **2.** d). **3.** a). **4.** c). **5.** d). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. d). **2.** a). **3.** a). **4.** c). **5.** d). **6.** c).

Subiectul al III-lea. 1. a) Nu, deoarece $9 \cdot 8 > 65$; b) Sunt 8 lădițe și 121 kg mere. **2.** b) $E\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n}$; $P = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{9}{10} = \frac{1}{10}$. **3.** a) Din condițiile $f(-3) = -1$ și $f(-6) = -4$, obținem $a = \frac{1}{3}$ și $b = -2$; b) Punctele A, B, C sunt situate pe graficul funcției f pentru $a = \frac{1}{3}$ și $b = -2$, deci sunt coliniare. **4.** a) $\measuredangle MPQ = \measuredangle MQP = 60°$, deci triunghiul MPQ este echilateral; b) $\measuredangle APB = 60°$, deci $\measuredangle MPB = 180°$. **5.** a) $S = 2700\sqrt{3}$ m^2 < 5000 m^2; b) Patrulaterul $ANCD$ este romb, deci DN este bisectoarea unghiului ADC. **6.** a) $BC^2 = AB^2 + AC^2$, deci triunghiul ABC este dreptunghic în A; b) Dacă $OQ \perp (ABC)$, Q este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, deci mijlocul laturii BC; $d(O, (ABC)) = OQ = 8$ cm.

TESTUL 51

Subiectul I. 1. b). **2.** a). **3.** b). **4.** c). **5.** a). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** d). **3.** c). **4.** a). **5.** c). **6.** b).

Subiectul al III-lea. 1. a) 1; b) Fie x numărul merelor din coș. Ionuț ia $\frac{x+2}{2}$, iar Andrei $\frac{x+4}{4}$ mere. Rezultă $\frac{x+2}{2} + \frac{x+4}{4} + 2 = x$ și de aici $x = 14$. **2.** a) 1; b) $E(x) = \frac{(x+5)(x-1)}{3x+6}\cdot\frac{3x+6}{(x+1)(x+5)} + \frac{2}{x+1} = \frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{x+1} = 1$. **3.** a) $a = 1$, $b = 3$; b) $\operatorname{tg}(\measuredangle AOB) = 4$. **4.** a) $\mathcal{A}_{DCF} = \mathcal{A}_{ABE} = 10000$ m$^2 \Rightarrow CF = AE = 200$ m, deci $BF = DE = 100$ m și cum $BF \parallel DE$, rezultă că $DEBF$ este paralelogram, deci $DF \parallel BE$; b) Lungimea gardului este $200(1 + \sqrt{5})$ m < 650 m. **5.** a) Deoarece $\Delta CQN \sim \Delta CPB$ rezultă că $\frac{CN}{CB} = \frac{QN}{PB}$, deci $\frac{3}{5} = \frac{QN}{10}$. Astfel, $QN = 6$ cm și $MN = MQ + QN = 10$ cm; b) Din $MN \parallel PB$ și $MN = PB$, rezultă că $MPBN$ paralelogram, deci $MP \parallel BC$. **6.** În planul $(ADQM)$ (punctele A, D, Q, M sunt coplanare deoarece $AM \parallel DQ$) ducem prin A paralela AE la MQ, $E \in DQ$. În planul $BCPN$ ducem prin B paralela BF la NP, $F \in CP$. Cum $DE = CF = 3$ cm și $DE \parallel CF$ (fiind perpendiculare pe planul (ABC)), rezultă că $DCFE$ este dreptunghi, $EF \parallel CD$ și $EF = CD$. Deducem că $ABFE$ este paralelogram. Rezultă că segmentele MQ și NP sunt paralele și egale (fiind paralele și egale cu AE, respectiv BF). Prin urmare, M, N, P, Q sunt coplanare, iar patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

TESTUL 52

Subiectul I. 1. b). **2.** d). **3.** a). **4.** c). **5.** d). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. a). **2.** d). **3.** c). **4.** d). **5.** b). **6.** a).

Subiectul al III-lea. 1. Fie a numărul elevilor absenți și n numărul total al elevilor din clasă. Atunci $a = \frac{1}{9}(n-a)$, de aici, $n = 10a$. Deci, a) $n = 30 \Rightarrow a = 3$; b) $a = 3 \Rightarrow n = 30$. **2.** b) $E(n) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3 \mid n-1 \Leftrightarrow n \in \{1, 4, 7, ..., 100\}$; există 34 de valori convenabile ale lui n. **3.** a) $A(3, 0)$, $B(0, 4)$ și $AB = 5$; b) $D(-3, 8)$ și cum $f(-3) = 8$, punctul D este pe graficul funcției f. **4.** a) Cum $BC^2 = BE^2 + CE^2$, rezultă că triunghiul BCE este dreptunghic isoscel. Din $\measuredangle ACB = \measuredangle CBE = 45°$, rezultă că $AC \parallel BE$; b) Deoarece $\Delta BFE \sim \Delta CFA$ (pentru că $BE \parallel AC$), rezultă că $\frac{BF}{FC} = \frac{BE}{AC}$, deci $\frac{BF}{FC} = \frac{1}{2}$. Deducem $BF = \frac{4}{3}$ cm $= \frac{1}{3}BC$. **5.** a) 180 m^2; b) $DM < CM$, traseul N–D–M este mai scurt decât N–C–M. **6.** a) $6\sqrt{6}$ cm; b) 60°.

TESTUL 53

Subiectul I. 1. a). **2.** d). **3.** c). **4.** b). **5.** a). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. a). **2.** b). **3.** d). **4.** c). **5.** d). **6.** a).
Subiectul al III-lea. 1. a) 58; b) Dacă folosim a bancnote de 10 lei și b bancnote de 5 lei, $a, b \neq 0$, găsim $b = 60 - 2a$, $a = 1, 2, ..., 29$. Sunt 29 de soluții. **2.** a) $E(x) = \frac{2x-5}{x-3} \cdot \frac{(x-3)^2}{(-1)(2x-5)} = 3 - x$; b) $E^2(547) - E(546) \cdot E(548) = 544^2 - 543 \cdot$ $\cdot 545 = a^2 - (a-1)(a+1) = 1$; **3.** a) $f(2) = g(2) = 3$; b) CM și AO sunt înălțimi în triunghiul ABC. **4.** a) $\measuredangle ABM = \measuredangle MBC$ (BM bisectoare), $\measuredangle MBC = \measuredangle DNC$ ($BM \parallel ND$), deci $\measuredangle ABM = \measuredangle DNC$. La fel $\measuredangle AMB = \measuredangle NDC$. Astfel: $\measuredangle BCD = 180° -$ $- (\measuredangle CND + \measuredangle CDN) = 180° - (\measuredangle ABM + \measuredangle AMB) = \measuredangle BAD = 80°$; b) Fie $\measuredangle ABC = 2a$ și $\measuredangle ADC = 2b$, atunci $a + b = 100°$. Astfel: $\measuredangle CND = 180° - (\measuredangle NDC + \measuredangle NCD) = 100° - b = a = \measuredangle CBM$. Rezultă că $BM \parallel DN$. **5.** a) Cum AN și MC sunt paralele și egale, rezultă că $ANCM$ este paralelogram, deci $AM \parallel CN$; b) Aria paralelogramului $ANCM$ este $64 \cdot 48 = 3072$ m^2 și $CN \cdot h$, h distanța dintre AM și CN, de aici $60 \cdot h = 3072$, deci $h = 51{,}2$ m. **6.** a) Avem $BC \perp AM$ și $BC \perp MD \Rightarrow BC \perp (AMD)$ și cum $AD \subset (AMD) \Rightarrow BC \perp AD$; b) Cum triunghiul ACD este dreptunghic (deoarece $AD^2 = AC^2 + DC^2$) și CN este mediană, rezultă $CN = 5$ cm. La fel, $BN = 5$ cm. Din triunghiul NMC, rezultă că $MN = 3$ cm.

TESTUL 54

Subiectul I. 1. c). **2.** d). **3.** a). **4.** b). **5.** d). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. a). **2.** b). **3.** b). **4.** d). **5.** c). **6.** d).
Subiectul al III-lea. 1. a) Da. Se folosesc șase bidoane de doi litri și șase bidoane de șase litri; b) 13 bidoane. **2.** a) $E(x) =$ $= \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} + \frac{x}{2(x+1)}\right] \cdot \frac{x^2-1}{2x^2} = \frac{x(x+1)}{2(x^2-1)} \cdot \frac{x^2-1}{2x^2} = \frac{x+1}{4x}$; b) $E(-x) = \frac{-x+1}{-4x} = \frac{x-1}{4x}$. **3.** a) $A(0, 2) \in Oy$; b) $B(-2, 0)$, $C(2\sqrt{3}, 0)$, $\measuredangle BAO = 45°$, $\measuredangle CAO = 60°$ și $\measuredangle BAC = 105°$. **4.** a) $CD = 16$ cm, $AB = 25$ cm; b) $AB^2 = AC^2 + BC^2$, deci $\measuredangle ACB = 90°$. **5.** a) $NC \parallel AM$ și $NC = AM$ (căci $\Delta NOC \equiv \Delta MOA$ (C.U.)), deci $AMCN$ este paralelogram și cum $AC \perp MN$, rezultă că $AMCN$ este romb; b) $\Delta CON \sim \Delta CDA \Rightarrow \frac{NO}{AD} = \frac{CO}{CD} \Rightarrow NO = 37{,}5$ m și $MN = 75$ m. **6.** a) $MA \perp (ABC)$ și $NO \perp (ABC) \Rightarrow MA \parallel NO$, deci punctele M, A, O și N sunt coplanare. Cum $\measuredangle NOC = \measuredangle MAC = 90°$ și $\frac{NO}{MA} = \frac{CO}{CA}$ rezultă că $\measuredangle NCO = \measuredangle MCO$, deci M, N, C sunt coliniare; b) AN este mediană în ΔMAC, dreptunghic în A, deci $AN = \frac{MC}{2}$. BN este mediană în ΔMBC, dreptunghic în B, deci $BN = \frac{MC}{2}$. Rezultă că $AN = BN = MN = CN$. Astfel, N este centrul sferei care conține punctele M, A, B și C, iar raza sferei este egală cu $\frac{MC}{2} = \sqrt{41}$ m.

TESTUL 55

Subiectul I. 1. c). **2.** c). **3.** d). **4.** d). **5.** d). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. d). **2.** a). **3.** d). **4.** b). **5.** d). **6.** b).
Subiectul al III-lea. 1. a) $(a + b) : 2 = 39 \Rightarrow a + b = 39 \cdot 2 = 78$; b) $a + b = 78$ şi $a + 30 = 3(b - 12)$. Rezultă că numerele sunt 42 şi 36. **2.** b) $E(-a) = E(a - 2) = a^2 - 2a - 2$, pentru orice număr real a. **3.** a) Cum $A(-4, 0)$, $B(0, 4)$, $C(2,0)$, $D(0, 2)$ deducem că triunghiurile AOB şi COD sunt dreptunghice isoscele, deci $\measuredangle BAO = \measuredangle DCO = 45°$; b) D este ortocentrul triunghiului ABC. **4.** a) $\Delta ABM \equiv \Delta ADN$, deci $AM = AN$; b) Cum $\measuredangle MAB = \measuredangle NAD$, rezultă $\measuredangle NAM = \measuredangle NAD + \measuredangle DAM = \measuredangle BAM + \measuredangle DAM = \measuredangle DAB = 90°$. **5.** Notăm $AM = x$, atunci $\mathcal{P}_{AMN} = 2x + MN$ şi $\mathcal{P}_{BCNM} = 36 - 2x + MN$, deci $2x + MN = 36 - 2x + MN$ şi de aici rezultă că $x = 9$ cm; b) Cum $\Delta AMN \sim \Delta ABC$, rezultă că $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}$, deci $MN = 14{,}4$ cm. **6.** a) $\pi g(R + r) = 225\pi \Rightarrow g = 15$ cm; b) $h = 12$ cm şi $\mathcal{V} = 756\pi$ cm^3.

TESTUL 56

Subiectul I. 1. c). **2.** a). **3.** b). **4.** d). **5.** d). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. d). **2.** d). **3.** c). **4.** a). **5.** d). **6.** b).
Subiectul al III-lea. 1. a) $ab = (a; b) \cdot [a; b] = 15 \cdot 420 = 6300$; b) Fie $a = 15x$, $b = 15y$, $(x; y) = 1$. Rezultă $15x \cdot 15y = 6300$, deci $xy = 38$, $(x; y) = 1$. Găsim $(a, b) \in \{(15, 420), (60, 105) (105, 60), (420, 15)\}$. **2.** b) $S = -2(1 + 2 + ... + 10) + 10 \cdot 10 = -10$. **3.** a) $f(-1) = a, f(b) = 5 \Rightarrow a = 1, b = 1$; b) $AB = 2\sqrt{5}$. **4.** a) $AM = AN = AP$; b) $\measuredangle MAN = 2\measuredangle BAC < 180°$. **5.** a) $\mathcal{A}_{OMN} = \mathcal{A}_{ADC} - \mathcal{A}_{ONC} - \mathcal{A}_{OMA} - \mathcal{A}_{DMN} = 15$ cm^2; b) Distanţa de la O la dreapta MN este egală cu 6 cm, deci MN este tangentă cercului. **6.** a) $\mathcal{V}_{\text{cub mare}} = 6^3 = 108$ cm^3; prin tăierea cubului de lemn se obţin 27 de cubuleţe mai mici, având în total volumul 108 cm^3. Notând latura unui cub mic cu l obţinem $27 \cdot l^3 = 108$, de unde $l = 2$ cm; b) Cele 27 de cubuleţe au 162 de feţe dintre care 54 sunt vopsite. Mai trebuie vopsite 108 feţe. Avem nevoie de 160 g vopsea.

TESTUL 57

Subiectul I. 1. b). **2.** c). **3.** b). **4.** b). **5.** d). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** a). **3.** a). **4.** b). **5.** c). **6.** c).
Subiectul al III-lea. 1. a) Nu. b) 5 lei. **3.** a) $a = 2$; b) $AB = 2\sqrt{5}$. **4.** a) $\Delta ABN \equiv \Delta CBM$ (L.U.L.) $\Rightarrow BN = BM$; b) $\mathcal{A}_{BND} = \frac{1}{2} \cdot ND \cdot d(B, ND) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} AD \cdot d(B, AD) = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABD}$. Analog, $\mathcal{A}_{BMD} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{BCD}$ şi, prin sumare, se obţine că $\mathcal{A}_{BMDN} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABCD}$. **5.** a) $\measuredangle ACB$ este unghi înscris într-un semicerc, deci $\measuredangle ACB = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$; b) $\cos(\measuredangle BAC) = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $\measuredangle BAC = 30°$. Măsura arcului $\overset{\frown}{BC}$ este $2 \cdot \measuredangle BAC = 60°$. **6.** a) 192 m^2; b) Dacă $P = \text{pr}_{B'C} B$, din teorema celor trei perpendiculare rezultă că $AP \perp B'C$, deci $d(A, B'C) = AP = \sqrt{12^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{12\sqrt{26}}{5}$ m.

TESTUL 58

Subiectul I. 1. a). **2.** c). **3.** d). **4.** a). **5.** b). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. b). **2.** b). **3.** b). **4.** d). **5.** b). **6.** c).
Subiectul al III-lea. 1. a) 60%; b) 8 băieţi. **2.** b) $E(x) = \frac{x+3}{(x+1)(x+2)} \cdot \frac{(x-2)(x+2)(x+3)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x+3}{x+1}$. **3.** b) Fie $B(x, 1 - 2x)$; atunci $AB = |x| \cdot \sqrt{5}$. Obţinem că $|x| = 2$, deci există două puncte ca în enunţ: $B_1(2, -3)$ şi $B_2(-2,5)$. **4.** b) Triunghiurile

AOD, COD şi BOC sunt echilaterale. Din $\sphericalangle DCO = \sphericalangle COB$ deducem că $DC \parallel AB$ şi, cum $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 60°$, $ABCD$ este un trapez isoscel. **5.** a) 50 cm^2; b) Cum $CB = CD$ şi $MB = MD$, punctele M şi C se află pe mediatoarea segmentului BD, aşadar M, C şi centrul O al pătratului sunt puncte coliniare. Astfel, $MC = MO - CO = 5\sqrt{3} - 5 = 5(\sqrt{3} - 1)$ cm. **6.** a) 27 ℓ; b) Cum $AA' \parallel (MDD')$, rezultă că $d(A', (MDD')) = d(A, (MDD'))$. Fie $P = pr_{DM} A$; avem $AP \perp DM$, $AP \perp DD'$, deci $AP \perp (MDD')$, astfel că $d(A, (MDD')) = AP$. Calculând în două moduri aria triunghiului MAD, obţinem $AP = 12\sqrt{5}$ cm.

TESTUL 59

Subiectul I. 1. c). **2.** a). **3.** a). **4.** c). **5.** a). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. d). **2.** b). **3.** d). **4.** a). **5.** d). **6.** a).
Subiectul al III-lea. 1. a) 4 caiete; b) 5 lei. **2.** b) $E(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1, 0\}$. **3.** a) $A(2, 0)$; b) Fie $A' = sim_B A$; atunci B este mijlocul segmentului AA', deci $x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{2}$ şi $y_B = \frac{y_A + y_{A'}}{2}$. Obţinem $B(-2, 4)$. **4.** b) $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 60°$, $\sphericalangle C = \sphericalangle D = 120°$. **5.** a) 12 m^2; b) Fie a latura pătratului; $\Delta APN \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{4-a}{4} = \frac{a}{3} \Rightarrow a = \frac{12}{7}$ m. **6.** a) $AO = \frac{AB\sqrt{6}}{3}$, deci $AB = 6$ cm; $MN = \frac{1}{2}BD = 3$ cm; b) Fie $P = pr_{(BCD)} M$ şi $Q = pr_{(BCD)} N$. Punctele B, M, A sunt coliniare, deci şi proiecţiile B, P, O ale lor pe planul (BCD) sunt coliniare. M este mijlocul lui AB, prin urmare P este mijlocul lui OB. Analog, Q este mijlocul lui OD. Avem $PQ = \frac{1}{2}BD = 3$ cm, $d(C, PQ) = CO + \frac{1}{2}d(O, BD) = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm, deci $\mathcal{A}_{CPQ} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

TESTUL 60

Subiectul I. 1. a). **2.** b). **3.** c). **4.** a). **5.** c). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. d). **2.** c). **3.** c). **4.** a). **5.** c). **6.** a).
Subiectul al III-lea. 1. a) 10 ani; b) peste 25 ani. **2.** b) $E(x) = 2$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$. **3.** a) $f(1) = 1 < \sqrt{2} - 1 = f(\sqrt{2})$; b) 0,25. **4.** a) $d(O, CD) = 5$ cm, iar raza cercului este 13 cm; b) $MN = 24$ cm. **5.** a) În punctul H se întâlnesc două dintre înălţimile triunghiului, deci H este ortocentrul acestuia. Rezultă că AH este, de asemenea, înălţime; b) $\Delta B_1CH \sim \Delta C_1BH$ (U.U.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{B_1H}{C_1H} = \frac{CH}{BH} \Rightarrow BH \cdot B_1H = CH \cdot C_1H$. **6.** b) $\Delta MAE \equiv \Delta MAT \Rightarrow \sphericalangle AMT = 90°$. Cum $AM \perp ME$ şi $AM \perp MT$, rezultă că $AM \perp (MTE)$, prin urmare $d(A, (MTE)) = AM = 3\sqrt{2}$ cm.

TESTUL 61

Subiectul I. 1. d). **2.** b). **3.** b). **4.** c). **5.** c). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. a). **2.** a). **3.** c). **4.** a). **5.** d). **6.** d).
Subiectul al III-lea. 1. b) 50 ha. **2.** b) $S = \varnothing$. **3.** a) $C(1, 2)$; b) Din $f(0) = 1 \Rightarrow b = 1$; din $f(2) = 3 \Rightarrow 2a + b = 3 \Rightarrow a = 1$. **4.** a) $CD \parallel AB \Rightarrow \sphericalangle ABC = 90° \Rightarrow \sphericalangle CBD = 30° \Rightarrow CD = 5$ cm; folosim C.I.; b) ΔBCE este isoscel cu $BC = AE$, iar $\sphericalangle CBD = \sphericalangle EBD = 30°$; bisectoarea BD este şi înălţime în ΔBCE, prin urmare $BD \perp CE$. **5.** a) Dacă M, N, P sunt punctele de tangenţă cu cercul a laturilor AB, BC, respectiv CD, atunci $BM = BN = 5$ cm şi $CN = CP = 2$ cm, de unde $BC = 7$ cm; b) Înălţimea trapezului este $2\sqrt{10}$ cm, deci $r = \sqrt{10}$ cm. **6.** a) $(MCS) = (MBCQ)$, iar $\sphericalangle((MBCQ), (ABC)) = \sphericalangle MBA = 45°$; b) SO este linia mijlocie în ΔMAC, deci $SO \parallel MA$. Cum $MA \perp (ABC)$, avem $SO \perp (ABC)$.

TESTUL 62

Subiectul I. 1. b). **2.** d). **3.** b). **4.** c). **5.** a). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** b). **3.** c). **4.** a). **5.** b). **6.** c).

Subiectul al III-lea. 1. a) 28 ani; b) 7 ani. **2.** b) $n \in \{3, 4, 5, 6, ...\}$. **3.** b) $B(-1, 1)$. **4.** a) $\mathcal{A}_{ACF} = \frac{1}{2} CF \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot$ $\cdot d(C, AF) \Rightarrow d(C, AF) = \frac{CF \cdot AB}{AF} = 2\sqrt{5}$ cm; b) Dacă $P = pr_{AF} C$, atunci $\sin(\sphericalangle FAC) = \frac{CP}{AC} = \frac{1}{\sqrt{10}}$. **5.** a) $\sphericalangle ABE = 60°$, $\sphericalangle CBD = 30°$, deci $\sphericalangle DBE = 180° - 60° - 30° = 90°$; b) $\operatorname{tg}(\sphericalangle DEB) = \frac{BD}{BE} = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$, prin urmare $\sphericalangle DEB = 60° = \sphericalangle ABE$.

6. a) 5π cm^3; b) Volumul pierdut la ascuțirea creionului este $\frac{\pi}{5}$ cm^3, adică 4% din volumul inițial.

TESTUL 63

Subiectul I. 1. b). **2.** c). **3.** b). **4.** d). **5.** a). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. d). **2.** c). **3.** c). **4.** c). **5.** b). **6.** c).
Subiectul al III-lea. 1. a) 30 smochine, 24 portocale și 27 mere; b) 24 pachete. **2.** b) $n \in \{6, 9, 12, ..., 99\}$, deci sunt 32 de numere. **3.** a) doar B; b) $x = -\frac{1}{2}$. **4.** b) $\mathcal{P}_{AEC} = 18 + 6\sqrt{3} < 30$ km, deci distanța poate fi parcursă în mai puțin de jumătate de oră. **5.** a) 108°; b) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{ED} \Rightarrow AE \parallel BD$, și $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{CD} \Rightarrow ED \parallel AC$, deci $AEDT$ este un paralelogram. Apoi, $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{ED} \Rightarrow AE = ED$, deci $AEDT$ este chiar un romb. Vârfurile opuse E și T sunt simetrice față de diagonala AD. **6.** a) 0,33 m^3; b) Fie $\{S\} = OR \cap AL$. Cum SM este linie mijlocie în triunghiul LAE, rezultă că $SM \parallel AE$. Însă, $SM \subset (OMR)$, deci $AE \parallel (OMR)$.

TESTUL 64

Subiectul I. 1. d). **2.** c). **3.** a). **4.** b). **5.** d). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** d). **3.** b). **4.** a). **5.** a). **6.** c).
Subiectul al III-lea. 1. a) Nu; b) 11 apartamente. **2.** b) Unul dintre factorii $n + 6$ și $n - 4$ este, în mod necesar, egal cu 1 sau cu -1. Rezultă că $n \in \{-7, -5, 3, 5\}$. Prin verificare, găsim că $n = -7$ sau $n = 5$. **3.** a) $A(1, 2)$, $B(4, 5)$; b) 10,5. **4.** a) Fie $\{O\} = AD \cap BC$. În triunghiul BAD, BO este înălțime și mediană, deci triunghiul este isoscel; b) În H se întâlnesc înălțimile din A și C ale triunghiului ACD, deci H este ortocentrul triunghiului. **5.** a) Din $BD \parallel CE$, rezultă că $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle BEC$ (corespondente) și $\sphericalangle CBD \equiv \sphericalangle BCE$ (alterne interne), prin urmare $\sphericalangle BEC \equiv \sphericalangle BCE$; b) Cum $\Delta ABD \sim \Delta AEC$, avem $\frac{AB}{BE} = \frac{AD}{DC}$. Însă $BE = BC = 10$ cm și deducem că $AD = 3$ cm, apoi $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 3\sqrt{5}$ cm. Astfel, $\mathcal{P}_{ABD} = 3(3 + \sqrt{5})$ cm. **6.** a) $VA = VC = AC = 2\sqrt{2}$ cm; b) Fie $OM \perp VC$, $M \in VC$; din $BO \perp (VAC)$ și $OM \perp VC$, deducem că $BM \perp VC$ (T3$\perp$), deci $\sphericalangle((VAC), (VBC)) = \sphericalangle BMO$. Avem $OM = \frac{\sqrt{6}}{2}$ cm, $BM = \frac{\sqrt{14}}{2}$ cm; așadar, $\cos(\sphericalangle BMO) = \frac{OM}{BM} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

TESTUL 65

Subiectul I. 1. b). **2.** c). **3.** d). **4.** d). **5.** b). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** a). **3.** a). **4.** b). **5.** d). **6.** b).

Subiectul al III-lea. 1. a) 11; b) 9. **2.** b) Avem $2a - 1 = 0$ sau $a^2 + 4 = 0$. Însă $a^2 + 4 \geq 4$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, deci rămâne unica variantă $a = \frac{1}{2}$. **3.** Cum G_f este o dreaptă, înseamnă că legea de corespondență este de forma $f(x) = ax + b$. Din $f(0) = 0$ și $f(3) = 2$, obținem că $a = \frac{2}{3}$, $b = 0$, așadar $f(x) = \frac{2}{3}x$. **4.** a) $BC \parallel DF$ și $BC = DF\ (= AD)$, deci $BCFD$ este paralelogram; b) Din a) rezultă că $CF \parallel BD$. Analog, se arată că $CE \parallel BD$ și, de aici, punctele C, E și F sunt coliniare. **5.** a) Din teorema catetei, $AB = \sqrt{BE \cdot BD} = 150$ m și $AD = \sqrt{BD \cdot DE} = 200$ m, deci $\mathscr{P}_{ABCD} = 700$ m; b) $\Delta EAD \sim \Delta EFB$, de unde $\frac{AD}{BF} = \frac{DE}{EB}$; rezultă că $BF = 112{,}5$ m și atunci $CF = 87{,}5$ m. **6.** a) $144\sqrt{3}$ cm^3; b) Fie M mijlocul lui BC și $P = \text{pr}_{VM} A$. Din $AP \perp VM$, $VM \perp BC$ și $AP \perp BC$, folosind reciproca a doua a teoremei celor trei perpendiculare, rezultă că $AP \perp$ $\perp (VBC)$. Cum $\mathscr{A}_{VAM} = \frac{VO \cdot AM}{2} = \frac{VM \cdot AP}{2}$, obținem că $AP = \frac{VO \cdot AM}{VM} = \frac{36}{\sqrt{13}}$ cm. Observăm că $\text{pr}_{(VBC)} AB = PB$, deci $\sphericalangle(AB, (VBC)) = \sphericalangle ABP$, iar $\sin(\sphericalangle ABP) = \frac{AP}{AB} = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

TESTUL 66

Subiectul I. 1. c). **2.** a). **3.** d). **4.** b). **5.** a). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** a). **3.** b). **4.** c). **5.** b). **6.** d).
Subiectul al III-lea. 1. a) 36 ani; b) Suma vârstelor tuturor celor patru copii este 40 de ani; vârsta frățiorului este $40 - 36 = 4$ ani. **2.** b) $E(a) = (a + 1)^2 + 2 \geq$ și, analog, $E(b) \geq 2$. Cum $E(a) + E(b) = 4$, rezultă că $E(a) = E(b) = 2$, de unde $a = b = -1$. **3.** b) $a = 2$. **4.** $18(2\pi - 3\sqrt{3})$ cm^2. **5.** a) Ambele unghiuri au măsura egală cu $90° - \sphericalangle C$; b) $BE = \frac{BC \cdot AD}{AC} =$ $= 9{,}6$ cm, $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2}$ 2,8 cm; $\Delta AEH \sim \Delta ADC \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{EH}{CH} \Rightarrow HE = 2{,}1$ cm. **6.** a) $\mathscr{V}_{\text{vas}} = 9{,}072\sqrt{3}$ dm^3, iar $9{,}072\sqrt{3} < 10 \cdot \cdot 2 = 20$; b) $AM = 30$ cm, $MC' = 51$ cm, deci furnica merge 81 cm.

TESTUL 67

Subiectul I. 1. c). **2.** a). **3.** b). **4.** b). **5.** d). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. d). **2.** b). **3.** a). **4.** a). **5.** d). **6.** d).
Subiectul al III-lea. 1. b) cu 36%. **2.** b) $E\left(-\frac{4}{3}\right) = 0$, deci tot produsul este 0. **3.** b) $A(-1, 1)$, $B(1, 5)$, $AB =$ $= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = 2\sqrt{5}$. **4.** b) $\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle CDA = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle ACB = 30°$, deci $\sphericalangle BAD = 60° + 30° = 90°$. Astfel, $AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = 5\sqrt{3}$ km. **5.** a) DO și MN sunt perpendiculare pe AC, deci $DO \parallel MN$; cum $DO = 6\sqrt{2}$ cm $\neq$ $\neq 3\sqrt{2}$ cm $= MN$, rezultă că $DOMN$ este un trapez; b) $\mathscr{A}_{DOMN} = \frac{1}{2}(DO + MN) \cdot ON = 27$ cm^2. **6.** a) Fie $T = \text{pr}_{(ABC)} M$; atunci $T \in AO$, $\sphericalangle AO$, $\sphericalangle(MA, (ABC)) = \sphericalangle MAT = 45°$, deci $AT = MT = 3\sqrt{2}$ cm. Rezultă că $TO = MO' = 3\sqrt{2}$ cm, apoi $MN = 6$ cm; b) Cum $MP \parallel AO$, deducem că $AMPO$ este un paralelogram, așadar $AM \parallel OP$. Astfel, $\sphericalangle(AM, BP) =$ $= \sphericalangle(OP, BP) = \sphericalangle OPB$. Din triunghiul dreptunghic OPB, $\sphericalangle O = 90°$, obținem că $\sin(\sphericalangle OPB) = \frac{OB}{BP} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

TESTUL 68

Subiectul I. 1. a). **2.** c). **3.** b). **4.** d). **5.** c). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. d). **2.** d). **3.** c). **4.** c). **5.** d). **6.** b).
Subiectul al III-lea. 1. a) 62,5%; b) 600 de lei. **2.** b) $E(n) = n - 2 \in \mathbb{Z}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{1, 3\}$. **3.** b) $a \in \{-3, 1\}$. **4.** a) 10π cm; b) $5(\sqrt{2}-1)$ cm. **5.** a) AM este mediana ipotenuzei triunghiului ABC, deci $AM = BM$. În triunghiul BAM, BD este bisectoare şi înălţime, aşadar $AB = BM$ şi, astfel, triunghiul ABM are toate laturile egale; b) $\Delta ABD \equiv \Delta MBD$ (L.U.L.), deci $\sphericalangle BMD = \sphericalangle A = 90°$. Din triunghiul BMD, $BM = \dfrac{DM}{\operatorname{tg} 30°} = 6$ cm, apoi $\mathcal{A}_{ABC} = 18\sqrt{3}$ cm^2. **6.** a) $AM \parallel C'N'$ şi $AA' \parallel CC'$, deci $(A'AM) \parallel (CC'N')$; b) Fie N mijlocul lui AD; evident că $N \in (CC'N')$. Dacă $NP \perp AM$, $P \in AM$, atunci $NP \perp (A'AM)$, prin urmare $d((A'AM), (CC'N')) = d(N, (A'AM)) = NP = \dfrac{AM \cdot MN}{AM} = 2\sqrt{5}$ cm.

TESTUL 69

Subiectul I. 1. c). **2.** b). **3.** c). **4.** b). **5.** a). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. d). **2.** a). **3.** c). **4.** c). **5.** b). **6.** d).
Subiectul al III-lea. 1. a) În acest caz ar fi obţinut 65 de puncte, fals; b) Notând cu c, g numărul răspunsurilor corecte, respectiv greşite, avem $c + g = 20$ şi $5c - 2g = 72$, de unde $c = 16$. **2.** b) $E(n^3) - E(n) = 4n^3 - 4n = 4(n-1) \cdot n \cdot (n+1)$. Cum produsul a trei numere consecutive se divide cu 6, concluzia se impune. **3.** a) $f(\sqrt{2}) \cdot f(-\sqrt{2}) = -1$; b) $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, deci $\sphericalangle BAO = 45°$. Fie $CT \perp AB$, $T \in AB$. Atunci triunghiul ACT este dreptunghic isoscel, deci $CT = \sqrt{2}$. **4.** a) $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ABM} + \mathcal{A}_{ACM} = \dfrac{ME \cdot AB}{2} + \dfrac{MF \cdot AC}{2}$, de unde relaţia dorită; b) Dacă $AB = AC = a$, atunci $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, prin urmare, $ME + MF = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, valoare care nu depinde de poziţia punctului M. **5.** a) $ACDE$ este paralelogram, deci $ED = AC = 15$ cm; b) Din triunghiul BDE, $\sphericalangle BDE = 90°$, rezultă că $DA^2 = AB \cdot AE$, deci $AB = 16$ cm. Atunci $\mathcal{A}_{ABCD} = \dfrac{(AB+DC)AD}{2} = 150$ cm^2. **6.** a) $VA = 60$ dm, $VO = 30\sqrt{2}$ dm, $\mathcal{V} = 36\sqrt{2}\ \ell > 50\ \ell$; b) $BC \parallel AD$, deci $\sphericalangle(VA, BC) = \sphericalangle VAD = 60°$.

TESTUL 70

Subiectul I. 1. c). **2.** b). **3.** b). **4.** d). **5.** b). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. a). **2.** c). **3.** b). **4.** d). **5.** c). **6.** b).
Subiectul al III-lea. 1. a) Nu, deoarece $4 \cdot 20 > 76$; b) Dacă a este preţul unui bilet pentru adulţi şi c este preţul unui bilet pentru copii, atunci $3a + 6c = 93$ şi $4a + 2c = 76$. Se obţin $a = 15$ lei şi $c = 8$ lei, deci $a - c = 7$ lei. **2.** b) $E(\sqrt{3}) + a\sqrt{3} = (2\sqrt{3}-1)^2 + a\sqrt{3} = 13 + (a-4)\sqrt{3} \in \mathbb{Q} \Rightarrow a - 4 = 0 \Rightarrow a = 4$. **3.** a) 0; b) $A(3, 0) \in G_f$, deci $3a + b = 0$; $B(0, 3) \in G_f$, deci $b = 3$ şi atunci $a = -1$, iar $f(x) = -x + 3$. **4.** a) $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 10$ cm; b) $\Delta ANM \sim \Delta ACB$, deci $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$; se obţine $MN = 5$ cm. **5.** a) Deoarece $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBA = 30°$ şi $AB = 12$ cm, obţinem că $BP = 4\sqrt{3}$ cm; b) $MNPQ$ este romb cu latura $12 - 4\sqrt{3}$ cm $< 5{,}08$ cm, deci $\mathcal{P}_{MPNQ} < 20{,}32$ cm. **6.** a) $VO = 1$ cm, deci $\mathcal{V} = 3\sqrt{3}$ cm$^3 > 5$ cm^3; b) $\sphericalangle((VBC), (ABC)) = \sphericalangle VMO$, iar din triunghiul VOM se obţine că $\sphericalangle VMO = 30°$.

TESTUL 71

Subiectul I. 1. b). **2.** a). **3.** c). **4.** c). **5.** b). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. d). **2.** d). **3.** b). **4.** c). **5.** b). **6.** a).
Subiectul al III-lea. 1. a) Nu, deoarece 11 nu se divide cu 2; b) Dacă notăm cu x numărul de rochii și cu y numărul de bluze, atunci $3x + 2y = 11$, $x, y \in \mathbb{N}^*$. Variante posibile sunt $(x, y) \in \{(1, 4); (3, 1)\}$. Poate obține sumele 395 de lei sau 425 de lei, iar venitul maxim este atunci când confecționează o rochie și patru bluze. **2.** b) $n \in \{-3, 1, 2, 3, 6\}$. **3.** a) 2; b) Presupunem că $f(a) = b$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Atunci $2a + 6b = 3$, imposibil, deoarece $2a + 6b$ este număr par și 3 este număr impar. **4.** a) $DE = \sqrt{EA^2 + AD^2} = 10$ cm; b) $\Delta EBF \sim \Delta EAD$, iar $\frac{EF}{ED} = \frac{EB}{EA}$, deci $EF = 2{,}5$ cm. **5.** a) NP este linie mijlocie, deci $NP = \frac{AB}{2} = 6$ cm. În triunghiul ADB, $\sphericalangle ADB = 90°$, DM este mediană, deci $DM = \frac{AB}{2} = 6$ cm; b) $MN = \frac{BC}{2} = 10$ cm, $BD = 6$ cm, $DP = 4$ cm, $\mathcal{P}_{ABCD} = 26$ cm. **6.** a) Dacă M este mijlocul laturii BC, atunci $VM = 7$ cm, iar $\mathcal{A}_\ell = 252$ cm^2. Cantitatea de vopsea necesară este $252 : 14 \times 1{,}5 = 27$ g; b) $\sphericalangle((VA), (ABC)) = \sphericalangle VAO$; $\operatorname{tg}(\sphericalangle VAO) = \frac{VO}{AO} = \frac{1}{8\sqrt{3}} > \frac{1}{14}$.

TESTUL 72

Subiectul I. 1. b). **2.** b). **3.** c). **4.** c). **5.** c). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. a). **2.** a). **3.** c). **4.** b). **5.** a). **6.** a).
Subiectul al III-lea. 1. a) Nu; b) Folosind notații sugestive, $c = n + 4$, $p = 3n + 4$, $p = 2c + 3$, deci $n = 7$. **2.** a) $E(x) = \frac{-3(x-2)}{(x+3)^2} \cdot \frac{(x+3)(x-3)}{x-2} = \frac{3(3-x)}{x+3}$; b) $\sqrt{E(\sqrt{2}) \cdot E(-\sqrt{2})} = 3 \in \mathbb{N}$. **3.** a) $f(\sqrt{3}) = 0$, deci $a = \sqrt{3}$; $g(\sqrt{3}) = 0$, de unde $b = \sqrt{3}$; b) $\sphericalangle BAO = 45°$, $\sphericalangle CAO = 60°$, iar $\sphericalangle BAC = 105°$. **4.** a) $BDEF$ și $GCED$ sunt paralelograme, astfel că $BF = GC = DE$. Deoarece $\Delta ADE \sim \Delta ABC$, rezultă $DE = 6$ cm; b) $FG = 3$ cm și $\Delta FRG \sim \Delta ERD$, de unde $ER = \frac{2}{3} BD = 4$ cm. **5.** a) $BC = 25$ cm, $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = 12$ cm; b) $\Delta BED \sim \Delta BAC$, deci $\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{BC}$ sau $\frac{DE}{20} = \frac{9}{25}$. Deducem că $DE = 7{,}2$ cm. **6.** a) Cea mai mare lungime o are diagonala, iar $DB' = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{24} < 5$; b) $B'D' \parallel BD$, $\sphericalangle(AB, B'D') = \sphericalangle ABD = 45°$.

TESTUL 73

Subiectul I. 1. a). **2.** c). **3.** a). **4.** c). **5.** a). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. b). **2.** d). **3.** c). **4.** c). **5.** d). **6.** d).
Subiectul al III-lea. 1. a) Nu, deoarece am obține rezultate contradictorii cu privire la paritatea vârstei mamei; b) Dacă m este vârsta mamei și f vârsta fiicei, atunci $m - 1 = 4(f - 1)$ și $m + 3 = 3(f + 3)$. De aici vom obține că $m = 33$ ani. **2.** b) Calcul direct. **3.** a) $\sqrt{1 + f(9) \cdot f(10)} = 20 \in \mathbb{N}$; b) $A(0, 1)$ și $B(-1, -1)$ sunt puncte pe graficul funcției, iar reprezentarea geometrică este dreapta AB. **4.** a) Dacă G este mjlocul AD, atunci $DE = \sqrt{DG^2 + GE^2} = 3\sqrt{10}$ cm; b) $CE \parallel DB$, astfel că $\Delta EFC \sim \Delta DFB$ și, de aici, $EF = \sqrt{10}$ cm. **5.** a) $\sphericalangle DAM + \sphericalangle DMA = 90°$, iar $\sphericalangle DMA + \sphericalangle CMN = 90°$. Astfel $\sphericalangle DAM \equiv \sphericalangle CMN$; b) Dacă $CN = x$, atunci $BN = 9 - x$; din $AN^2 = AM^2 + MN^2$, obținem că $BN = 7$ cm. **6.** a) $\mathcal{A}_t = 144\sqrt{3}$ cm^2; b) $\mathcal{V} = \frac{AB^3\sqrt{2}}{12} = 144\sqrt{2}$ cm^3, iar $144\sqrt{2} > 200$.

TESTUL 74

Subiectul I. 1. b). **2.** a). **3.** c). **4.** d). **5.** c). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. a). **2.** c). **3.** b). **4.** a). **5.** b). **6.** d).
Subiectul al III-lea. 1. a) Nu este posibil; b) Dacă b este numărul băncilor și c numărul copiilor, atunci $c = b + 12$ și $c = 2b - 1$, de unde $c = 25$. **2.** a) $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 3^2 - 2 = 7$; b) Dacă $x + \frac{1}{x} = 3$, atunci $x^2 - 3x + 1 = 0$. Soluțiile acestei ecuații sunt $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. **3.** a) $f(m) = m$, de unde $m = 2$; b) $A(6, 0)$, $B(0, 3)$, $\text{tg}(\sphericalangle ABO) = 2$. **4.** a) Triunghiul ABD este isoscel, iar AC este bisectoarea $\sphericalangle BAD$, deci $AC \perp BD$; b) $BE \parallel CD$, AD secantă, deci $\sphericalangle AEB = \sphericalangle ADC = 72°$. În triunghiul ABF avem $\sphericalangle BAF = \sphericalangle ABE = 36°$ și astfel triunghiul ABF este isoscel. **5.** a) Fie M mijlocul BC. Atunci $AD = \sqrt{AM^2 + MD^2} = 6\sqrt{7}$ cm; b) $\mathcal{A}_{ACD} = \frac{CD \cdot AM}{2} = 18\sqrt{3}\ \text{cm}^2 < 18 \cdot 1{,}75 < 32\ \text{cm}^2$. **6.** a) $MC = MD = 10$ cm, $MC' = MD' = 2\sqrt{39}$ cm; b) Deoarece $AB \parallel C'D'$ și $M \in AB$, înseamnă că $AB \subset (MC'D')$, prin urmare $(MC'D') = (ABC'D')$. Construim $CP \perp BC'$, $P \in BC'$; avem $CP \perp BC'$, $BC' \perp AB$, $CB \perp AB$ și, din reciproca a doua a teoremei celor trei perpendiculare, rezultă că $CP \perp (MC'D')$. Astfel, $d(C, (MC'D')) = CP = \frac{CC' \cdot BC}{BC'} = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4{,}8$ cm.

TESTUL 75

Subiectul I. 1. c). **2.** c). **3.** d). **4.** b). **5.** a). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** a). **3.** d). **4.** b). **5.** c). **6.** b).
Subiectul al III-lea. 1. a) Nu, deoarece numărul panseluțelor trebuie să fie multiplu de 5; b) Dacă t reprezintă numărul teilor și p numărul panseluțelor, atunci $p = 27 + t$ și $p = 5(t - 1)$, de unde $t = 8$, iar lungimea aleii este egală cu 70 m. **2.** b) $E(n) = n - 1 \in \mathbb{N}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. **3.** b) Avem $\sqrt{3}(a - 2) = b + 3$, cu $a, b \in \mathbb{Q}$, deci $a = 2$ și $b = -3$. **4.** a) $\sphericalangle BAD = 72° = \sphericalangle ABC$, deci triunghiul ABD este isoscel; b) Ținând cont că triunghiul ABD este isoscel cu $AD = BD$ și $AQ = QB$, rezultă că QD este bisectoarea $\sphericalangle ADB$. I fiind punctul de intersecție a două bisectoare interioare, este centrul cercului înscris. **5.** a) $AE = \sqrt{BE^2 - BA^2} = 2\sqrt{3}$ cm; b) Aplicând teorema înălțimii în triunghiul DBE, $AB^2 = AE \cdot AD$, de unde $AD = 6\sqrt{3}$ cm. Atunci $\mathcal{P}_{ABCD} = 12 + 12\sqrt{3} > 30$ cm. **6.** a) Dacă h reprezintă înălțimea la care se ridică apa, atunci $154 = \frac{22}{7} \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 \cdot h$, de unde obținem $h = 4$ cm; b) Considerăm desfășurarea suprafeței laterale. Drumul minim este $AC = \sqrt{(\pi R)^2 + G^2} \in (16, 17)$.

TESTUL 76

Subiectul I. 1. b). **2.** c). **3.** b). **4.** a). **5.** b). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. a). **2.** b). **3.** a). **4.** d). **5.** d). **6.** b).
Subiectul al III-lea. 1. a) Din suma inițială, domnul Ionescu dă 45% pe mâncare, mai mult decât pentru cazare; b) Dacă S este suma inițială, atunci $\frac{15}{100} \cdot S = 375$, iar $S = 2500$ de lei. **2.** b) $E(a) = a$ implică $a = 0$, o valoare care nu convine. Așadar, nu există numere reale pentru care $E(a) = a$. **3.** a) 1; b) Un punct oarecare $M \in G_f$ are coordonate de forma (a, a), cu $a \in \mathbb{R}$. Atunci $d(M, Ox) = d(M, Oy) = |a|$. **4.** a) $(AB + CD) \cdot AD = 60$, de unde $DC = 8$ cm; b) $\Delta MDC \sim \Delta MAB$, deci $\frac{MC}{MB} = \frac{DC}{AD}$. Cum $BC = 5$ cm, rezultă că $MC = 10$ cm. **5.** a) $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ADE = 60°$, astfel că $AC \parallel DE$; b) Dacă $EF \perp BD$,

$F \in BD$, din triunghiul AFE obținem că $AE = 5\sqrt{7}$ cm. **6.** a) $BD' = 18\sqrt{3}$ cm, $BP = \frac{3}{2}BD' = 27\sqrt{3}$ cm; b) Fie $Q = pr_{(ABC)}P$. Punctele B, D' și P fiind coliniare, proiecțiile lor, B, D și Q pe planul (ABC) sunt și ele coliniare. Cum $PQ \perp (ABC)$ și $DD' \perp (ABC)$, rezultă că $PQ \parallel DD'$, deci $\Delta BDD' \sim \Delta BQP$. Deducem că $d(P, (ABC)) = PQ = \frac{3}{2}DD' = 27$ cm.

TESTUL 77

Subiectul I. 1. a). **2.** b). **3.** a). **4.** b). **5.** c). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** c). **3.** b). **4.** c). **5.** b). **6.** a).
Subiectul al III-lea. 1. a) 25% din 10 nu este un număr întreg, deci nu este posibil; b) Pentru a putea calcula 25% din numărul fetelor (f), trebuie ca f să fie divizibil cu 4; așadar, $f \in \{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$. Pentru a putea calcula 20% din numărul băieților (b), trebuie ca b să fie divizibil cu 5, deci $b \in \{5, 10, 15, 20, 25\}$. Singura posibilitate pentru care $f + b = 27$ este $f = 12$ și $b = 15$. **2.** b) Din relația $19n \le n^3$ rezultă că $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. **3.** a) $f(-2) + f(-3) + ... + f(-10) = 9^2$; b) $P(-1, -1)$. **4.** a) În triunghiul dreptunghic CEF, $\measuredangle E = 90°$, rezultă că $EC = \sqrt{FC^2 - FE^2} = 6\sqrt{3}$ cm; b) $\Delta COP \sim \Delta CED$, deci $\frac{OP}{ED} = \frac{CO}{CE}$. Însă $\Delta EOD \sim \Delta COF$, astfel că $\frac{OP}{ED} = \frac{2}{3}$, deci $OP = 4$ cm. **5.** a) $AD = BD = x$, $DC = 14 - x$. Din triunghiul BDC, rezultă $BC^2 = BD^2 + DC^2$, ceea ce conduce la $x^2 - 14x + 48 = 0$; b) Rezolvând ecuația de gradul al doilea de la a), obținem că $x \in \{6, 8\}$. Dacă $x = 6$, atunci $AB = 6\sqrt{2}$ cm și $\mathcal{P}_{ABC} = 6(4 + \sqrt{2})$ cm, iar pentru $x = 8$, rezultă că $AB = 8\sqrt{2}$ cm și $\mathcal{P}_{ABC} = 8(3 + \sqrt{2})$ cm. Valoarea cerută este $AB = 6\sqrt{2}$ cm. **6.** a) Dacă M este mijlocul BC, atunci $VM = 2{,}5$ m; $\mathcal{A}_l = 20$ m^2; b) $\measuredangle((VBC), (ABC)) = \measuredangle VMO$, iar $\cos(\measuredangle VMO) = \frac{4}{5}$.

TESTUL 78

Subiectul I. 1. c). **2.** d). **3.** b). **4.** c). **5.** a). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** a). **3.** a). **4.** c). **5.** d). **6.** a).
Subiectul al III-lea. 1. a) Deoarece $25 = 4 \cdot 6 + 1$ și $39 = 4 \cdot 9 + 3$, rezultă că se pot face 4 pachete respectând cerințele; b) Dacă n este numărul maxim de pachete, atunci $25 = n \cdot x + 1$ și $39 = n \cdot y + 3$. Rezultă că $n = (24; 36) = 12$. **2.** a) $E(x) = 2(x^2 + 6x + 9) - (x^2 - 2x + 1) - 10x - 15 = 2x^2 + 12x + 18 - x^2 + 2x - 1 - 10x - 15 = x^2 + 4x + 2$; b) $E(x) = (x + 2)^2 - 2$, deci valoarea minimă se obține pentru $x = -2$. **3.** a) $f(m^2) = 5m$, de unde $m \in \{-1, -4\}$; b) $A(-4, 0)$, $B(0, -4)$, $P(-2, -2)$, $OP = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. **4.** a) Situația $AB = AC = 10$ cm și $BC = 25$ cm nu convine, deoarece $AB + AC < BC$. Rămâne că $AB = AC = 25$ cm, $BC = 10$ cm, așadar $\mathcal{P}_{ABC} = 60$ cm; b) Constatăm că $\Delta DCB \sim \Delta BCA$ (L.U.L.), deci $\measuredangle D \equiv \measuredangle B$, adică triunghiul BCD este isoscel cu $BC = BD = 10$ cm. **5.** a) Din $\Delta COV \sim \Delta CAB$ rezultă că $\frac{VO}{AB} = \frac{CO}{CA}$. Analog, $\frac{VO}{CD} = \frac{AO}{AC}$. Adunând aceste egalități obținem relația dorită; b) Din a) obținem că $VO\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{20}\right) = 1$, de unde $VO = 12$ m. **6.** a) $\mathcal{V}_{piramidă} = 36\sqrt{3}$ cm^3, $\mathcal{V}_{prismă} = 54\sqrt{3}$ cm^3, deci volumul de lemn pierdut este $18\sqrt{3}$ cm^3; b) Dacă M este mijlocul BC și M_1 este mijlocul B_1C_1, atunci $\measuredangle((VBC), (VB_1C_1)) = \measuredangle MVM_1 = 60°$.

TESTUL 79

Subiectul I. 1. c). **2.** c). **3.** b). **4.** d). **5.** c). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** c). **3.** b). **4.** b). **5.** d). **6.** c).

Subiectul al III-lea. 1. a) Nu, deoarece numărul $4z + 6$ este par; b) Dacă notăm cu z numărul zilelor alocate și cu p numărul problemelor de rezolvat, atunci $p = 4z + 6$ și $p = 5(z - 1)$. Se obține $p = 50$. **2.** a) $E(x) = \frac{x+1}{x-1}$; b) $S = (1, +\infty)$. **3.** b) $A(1, 0)$, $B(0, -4)$, $\mathcal{A}_{AOB} = \frac{OA \cdot OB}{2} = 2$. **4.** a) $OA = OC = 6\sqrt{2}$, deci $AE = 18\sqrt{2}$; b) Fie $EF \perp AD$, $F \in AD$. Triunghiul AFE este dreptunghic isoscel, astfel că $EF = 18$ cm. **5.** a) $\Delta DOC \sim \Delta BOA$, deci $OD = OC = 6$ cm, $OB = OA = 12$ cm; b) Triunghiul AOB este echilateral, prin urmare $BR \perp OA$. Segmentul RM este mediana ipotenuzei în triunghiul dreptunghic RBC, deci $RM = \frac{BC}{2} = 3\sqrt{7}$ cm. **6.** a) Din $120° = 360° \cdot \frac{R}{G}$ rezultă că $G = 3R$. Atunci $G = 15$ cm, $R = 5$ cm, $H = 10\sqrt{2}$ cm, iar $10\sqrt{2} \in (14, 15)$; b) $AB \cdot VO = AV \cdot VB \cdot \sin(\measuredangle AVB)$, prin urmare $\sin(\measuredangle AVB) = \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

TESTUL 80

Subiectul I. 1. b). **2.** c). **3.** d). **4.** c). **5.** b). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** c). **3.** b). **4.** a). **5.** d). **6.** c).
Subiectul al III-lea. 1. a) Nu, deoarece 31 nu se divide cu 7; b) Fie n numărul minim de nuci. Atunci $n = 5x + 1$, $n = 3y + 1$, $n = 7p$. Obținem $(n - 1) \vdots 15$, deci $n = 15k + 1$ și $n \vdots 7$. Cea mai mică valoare este $n = 91$. **2.** a) $E(x) = x^2 - x + 1$, deci $E(n) = n(n - 1) + 1$ este număr impar, deoarece $n(n - 1) \vdots 2$; b) $E(x) \cdot E(-x) = x^4 + x^2 + 1 \geq 0 + 0 + 1 = 1$, oricare ar fi numărul real x. **3.** a) Fie $P(a, b) \in G_f \cap G_g$; atunci $f(a) = b$ și $g(a) = b$, adică $a = 1$, $b = 2$; b) Obținem că $G \cap Ox = \{A(3, 0)\}$, $G_f \cap Oy = \{B(-1, 0)\}$, iar $\mathcal{A}_{PAB} = 4$. **4.** a) Deoarece triunghiul BAD este echilateral și $AM = MD$, rezultă că $BM \perp AD$; b) Cum $AN = BN = 4\sqrt{3}$ cm, rezultă că $NC = \left(12 - 4\sqrt{3}\right)$ cm > 5 cm. **5.** a) $\mathcal{A}_{BCN} = \frac{AB \cdot AD}{6}$, iar $\mathcal{A}_{AMN} = \frac{AB \cdot AD}{6}$, deci $\mathcal{A}_{BCN} = \mathcal{A}_{AMN}$; b) Din $\frac{AB \cdot AD}{6} = 60$ m^2, rezultă că $\mathcal{A}_{ABCD} = 360$ m^2. **6.** a) Din relația $216 = 360 \cdot \frac{R}{G}$ rezultă $G = \frac{5R}{3}$. Atunci $VO = \sqrt{G^2 - R^2} = \frac{4R}{3}$, de unde $R = 18$ cm și $G = 30$ cm; $\mathcal{A}_\ell = \pi RG = 540\pi > 1690$ cm^2; b) $d(A, VB) = 2 \cdot \mathcal{A}_{VAB} : VB = \frac{2R \cdot H}{G} = 28{,}8$ cm.

Cuprins

Cuvânt-înainte / **5**

MEMORATOR DE MATEMATICĂ / **7**

TEME RECAPITULATIVE / **20**

MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA NAŢIONALĂ / **58**

SOLUŢII
TEME RECAPITULATIVE / **250**
MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA NAŢIONALĂ / **264**

COMENZI – CARTEA PRIN POŞTĂ

EDITURA PARALELA 45

Bulevardul Republicii, nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Piteşti,
jud. Argeş, cod 110177

Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918

Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492

E-mail: comenzi@edituraparalela45.ro

www.edituraparalela45.ro

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*

E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Lucrarea **Matematică. Evaluarea Națională 2024** vine în întâmpinarea așteptărilor elevilor și profesorilor aflați pe traseul pregătirii Evaluării Naționale, prin aprofundarea și consolidarea conținuturilor prevăzute de programa școlară și de cerințele modelului de subiect de examen.

Ținând seama de competențele vizate prin programa de examen, precum și de exigențele firești ale studiului matematicii, am gândit o structură complexă și eficientă, lucrarea conținând un **memorator, 14 teme/lecții recapitulative** din materia pentru examen a claselor V-VIII și **80 de teste după modelul subiectului de examen**. La primele teste, elevul poate completa răspunsul în spațiul alocat, ca un exercițiu de redactare necesar în perspectiva viitoarelor evaluări, care impun un ritm de lucru și niște obiective precise. În plus, copiii și antrenorii lor au posibilitatea de a studia metodic baremele specifice modelului de subiect, testele fiind însoțite de răspunsuri și sugestii de rezolvare care le oferă un feedback necesar și imediat, astfel încât nivelul de pregătire se poate verifica prin autoevaluare.

Problemele au, în general, un caracter aplicativ, dar și unul ludic, iar reperele teoretice constituie o formă utilă de sistematizare a aparatului conceptual necesar rezolvării subiectelor, precum și lucrului de zi cu zi, în clasă și acasă.

ISBN 978-973-47-3954-7

edituraparalela45.ro

35,00

EDITURA PARALELA 45
EDUCAȚIONAL